CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

OKRĘGOWA KOMISJA EGZAMINACYJNA W POZNANIU

Rodzaj dokumentu:	**Sprawozdanie za rok 2024** **województwo zachodniopomorskie**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy** **Poziom rozszerzony**
Terminy egzaminów:	8 maja 2024 r. – poziom podstawowy 15 maja 2024 r. – poziom rozszerzony
Data publikacji dokumentu:	20 września 2024 r.

Aktualizacja: 12.11.2024 r. (strona 6, wykres 1.)

Opracowanie
Piotr Hess (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Hubert Rauch (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Joanna Berner (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie)
Henryk Dąbrowski (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi)

Redakcja
dr Wioletta Kozak (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Opracowanie techniczne
Andrzej Kaptur (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Współpraca
Beata Dobrosielska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Agata Wiśniewska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Pracownie ds. Analiz Wyników Egzaminacyjnych okręgowych komisji egzaminacyjnych

Opracowanie dla województwa zachodniopomorskiego

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
Izabela Szafrańska
Anna Sperling

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. 22 536 65 00, fax 22 536 65 04
e-mail: sekretariat@cke.gov.pl
www.cke.gov.pl

SPIS TREŚCI

POZIOM PODSTAWOWY

Opis arkusza egzaminu maturalnego

W roku szkolnym 2023/2024 egzamin maturalny z matematyki został przeprowadzany na podstawie wymagań egzaminacyjnych określonych w rozporządzeniu Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r.[1]

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie podstawowym zawierał ogółem 35 zadań (ujęte w 31 grup/wiązek tematycznych), na które składało się 27 zadań zamkniętych i 8 zadań otwartych. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności ujęte w czterech obszarach wymagań ogólnych:

I. Sprawność rachunkowa (4 zadania zamknięte łącznie za 4 punkty).
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji (10 zadań łącznie za 12 punktów, w tym: 9 zadań zamkniętych łącznie za 11 punktów oraz 1 zadanie otwarte za 1 punkt).
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (14 zadań łącznie za 18 punktów, w tym: 11 zadań zamkniętych łącznie za 11 punktów oraz 3 zadania otwarte łącznie za 7 punktów).
IV. Rozumowanie i argumentacja (7 zadań łącznie za 12 punktów, w tym: 3 zadania zamknięte łącznie za 3 punkty oraz 4 zadania otwarte łącznie za 9 punktów).

Zdający mogli korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych na egzamin maturalny z matematyki* oraz linijki, cyrkla i kalkulatora prostego.

Za rozwiązanie wszystkich zadań można było otrzymać 46 punktów.

Dane dotyczące populacji zdających

TABELA 1. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZU STANDARDOWYM*

Liczba zdających (Formuła 2023)		**9 052**
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	5 663
	z techników	3 377
	z branżowych szkół II stopnia	12
	ze szkół na wsi	77
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	2 211
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	2 546
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	4 218
	ze szkół publicznych	7 906
	ze szkół niepublicznych	1 146
	kobiety	4 822
	mężczyźni	4 230
Obywatele Ukrainy[2]		**20**

* Dane w tabeli dotyczą tegorocznych absolwentów.

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. poz. 1246).
[2] Dz.U. z 2024 r. poz. 167, z późn. zm.

Z egzaminu zwolniono 5 osób − laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

TABELA 2. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZACH DOSTOSOWANYCH

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	102
	słabowidzący	12
	niewidomi	1
	słabosłyszący	14
	niesłyszący	5
	z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym	2
	z zaburzeniem widzenia barw	1
	Ogółem	**137**

Przebieg egzaminu

TABELA 3. INFORMACJE DOTYCZĄCE PRZEBIEGU EGZAMINU

Termin egzaminu			8 maja 2024
Czas trwania egzaminu dla arkusza standardowego			180 minut
Liczba szkół			126
Liczba zespołów egzaminatorów			5
Liczba egzaminatorów			126
Liczba obserwatorów[3] (§ 8 ust. 1)			10
Liczba unieważnień[4]	w przypadku:		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	0
	art. 44zzv pkt 3	zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu	0
	art. 44zzw ust. 1	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	1
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego	0
	art. 44zzy ust. 10	niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)	0
Liczba wglądów[4] (art. 44zzz)			142

[3] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 1 sierpnia 2022 r. w sprawie egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2024 r. poz. 302).
[4] Ustawa z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz.U. z 2024 r. poz. 750).

Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających

WYKRES 1. ROZKŁAD WYNIKÓW ZDAJĄCYCH

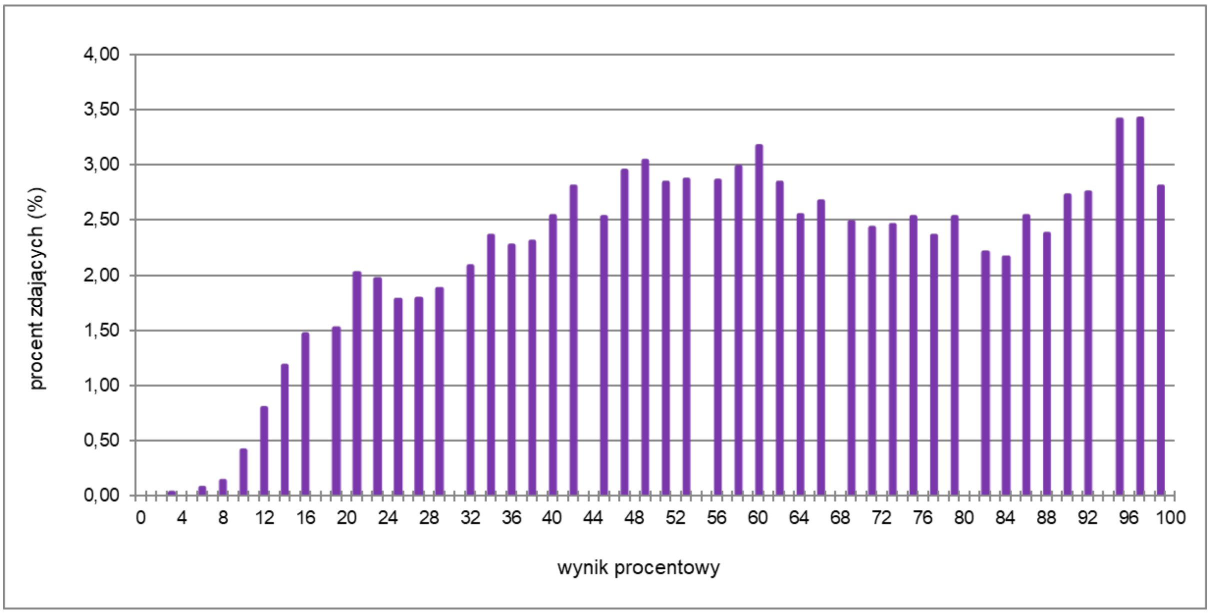


TABELA 4. WYNIKI ZDAJĄCYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
Ogółem Formuła 2023	**9 052**	**4**	**100**	**61**	**98**	**60,13**	**24,53**
w tym:							
z liceów ogólnokształcących	5 663	4	100	65	98	63,29	24,97
z techników	3 377	4	100	54	48	54,92	22,79
z branżowych szkół II stopnia	12	---------	---------	---------	---------	---------	---------
obywatele Ukrainy	**20**	---------	---------	---------	---------	---------	---------

* Dane dotyczą tegorocznych absolwentów. Parametry statystyczne są podane dla grup liczących 30 lub więcej zdających.

Poziom wykonania zadań

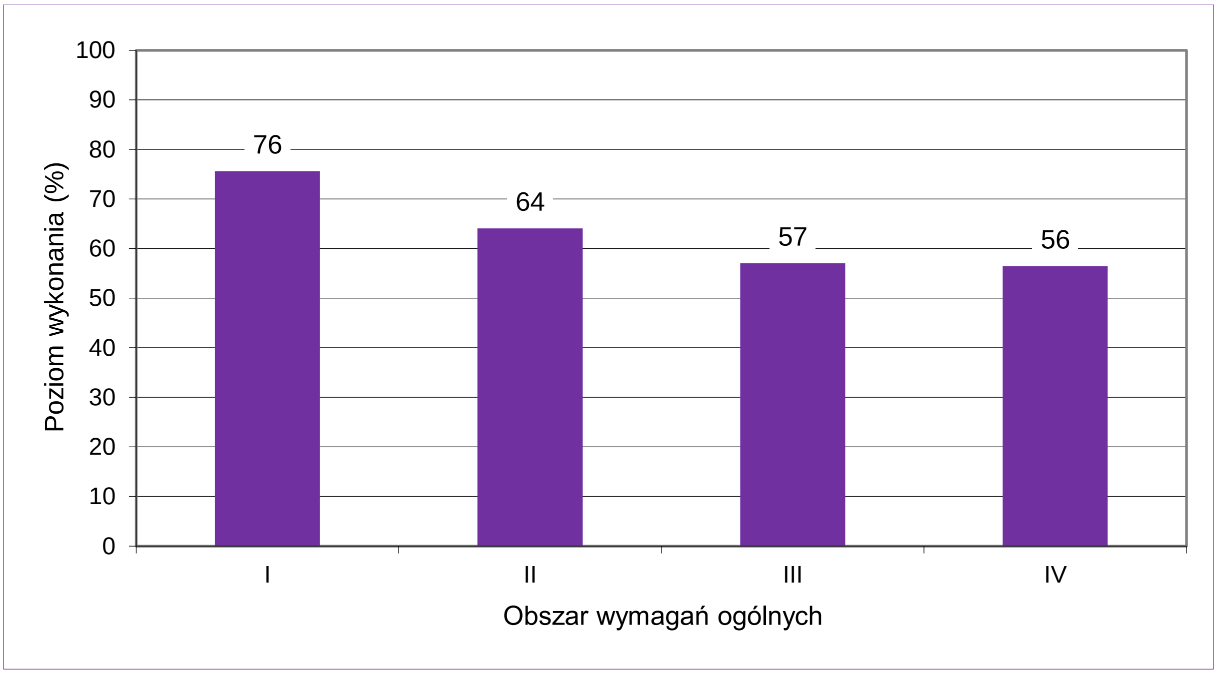
TABELA 5. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ

Wymagania egzaminacyjne 2024			
Nr zad.	**Wymagania ogólne**	**Wymagania szczegółowe**	**Poziom wykonania zadania (%)**
1.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: I.7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: […] $\lvert x+3\rvert \geq 4$.	81
2.	I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: I.4) stosuje […] prawa działań na potęgach […].	75
3.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych.	55
4.	I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: I.1) wykonuje działania ([…] logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.	73
5.	I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2.	77
6.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: III.3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą.	59
7.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: III.6) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)}=0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.	80
8.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: II.2) […] mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych. III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x)=0$ dla wielomianów […], które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias […].	83
9.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x)=0$ dla wielomianów […] takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej […] metodą grupowania.	77

10.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: IV.2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.	53
11.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów […] sprzecznych.	69
12.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.	54
13.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: V.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach.	62
14.1.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: […] przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby […].	50
14.2.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.	77
14.3.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą […] wykresów […].	58
14.4.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.12) na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y=f(x-a)$, […] $y=f(-x)$.	51
15.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.	76
16.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VI.2) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący; VI.6) wykorzystuje własności ciągów […] geometrycznych, do rozwiązywania zadań […].	76
17.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VI.4) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.	37
18.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji […] tangens dla kątów od $0°$ do $180°$ […]; VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.	57

19.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.	56
20.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VIII.7) stosuje twierdzenia: […] o dwusiecznej kąta […].	67
21.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: VIII.11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.	74
22.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.	61
23.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład […] prostopadłość do innej prostej […]).	64
24.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.	36
25.1.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: X.4) oblicza […] pola powierzchni […] graniastosłupów […].	67
25.2.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: X.2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną.	78
26.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	X.5) wykorzystuje zależność między objętościami graniastosłupów oraz ostrosłupów podobnych.	19
27.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia […].	85
28.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną […].	73
29.	I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: XII.2) znajduje medianę […].	77
30.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.	61
31.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XIII) rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.	31

WYKRES 2. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ W OBSZARZE WYMAGAŃ OGÓLNYCH



POZIOM ROZSZERZONY

Opis arkusza egzaminu maturalnego

W roku szkolnym 2023/2024 egzamin maturalny z matematyki został przeprowadzany na podstawie wymagań egzaminacyjnych określonych w rozporządzeniu Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r.[6]

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie rozszerzonym zawierał ogółem 14 zadań otwartych (ujętych w 13 grup/wiązek tematycznych). Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności ujęte w następujących obszarach wymagań ogólnych:

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji (2 zadania otwarte łącznie za 8 punktów).
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (4 zadania otwarte łącznie za 12 punktów).
IV. Rozumowanie i argumentacja (8 zadań otwartych łącznie za 30 punktów).

Zdający mogli korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych na egzamin maturalny z matematyki* oraz linijki, cyrkla i kalkulatora prostego.

Za rozwiązanie wszystkich zadań można było otrzymać 50 punktów.

Dane dotyczące populacji zdających

TABELA 6. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZU STANDARDOWYM*

Liczba zdających (Formuła 2023)		**1 943**
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	1 240
	z techników	702
	z branżowych szkół II stopnia	1
	ze szkół na wsi	6
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	312
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	576
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	1 049
	ze szkół publicznych	1 778
	ze szkół niepublicznych	165
	kobiety	738
	mężczyźni	1 205
Obywatele Ukrainy[7]		**3**

* Dane w tabeli dotyczą tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 5 osób − laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

[6] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. poz. 1246).
[7] DZ.U. z 2024 r. poz. 167, z późn. zm.

TABELA 7. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZACH DOSTOSOWANYCH

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	19
	słabowidzący	1
	niewidomi	0
	słabosłyszący	3
	niesłyszący	2
	z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym	0
	z zaburzeniem widzenia barw	0
	Ogółem	**25**

Przebieg egzaminu

TABELA 8. INFORMACJE DOTYCZĄCE PRZEBIEGU EGZAMINU

Termin egzaminu			15 maja 2024
Czas trwania egzaminu dla arkusza standardowego			180 minut
Liczba szkół			163
Liczba zespołów egzaminatorów			2
Liczba egzaminatorów			38
Liczba obserwatorów[8] (§ 8 ust. 1)			0
Liczba unieważnień[9]	w przypadku:		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	0
	art. 44zzv pkt 3	zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu	0
	art. 44zzw ust. 1	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego	0
	art. 44zzy ust. 10	niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)	0
Liczba wglądów[9] (art. 44zzz)			44

[8] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 1 sierpnia 2022 r. w sprawie egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2024 r. poz. 302).
[9] Ustawa z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz.U. z 2024 r. poz. 750).

Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających

WYKRES 3. ROZKŁAD WYNIKÓW ZDAJĄCYCH

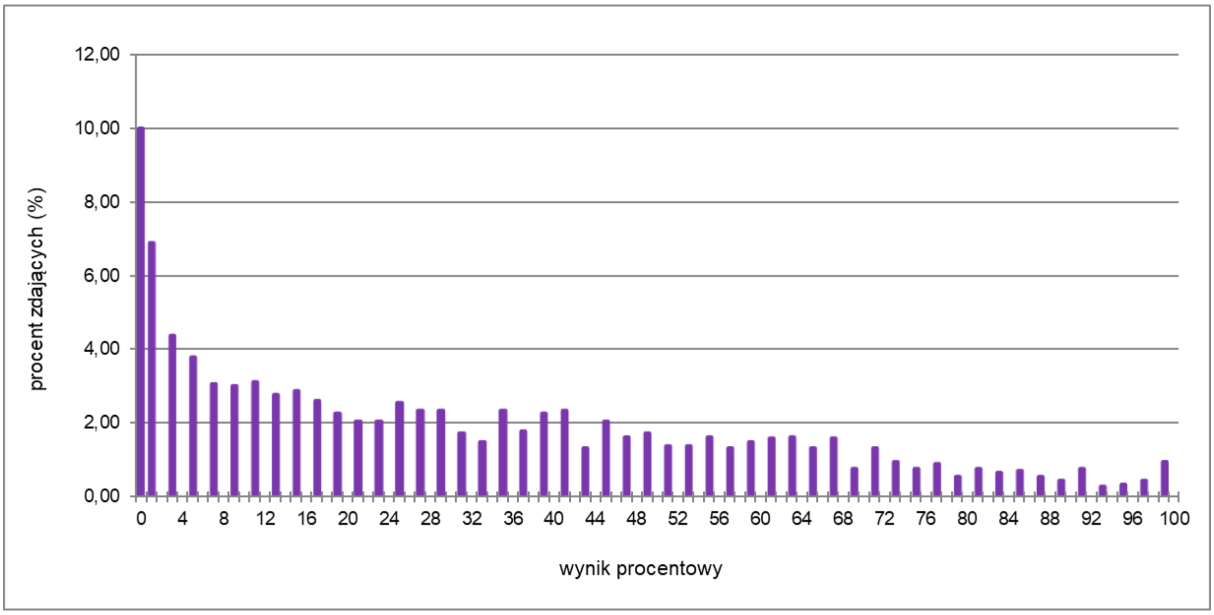


TABELA 9. WYNIKI ZDAJĄCYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
Ogółem Formuła 2023	**1 943**	**0**	**100**	**26**	**0**	**31,52**	**27,18**
w tym:							
z liceów ogólnokształcących	1 240	0	100	38	0	17,58	27,56
z techników	702	0	98	10	0	702	19,93
z branżowych szkół II stopnia	1	----------	----------	----------	----------	----------	----------
obywatele Ukrainy	**3**	----------	----------	----------	----------	----------	----------

* Dane dotyczą tegorocznych absolwentów. Parametry statystyczne są podane dla grup liczących 30 lub więcej zdających.

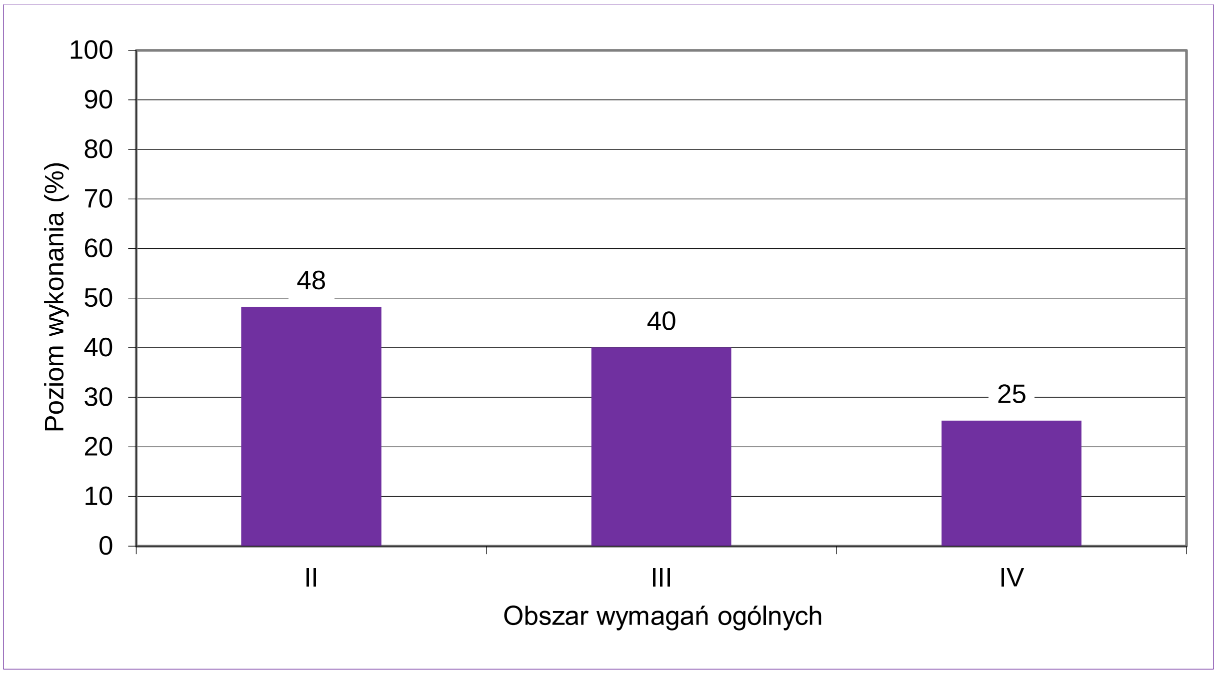
Poziom wykonania zadań

TABELA 10. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ

Wymagania egzaminacyjne 2024			
Nr zad.	**Wymagania ogólne**	**Wymagania szczegółowe** *Gdy wymaganie dotyczy treści zakresu podstawowego szkoły ponadpodstawowej – dopisano (P).*	**Poziom wykonania zadania (%)**
1.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.13) (P) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.	48
2.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XIII.1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne).	30
3.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XII.2) stosuje schemat Bernoullego.	44
4.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XIII.2) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu.	48
5.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: I.9) (P) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi. I.1) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.	58
6.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: XI.1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów.	17
7.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VI.6) (P) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań […].	40
8.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VIII.3) przeprowadza dowody geometryczne.	14
9.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VIII.7) (P) stosuje twierdzenia: Talesa, o dwusiecznej kąta […].	18

10.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VII.6) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4\cos 2x \cos 5x = 2\cos 7x + 1$.	27
11.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: IX.3) (P) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych; IX.5) (P) oblicza odległość punktu od prostej. IX.1) posługuje się równaniem prostej w postaci ogólnej na płaszczyźnie […].	17
12.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: III.3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.	38
13.1.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: X.4) (P) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów […].	44
13.2.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: XIII.3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu; XIII.4) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.5) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.	24

WYKRES 4. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ W OBSZARZE WYMAGAŃ OGÓLNYCH



KOMENTARZ – NA PODSTAWIE WYNIKÓW ZDAJĄCYCH W KRAJU

Analiza jakościowa zadań – poziom podstawowy

Na podstawie analizy wskaźników poziomu wykonania zadań (Tabela 5.) można stwierdzić, że wśród 27 zadań **zamkniętych** arkusza egzaminacyjnego nie było zadań bardzo łatwych dla zdających (poziom wykonania powyżej 90%), 17 zadań można uznać za łatwe dla zdających (poziom wykonania od 70% do 89%), 10 zadań zamkniętych okazało się umiarkowanie trudnych (poziom wykonania od 50% do 69%).

Wśród 8 zadań **otwartych** żadne nie było bardzo łatwe dla tegorocznych maturzystów, tylko 1 zadanie okazało się łatwe dla zdających, 3 zadania były umiarkowanie trudne dla zdających, a 4 zadania okazały się trudne (poziom wykonania wynosił od 20% do 49%).

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najsłabiej

Na poziomie podstawowym można zauważyć, że największą trudność sprawiły zdającym zadania badające umiejętność dobierania i tworzenia modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych oraz zadania wymagające stosowania i tworzenia strategii. Są to umiejętności opisane, odpowiednio, w III oraz IV obszarze wymagań ogólnych.

Najtrudniejszym zadaniem w arkuszu okazało się **zadanie 26.** – zadanie z luką otwartą, w którym należało uzupełnić stosunek pól powierzchni całkowitej dwóch ostrosłupów podobnych o podanych objętościach. Dla tego zadania poziom wykonania wyniósł 23%.

Treść zadania 26. brzmiała:

Ostrosłup F_1 jest podobny do ostrosłupa F_2. Objętość ostrosłupa F_1 jest równa 64. Objętość ostrosłupa F_2 jest równa 512.

Uzupełnij poniższe zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu tak, aby zdanie było prawdziwe.

Stosunek pola powierzchni całkowitej ostrosłupa F_2 do pola powierzchni całkowitej ostrosłupa F_1 jest równy ………. .

Oprócz poprawnych odpowiedzi (Przykład 1.), często pojawiały się odpowiedzi wynikające z błędnej interpretacji skali (Przykład 2.) oraz z braku znajomości zależności między skalą podobieństwa a objętością brył podobnych (Przykład 3. i Przykład 4.).

Przykład 1.

Stosunek pola powierzchni całkowitej ostrosłupa F_2 do pola powierzchni całkowitej ostrosłupa F_1 jest równy ...4..... .

Brudnopis

$V_1 = 64$

$V_2 = 512$

$\frac{512}{64} = k^3$

$k^3 = 8 \quad k = 2$

$k^2 \to P$

$2^2 = 4$

Przykład 2.

Stosunek pola powierzchni całkowitej ostrosłupa F_2 do pola powierzchni całkowitej ostrosłupa F_1 jest równy 1:4 ....

Przykład 3.

Stosunek pola powierzchni całkowitej ostrosłupa F_2 do pola powierzchni całkowitej ostrosłupa F_1 jest równy ...8...... .

Brudnopis

$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot P_p$

$P_c = P_b + P_p$

$P_b = 0b \cdot h$

$P_c = 0b \cdot h \cdot P_p$

$P_{c1} = 0b \cdot h \cdot \frac{192}{h}$

$P_{c1} = 192\,0b$

$h \cdot P_p \cdot \frac{1}{3} = 64$

$h \cdot P_p = 192$

$P_p = \frac{192}{h}$

$h \cdot P_p \cdot \frac{1}{3} \cdot 512$

$h \cdot P_p = 1536$

$P_p = \frac{1536}{h}$

$P_{c2} = 0b \cdot h \cdot \frac{1536}{h}$

$P_{c2} = 1536\,0b$

Przykład 4.

Stosunek pola powierzchni całkowitej ostrosłupa F_2 do pola powierzchni całkowitej ostrosłupa F_1 jest równy ..$2\sqrt{2}$.. .

Brudnopis

$\frac{512}{64} = 8 = k$

$P_k = k^2$

$k^2 = 8 \; / \sqrt{\ }$

$k = \sqrt{8} = \cancel{2\sqrt{}}\; \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

Wśród trudnych zadań znalazło się dwupunktowe **zadanie 17.** (poziom wykonania równy 40%), w którym należało obliczyć różnicę ciągu arytmetycznego, znając trzeci jego wyraz i sumę piętnastu początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu.

W rozwiązaniu zadania zdający najczęściej wykorzystywali wzory na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, tworzyli układ równań po którego rozwiązaniu otrzymywali szukaną różnicę ciągu (Przykład 5. i Przykład 6.).

Przykład 5.

$a_3 = -1$

$S_{15} = -165$

$$\begin{cases} a_1 + 2r = -1 \Rightarrow a_1 = -1 - 2r \\ \dfrac{2a_1 + (15-1)r}{2} \cdot 15 = -165 \quad \Big| \cdot \dfrac{2}{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 14r = -22 \quad \Big| \cdot \dfrac{1}{2} \\ a_1 = -1 - 2r \end{cases}$$

$-1 - 2r + 7r = -11$

$5r = -10$

$r = -2$

Przykład 6.

$a_3 = -1$

$S_{15} = -165$

$r = ?$

$\cancel{a_3 = a_1 + (3-1)r}$

$\cancel{-1 = a_1 + 2r}$

$-1 = a_1 + 2r$

$-1 - 2r = a_1$

$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

$a_{15} = -1 - 2r + (15-1)r$

$a_{15} = -1 - 2r + 14r$

$a_{15} = -1 + 12r$

$S_{15} = \dfrac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15$

$-165 = \dfrac{(-1-2r) + (-1+12r)}{2} \cdot 15 \quad \Big| \cdot 2$

$-330 = (-1 - 2r + -1 + 12r) \cdot 15$

$-330 = (-2 + 10r) \cdot 15$

$-330 = -30 + 150r$

$-300 = 150r \quad \Big| : 150$

$r = -2$

odp. Różnica ciągu wynosi -2.

Inni zdający zapisywali sumę piętnastu początkowych wyrazów ciągu w zależności od wyrazu trzeciego (Przykład 7. i Przykład 8.).

Przykład 7.

$a_3 = (-1)$ $\quad r = ?$

$S_{15} = (-165)$

$a_3 = a_1 + 2r$

$\overbrace{a_3 - 2r}^{1},\ \overbrace{a_3 - r}^{2},\ a_3,\ \overbrace{a_3 + r}^{4},\ \overbrace{a_3 + 2r}^{5},\ \overbrace{a_3 + 3r}^{6},\ \overbrace{a_3 + 4r}^{7},\ \overbrace{a_3 + 5r}^{8},\ \overbrace{a_3 + 6r}^{9},\ \overbrace{a_3 + 7r}^{10},\ \overbrace{a_3 + 8r}^{11},\ \overbrace{a_3 + 9r}^{12},\ \overbrace{a_3 + 10r}^{13},\ \overbrace{a_3 + 11r}^{14},\ \overbrace{a_3 + 12r}^{15}$

$(-1) - 2r + (-1) - r + (-1) + (-1) + r + (-1) + 2r + (-1) + 3r +$
$(-1) + 4r + (-1) + 5r + (-1) + 6r + (-1) + 7r + (-1) + 8r$
$+ (-1) + 9r + (-1) + 10r + (-1) + 11r + (-1) + 12r =$
$= -15 + 75r$

$-15 + 75r = -165$

$75r = -150 \quad /:75$

$\boxed{r = -2}$

Przykład 8.

$a_3 - 2r + a_3 - r + a_3 + a_3 + r + a_3 + 2r + a_3 + 3r + a_3 + 4r$
$+ a_3 + 5r + a_3 + 6r + a_3 + 7r + a_3 + 8r + a_3 + 9r + a_3 + 10r + a_3 + 11r$
$+ a_3 + 12r = -165$

$15a_3 - 3r + 78r = -165$

$15a_3 + 75r = -165$

$15 \cdot (-1) + 75r = -165$

$-15 + 75r = -165$

$75r = -165 + 15$

$75r = -150$

$r = -2$

Odp: różnica wynosi -2

Często zdający, którzy podjęli próbę rozwiązania tego zadania, błędnie interpretowali liczbę (-165) jako piętnasty wyraz ciągu (Przykład 9. i Przykład 10.).

Przykład 9.

$a_3 = -1 \iff a_1 + 2r = -1$

$a_1 = -1 - 2r$

$S_{15} = (-165)$

$S_{15} = a_1 + (15-1)r$

$-165 = -1 - 2r + 14r$

$-164 = 12r$

$r = -\frac{164}{12} = -\frac{82}{6} = -\frac{41}{3}$

Spr:

$a_3 = -1$

$a_1 + 2r = -1$

$a_1 = -2r - 1$

$S_{15} = -(165)$

$-165 = a_1 + 14r$

$-165 = -2r - 1 + 14r$

$-164 = 12r$

Przykład 10.

$a_3 = -1$

$a_{15} = -165$

$$\begin{cases} a_1 + 2r = -1 \\ a_1 + 14r = -165 \end{cases}$$

$12r = -164$

$r = -\frac{164}{12} = -\frac{41}{3}$

Niektórzy zdający mylili ciąg arytmetyczny z geometrycznym (Przykład 11. i Przykład 12.).

Przykład 11.

$a_3 = -1$ $S_{15} = -165$

$a_1 \cdot q \cdot q = -1$ $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

$a_1 = \frac{-1}{q^2}$ $-165 = a_1 \cdot \frac{1-q^{15}}{1-q}$

$-165 = \frac{-1}{q^2} \cdot \frac{1-q^{15}}{1-q}$

$-165 = \frac{-1}{q^2} \cdot \frac{1-q^{15}}{1-q} =$

$= \frac{-1+q^{15}}{q^2-q^3} = \frac{-1+q^{15}}{-q} \quad | \cdot -q$

$-165 \cdot q = -1 + q^{15}$

Przykład 12.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow$ dla $n \geq 2$

$a_3 = a_1 \cdot q^2 \rightarrow$ dla $n \geq 1$

$a_1 \cdot q^2 = -1$

$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ $q \neq 1$

$S_{15} = a_1 \cdot \frac{1-q^{15}}{1-q}$

Tradycyjnie wśród rozwiązań zdających pojawiały się także błędy rachunkowe (Przykład 13. i Przykład 14.).

Przykład 13.

$S_{15} = -165$

$a_3 = -1$

$a_3 = a_1 + (3-1)r$

$-1 = a_1 + 2r$

$-165 = \frac{2a_1 + (15-1)r}{2} \cdot 15$

$-165 = \frac{2a_1 + 14r}{2} \cdot 15$

$$\begin{cases} -1 = a_1 + 2r \\ -165 = \frac{2a_1 + 14r}{2} \cdot 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -2r - 1 \\ -165 = \frac{2(-2r-1) + 14r}{2} \cdot 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -2r - 1 \\ -165 = \frac{10r - 2}{2} \cdot 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -2r - 1 \\ -165 = (5r - 1) \cdot 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -2r - 1 \\ -165 = 75r - 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -2r - 1 \\ 150 = 75r \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -2r - 1 \\ r = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -5 \\ r = 2 \end{cases}$$

Przykład 14.

$$\begin{cases} a_3 = -1 \\ S_{15} = -165 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2r = -1 \\ \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = -165 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -2r - 1 \\ \frac{a_1 + a_1 + 14r}{2} = -11 \end{cases}$$

$2a_1 + 14r = -22$

$a_1 + 7r = -11$

$-2r - 1 + 7r = -11$

$5r = -10$

$r = -\frac{1}{2}$

Trudnym dla zdających (poziom wykonania równy 41%) okazało się również dwupunktowe **zadanie 24.** z geometrii analitycznej, w którym należało obliczyć długość boku równoległoboku, znając współrzędne dwóch jego kolejnych wierzchołków oraz współrzędne punktu przecięcia przekątnych.

Rozwiązując zadanie zdający najczęściej wyznaczali współrzędne wierzchołka C, a następnie obliczali długość odcinka BC (Przykład 15. i Przykład 16.).

Przykład 15.

$x_P = \frac{x_A + x_C}{2}$ $y_P = \frac{y_A + y_C}{2}$

$6 = \frac{-2 + x_C}{2}$ $7 = \frac{6 + y_C}{2}$

$12 = -2 + x_C$ $14 = 6 + y_C$ $B = (10, 2)$

$x_C = 14$ $y_C = 8$ $C = (14, 8)$

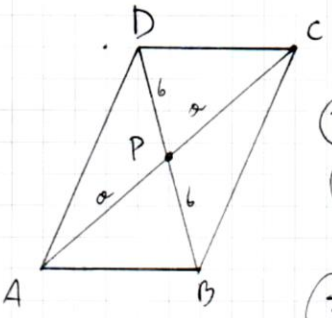
$|BC| = \sqrt{(14-10)^2 + (8-2)^2}$

$|BC| = \sqrt{4^2 + 6^2}$

$|BC| = \sqrt{52}$ $|BC| = 2\sqrt{13}$

Odp. Długość boku BC wynosi $2\sqrt{13}$.

Przykład 16.



$A = (-2, 6)$ $B = (10, 2)$ $P = (6, 7)$

I $P = A + \frac{1}{2}\vec{AC}$ (przekątne przecinają się w połowie)

II $\frac{1}{2}\vec{AC} = P - A$

$\vec{AC} = 2[P - A] = 2 \cdot [6+2, 7-6] = [16, 2]$

III $\vec{AC} = C - A \Rightarrow C = A + \vec{AC}$

IV $C = (-2, 6) + [16, 2] = (14, 8)$

V $|BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} =$

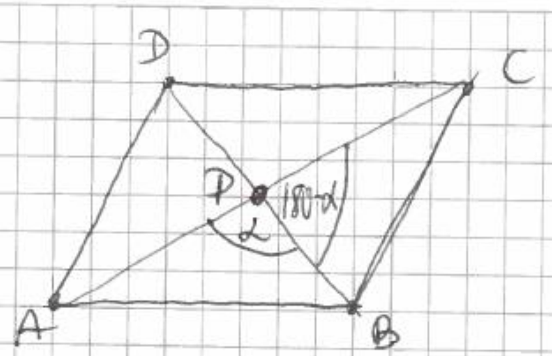
$= \sqrt{(14-10)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

52 | 2
26 | 2
13 |

długość boku BC to $2\sqrt{13}$

Niektórzy tegoroczni maturzyści rozwiązywali to zadanie, stosując dwukrotnie twierdzenie cosinusów (Przykład 17.).

Przykład 17.



$$|AB| = \sqrt{(-2-10)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{144+16} = \sqrt{160}$$

$$|AP| = \sqrt{(-2-6)^2 + (6-7)^2} = \sqrt{64+1} = \sqrt{65}$$

$$|PB| = \sqrt{(6-10)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$$

$$160 = 65 + 41 - 2\cdot\sqrt{65}\cdot\sqrt{41}\cdot\cos\alpha$$

$$160 = 106 - 2\sqrt{2665}\cos\alpha$$

$$80 = 53 - \sqrt{2665}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{53-80}{\sqrt{2665}} = \frac{-27}{\sqrt{2665}} \rightarrow \cos(180-\alpha) = \frac{27}{\sqrt{2665}}$$

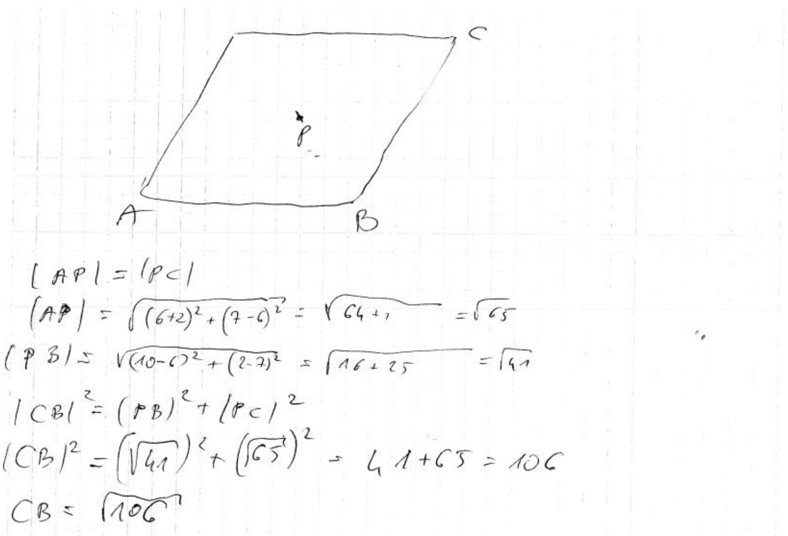
$$|BC|^2 = \sqrt{65}^2 + \sqrt{41}^2 - 2\cdot\cancel{\sqrt{65}\sqrt{41}}\cdot\frac{27}{\cancel{\sqrt{2665}}}$$

$$|BC|^2 = 65 + 41 - 54 = 52$$

$$|BC| = \sqrt{52}$$

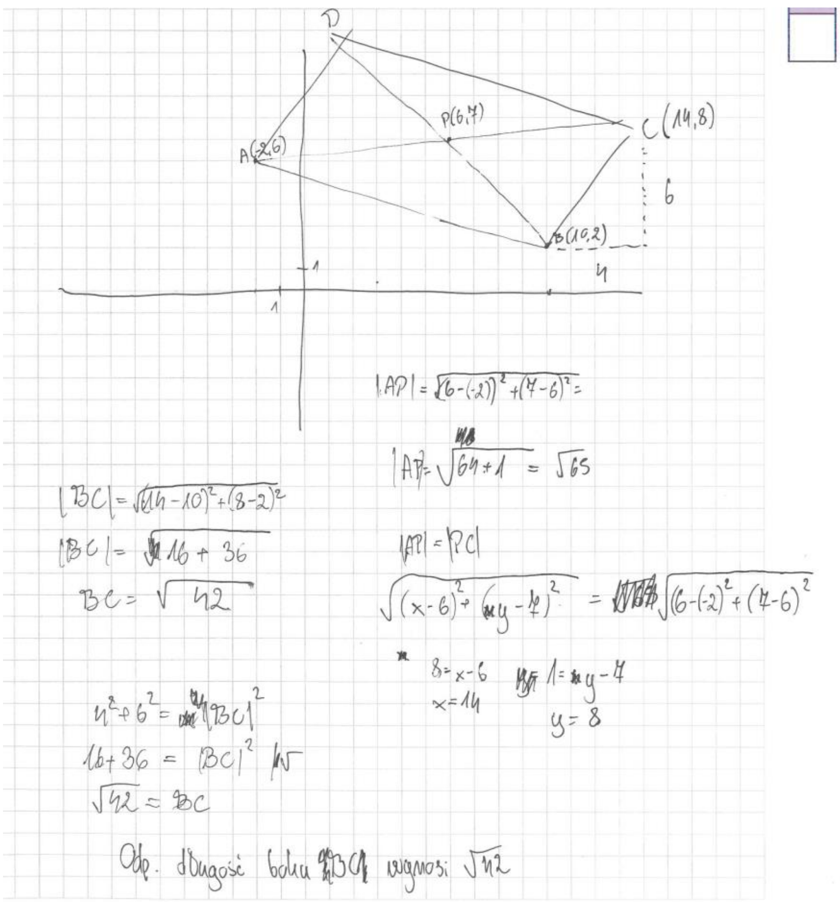
Wśród rozwiązań pojawiały się błędy związane z nieznajomością własności przekątnych w równoległoboku. Zdający w Przykładzie 18. błędnie przyjął, że przekątne w równoległoboku przecinają się pod kątem prostym.

Przykład 18.



Przykład 19. to rozwiązanie zdającego z błędem rachunkowym.

Przykład 19.



Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najlepiej

Tegoroczni maturzyści najlepiej opanowali umiejętności:
1. zliczania obiektów stosując regułę mnożenia
2. mnożenia wielomianów jednej zmiennej i sprawdzania czy dana liczba jest pierwiastkiem wielomianu
3. rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną i przedstawiania zbioru wszystkich rozwiązań nierówności na osi liczbowej
4. rozwiązywania równań wymiernych, w których wielomiany w liczniku i mianowniku zapisane są w postaci iloczynowej
5. wskazywania kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.

Najłatwiejszym zadaniem w arkuszu dla poziomu podstawowego (poziom wykonania – 85%) okazało się **zadanie 27**., w którym zdający obliczali liczbę wszystkich kodów czterocyfrowych utworzonych tylko z cyfr $1,\ 3,\ 6,\ 8$, przy czym w każdym kodzie każda z tych cyfr występuje dokładnie jeden raz.

Niższy o jeden punkt procentowy poziom wykonania (84%) odnotowano w **zadaniu 8.**, w którym zdający mieli określić, czy dany wielomian jest iloczynem dwóch podanych wielomianów i czy dana liczba jest rozwiązaniem równania wielomianowego.

W **zadaniu 1.** zdający musieli rozwiązać nierówność z wartością bezwzględną, stosując interpretację geometryczną i algebraiczną modułu. Poziom wykonania tego zadania był równy 83%.

Zadanie 7. polegało na określeniu liczby rozwiązań równania wymiernego, którego licznik i mianownik były wielomianami w postaciach iloczynowych. Poziom wykonania tego zadania był równy 82%.

Zadanie 25.2. polegało na wskazaniu rysunku, na którym prawidłowo zaznaczono kąt nachylenia najdłuższej przekątnej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego do płaszczyzny podstawy. Poziom wykonania tego zadania był równy 80%.

Zadania o wysokim wskaźniku poziomu wykonania sprawdzały, jak zdający interpretuje informacje przedstawione w tekście matematycznym lub na rysunku oraz jak posługuje się prostymi pojęciami rozwiązania równania i iloczynu wielomianów. Zauważmy, że wymienione wyżej zadania nie mają szerszego kontekstu oraz są zadaniami jedno- lub dwuczynnościowymi.

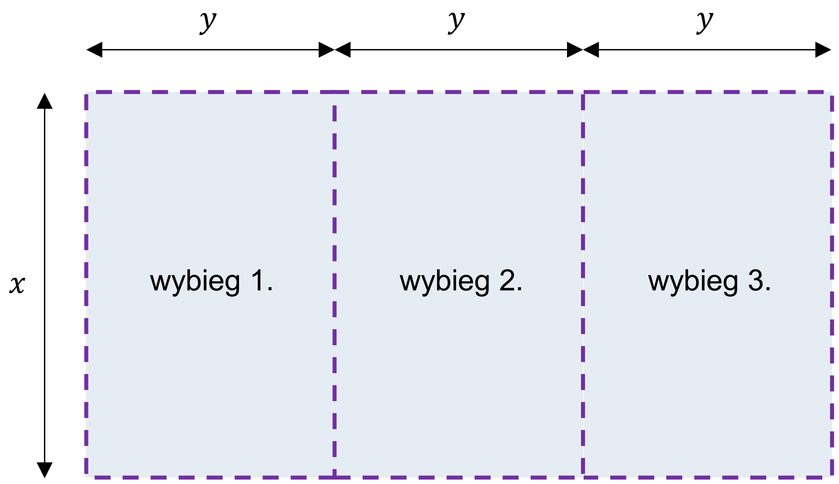
W grupie ośmiu zadań otwartych z tego arkusza znalazło się jedno zadanie, które było łatwe dla zdających (zadanie 9. – poziom wykonania równy 79%). Zadanie 9. polegało na rozwiązaniu równania wielomianowego metodą grupowania wyrazów.
Trzy zadania otwarte były umiarkowanie trudne (zadanie 3., zadanie 14.1. i zadanie 30.). Podkreślić należy, że zdający dobrze poradzili sobie z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa (zadanie 30 – poziom wykonania 64%), a nawet z zadaniem na dowodzenie, w którym należało uzasadnić, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych dodatnich przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2 (zadanie 3 – poziom wykonania równy 56%).

Problem pod lupą - zadanie optymalizacyjne.

W majowym arkuszu egzaminacyjnym dla poziomu podstawowego zadaniem otwartym, które badało umiejętność dobierania i tworzenia modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych z zakresu wykorzystania i interpretowania reprezentacji (III obszar wymagań ogólnych), było **zadanie 31.** Przypomnijmy jego treść:

W schronisku dla zwierząt, na płaskiej powierzchni, należy zbudować ogrodzenie z siatki wydzielające trzy identyczne wybiegi o wspólnych ścianach wewnętrznych.
Podstawą każdego z tych trzech wybiegów jest prostokąt (jak pokazano na rysunku).
Do wykonania tego ogrodzenia należy zużyć 36 metrów bieżących siatki.

Schematyczny rysunek trzech wybiegów (widok z góry).
Linią przerywaną zaznaczono siatkę.



Oblicz wymiary x oraz y jednego wybiegu, przy których suma pól podstaw tych trzech wybiegów będzie największa. W obliczeniach pomiń szerokość wejścia na każdy z wybiegów. Zapisz obliczenia.

Umieszczenie w arkuszu zadania optymalizacyjnego nie mogło być zaskoczeniem dla zdających egzamin maturalny z matematyki. Podstawa programowa matematyki zapowiadała w zakresie wymagań szczegółowych, że zdający „rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową”. Należy także zauważyć, że zadania optymalizacyjne były tematem zadań egzaminacyjnych w kolejnych arkuszach poprzedzających majowy egzamin maturalny. Ponadto podobne zadanie optymalizacyjne zostało umieszczone w *Informatorze maturalnym*.

Zadanie 31. badało umiejętność rozwiązania zadania optymalizacyjnego w sytuacji dającej się opisać funkcją kwadratową i nawiązywało do kontekstu praktycznego. W tym zadaniu należało obliczyć, jakie wymiary powinien mieć pojedynczy wybieg, aby suma pól podstaw trzech wybiegów była największa przy założeniu, że do ogrodzenia wybiegów należy zużyć 36 metrów siatki. Zadania tego typu na poziomie podstawowym wykorzystują własności funkcji kwadratowej. W tym zadaniu zdający musieli zbudować model matematyczny sytuacji opisanej w zadaniu, aby następnie zbadać własności tego modelu. Niestety bez zbudowania wzoru funkcji zdający nie mogli przystąpić do obliczenia (wskazania) argumentu, dla którego funkcja kwadratowa przyjmuje największą wartość oraz do obliczenia wymiarów wybiegu. Niski poziom wykonania tego zadania wynika z faktu, że uczniowie mają trudności z budowaniem poprawnej strategii rozwiązania zadania kilkuetapowego oraz z modelowaniem matematycznym. Brak umiejętności zbudowania wzoru funkcji powodował, że zdający nie podejmowali się rozwiązania tego zadania. Wprowadzenie kontekstu realistycznego mogło być również czynnikiem, który zdecydował o nie najlepszym wyniku zdających w tym zadaniu.

Część zdających właściwie interpretowała treść zadania i prawidłowo budowała model – wyznaczała właściwy wzór funkcji, a następnie określała wymiary pojedynczego wybiegu, dla którego suma pól podstaw trzech wybiegów jest największa (Przykład 20.).

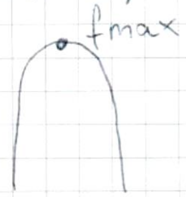
Przykład 20.

Dane: Szukane: $x = ?$ $y = ?$

$4x + 6y = 36\,m$

$4x = 36 - 6y \quad x = 9 - \frac{3}{2}y \qquad D = x \in (0,9)$

$xy + xy + xy = 3xy \qquad y \in (0,6)$



$f(y) = 3y\left(9 - \frac{3}{2}y\right) = 27y - \frac{9}{2}y^2$

fmax → w wierzchołku funkcji

$f(y) = -\frac{9}{2}y^2 + 27y \qquad f(y)\max$ dla $y = 3\,[m]$

$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{27}{(-2\cdot\frac{9}{2})} = 3 \qquad x = 9 - \frac{3}{2}\cdot 3 = 9 - \frac{9}{2} = 4{,}5\,[m]$

Odp.: $y = 3\,m \quad x = 4{,}5\,m$

Ponieważ zadania z tego arkusza rozwiązywali także ci zdający, którzy wybrali matematykę jako przedmiot dodatkowy na egzaminie maturalnym na poziomie rozszerzonym, więc niektórzy ze zdających wprowadzali elementy rachunku różniczkowego do rozwiązania tego zadania (Przykład 21.).

Przykład 21.

$L = 36\ [m]$

$P_1 + P_2 + P_3 = 3P_c = P$

$P = P_{MAX} \iff x, y = ?$

1) $L = 2\cdot 3y + 4\cdot x = 6y + 4x = 36$

$6y = 36 - 4x$

$y = \frac{36-4x}{6}$

2) $P(x) = 3xy = 3x \cdot \frac{36-4x}{6} = x \cdot \frac{36-4x}{2} =$

$= x\cdot(18-2x) = -2x^2 + 18x$

3) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 36-4x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 4x < 36 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 9 \end{cases} \Rightarrow D = (0, 9)$

4) $P(x) = -2x^2 + 18x, \quad D = (0, 9)$

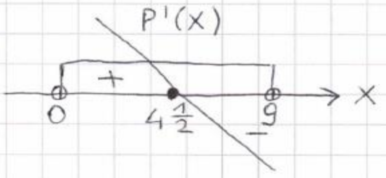
$P'(x) = (-2)\cdot 2x + 18 = -4x + 18$

5) $P'(x) = 0 \iff -4x + 18 = 0$

$-x + \frac{18}{4} = 0$

$x = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}\ [m]$

6)



x	$(0, 4\frac{1}{2})$	$4\frac{1}{2}$	$(4\frac{1}{2}, 9)$
$P'(x)$	$+$	0	$-$
$P(x)$	$\nearrow$	MAX lok	$\searrow$

7) Z monotoniczności $P(x)$ wynika, że maksimum lokalne jest maksimum globalnym funkcji. A zatem

$P(x) = P_{MAX} \iff \left(x = 4\frac{1}{2}\ [m],\ y = \right.$

$\left. = \frac{36 - 4\cdot 4{,}5}{6} = 3\ [m]\right)$

$P(x) = P_{MAX} \iff \left(x = 4\frac{1}{2}\ [m],\ y = 3\ [m]\right)$

Duża grupa zdających badała pole podstawy jednego wybiegu, ponieważ suma pól podstaw trzech wybiegów będzie największa, gdy pole podstawy jednego wybiegu będzie największe (Przykład 22.).

Przykład 22.

$P = x \cdot y$

$4x + 6y = 36$

$y = 6 - \frac{2}{3}x$

zał: $x > 0$ $y > 0$

$6 - \frac{2}{3}x > 0$

$-\frac{2}{3}x > -6$

$x < 9$

$P(x) = x(-\frac{2}{3}x + 6) = -\frac{2}{3}x^2 + 6x$

$-\frac{6}{1} \cdot -\frac{3}{4} = \frac{9}{2}$

$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-\frac{4}{3}} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \leftarrow x$

$y = 6 - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} = 6 - 3 = 3$

$\boxed{\begin{cases} x = 4{,}5 \\ y = 3 \end{cases}}$

odp. Wymiary ~~działki~~ jednego wybiegu x, y wynoszą $4{,}5 \times 3$

Wśród rozwiązań zdających było także sporo błędów na etapie budowania modelu – zapisania właściwego wzoru funkcji. Część zdających pomijała jedną krawędź podstawy (Przykład 23.), a czasem widziała więcej krawędzi niż było w rzeczywistości (Przykład 24.).

Przykład 23.

$3x + 6y = 36$

$x + 2y = 12$

$x = 12 - 2y$

$3 \cdot P_p = 3 \cdot x \cdot y =$

$= 3 \cdot y \cdot (12 - 2y) =$

$= 36y - 6y^2$

$f(y) = 36y - 6y^2$

$p = \frac{-36}{-12} = 3$

$q = \frac{-1296}{-24} = 54$

Największą wartość funkcja będzie miała w wierzchołku $W(p, q)$

$f(y) = 54$

$y = 3$

$x = 12 - 2 \cdot 3$

$x = 6$

odp: $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$

Przykład 24.

~~$2x+6y=36 \;/:2$~~ $\qquad$ ~~$3(x+y)$~~ $\quad 3\cdot(2x+2y)=36$

~~$x+3y=18$~~ $\qquad \boxed{D: x\in(0,6)} \qquad 6x+6y=36 \;/:6$

$x+y=6$

$x\cdot 3y = P_c \qquad\qquad y=6-x$

f_{max} w $p=\frac{-18}{-6}=3 \qquad x=3\in D$

$x\cdot 3(6-x)=x\cdot(18-3x)=-3x^2+18x$ $\qquad$ jeden wybieg

$y=6-3=3 \qquad 6\cdot 3+6\cdot 3=36 \qquad 2x+2y=6+6=12$

$18+18=36$ ✓

W tego typu zadaniach zwykle mamy do czynienia z pewną liczbą prac, w których zdający jedynie obliczają wartość pola dla wybranych par liczb x oraz y i na tej podstawie wskazują największą wartość pola (Przykład 25.).

Przykład 25.

$36=4x+6y$

$x=4 \qquad x=5 \qquad x=3$

$y=3{,}3 \qquad y=2{,}6 \qquad y=4$

$\underline{\underline{4\cdot 3{,}3=13{,}2}} \qquad 5\cdot 2{,}6=13 \qquad 3\cdot 4=12$

Największy wybieg otrzymamy przy $x=4$, $y=3{,}3$.

Analiza jakościowa zadań – poziom rozszerzony

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najsłabiej

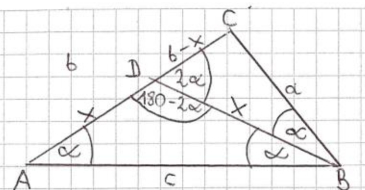
Na **poziomie rozszerzonym**, podobnie jak to było w roku ubiegłym, najwięcej trudności przysporzyły maturzystom zadania badające umiejętności z obszaru *Rozumowanie i argumentacja*.
Najtrudniejszym zadaniem tegorocznego egzaminu okazało się **zadanie 8.**, w którym należało przeprowadzić dowód geometryczny. Poziom wykonania tego zadania to 15%. Niewiele wyższy poziom wykonania (18%) miały jeszcze trzy inne zadania arkusza: **zadanie 6.** – z kombinatoryki, **zadanie 9.** – z planimetrii i **zadanie 11.** – z geometrii analitycznej.

Rozwiązujący **zadanie 8.** musieli udowodnić, że jeśli trójkąt ABC nie jest równoramienny i kąt przy wierzchołku B tego trójkąta jest dwa razy większy od kąta przy wierzchołku A, to między długościami boków tego trójkąta zachodzi związek $|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$.

Sposoby rozwiązania tego zadania można podzielić na dwie klasy. Jedną klasę stanowią rozwiązania, w których zdający stosują jedynie aparat planimetrii bez angażowania trygonometrii; drugą klasę stanowią rozwiązania, w których maturzyści stosują trygonometrię – tutaj: twierdzenie cosinusów i twierdzenie sinusów.

Przykład 1R przedstawia kompletne rozwiązanie z pierwszej klasy rozwiązań.
Zdający poprowadził dwusieczną kąta ABC i wykorzystał założenie o tym, że kąt ABC jest dwa razy większy od kąta BAC. Narysowanie tej dwusiecznej jest najistotniejszym elementem tego sposobu rozwiązania. Maturzysta uzyskał w ten sposób trójkąt równoramienny ABD oraz trójkąt BDC podobny do trójkąta ABC, co wprost wynika z cechy kąt-kąt-kąt podobieństwa trójkątów. Następnie zastosował twierdzenie o dwusiecznej oraz skorzystał z podobieństwa trójkątów i zapisał wynikające stąd proporcje: $\frac{b-x}{a} = \frac{x}{c}$ oraz $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$. Dalej wyrugował z tych dwóch związków wielkość x, a otrzymaną zależność $\frac{b}{a} - \frac{c}{b} = \frac{a}{b}$ przekształcił do postaci $b^2 = a^2 + ac$.

Przykład 1R.



BD – dwusieczna kąta ABC

kąty BAD i ABD są równe, więc trójkąt ABD jest równoramienny

trójkąty ABC i DBC są podobne (kkk)

$\frac{b-x}{a} = \frac{x}{c}$ (tw. o dwusiecznej) $\Rightarrow \frac{b}{a} - \frac{x}{a} = \frac{x}{c}$

$\frac{a}{x} = \frac{b}{c} \Rightarrow x = \frac{ac}{b}$

$$\frac{b}{a} - \frac{c}{b} = \frac{\cancel{a}}{b}$$

$$\frac{b}{a} - \frac{c}{b} = \frac{a}{b} \quad / \cdot ab$$

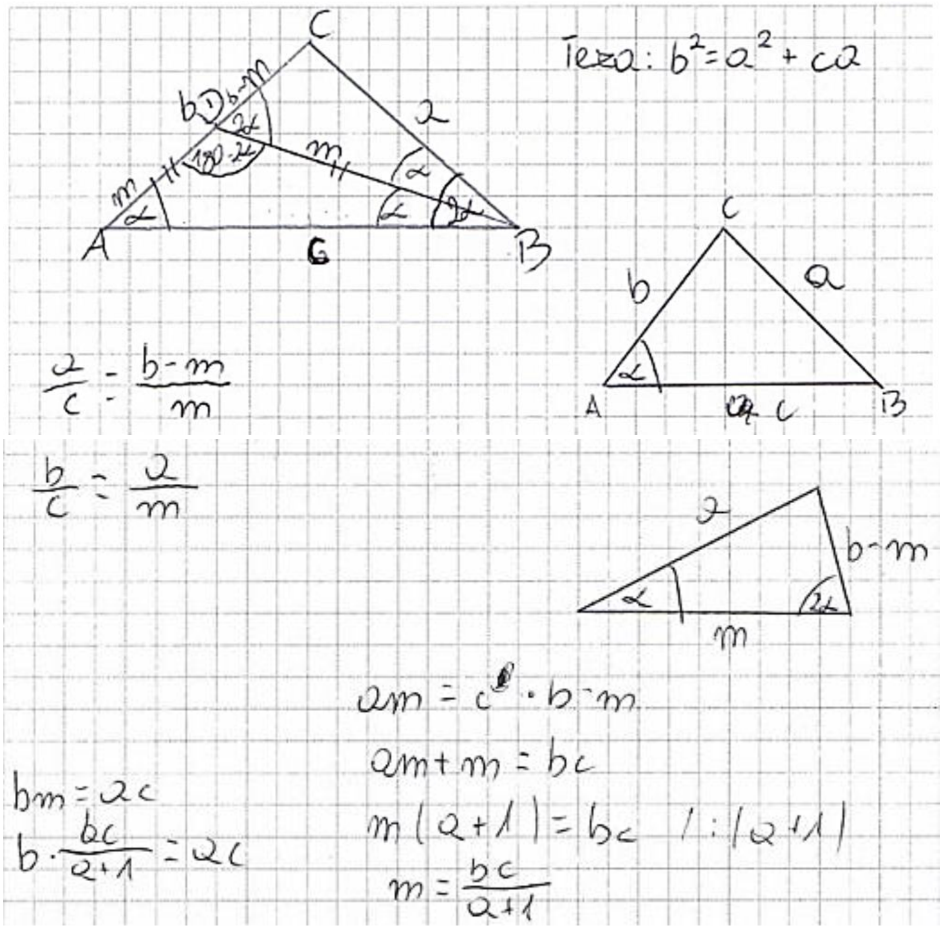
$$b^2 - \cancel{\ } ac = a^2$$

$$b^2 = a^2 + ac$$

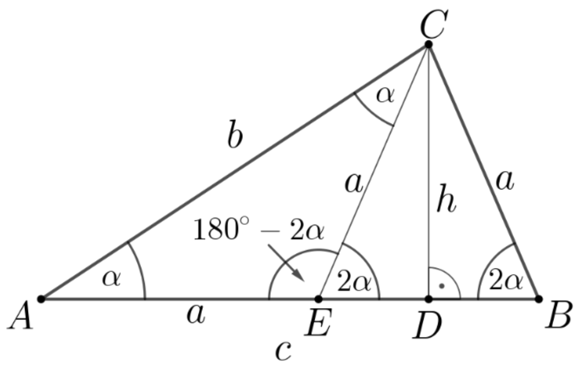
CKD

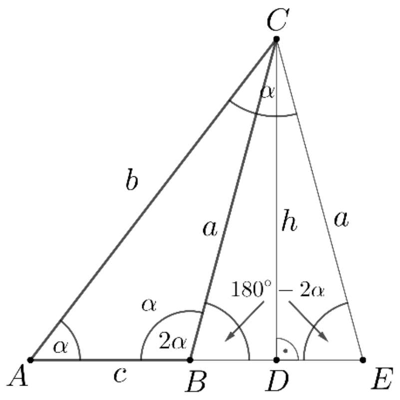
Zdający, którzy rozwiązywali zadanie sposobem zaprezentowanym w Przykładzie 1R, często popełniali błędy przy przekształceniach algebraicznych (Przykład 2R).
Autor tego rozwiązania zapisał wprawdzie obydwa związki wynikające z twierdzenia o dwusiecznej i podobieństwa trójkątów, ale przekształcając pierwszy z nich $\frac{a}{c} = \frac{b-m}{m}$, popełnił błąd i nie postawił nawiasu wokół różnicy $(b-m)$. Wskutek popełnionego błędu uzyskał niepoprawną zależność $m = \frac{bc}{a+1}$ i nie otrzymał tezy.

Przykład 2R.



Inny pomysł, który się pojawiał w pracach zdających i pozwalał na przeprowadzenie tego dowodu bez angażowania trygonometrii, polegał na poprowadzeniu wysokości CD trójkąta ABC i symetrycznym odbiciu powstałego w ten sposób trójkąta prostokątnego BCD względem prostej CD. W ten sposób otrzymujemy trójkąt prostokątny ECD oraz dwa trójkąty równoramienne BCE i AEC. Dalsze rozumowanie wymagało rozpatrzenia dwóch przypadków: gdy punkt D leży na boku AB oraz gdy punkt D leży na przedłużeniu boku AB (zobacz rysunki).





W pierwszym z przypadków należało zauważyć, że $|BC| = |EC| = |AE| = a$ oraz $|BD| = |ED| = \frac{c-a}{2}$, a następnie zapisać dwa równania wynikające z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów BCD i ACD: $h^2 = a^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2$ oraz $h^2 = b^2 - \left(a + \frac{c-a}{2}\right)^2$.

Stąd uzyskało się zależność między wielkościami a, b i c:

$$a^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2 = b^2 - \left(a + \frac{c-a}{2}\right)^2$$

z której po przekształceniach uzyskiwało się tezę:

$$b^2 = a^2 + \left(a + \frac{c-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2$$

$$b^2 = a^2 + \left(\frac{c+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2$$

$$b^2 = a^2 + \left(\frac{c+a}{2} - \frac{c-a}{2}\right)\left(\frac{c+a}{2} + \frac{c-a}{2}\right)$$

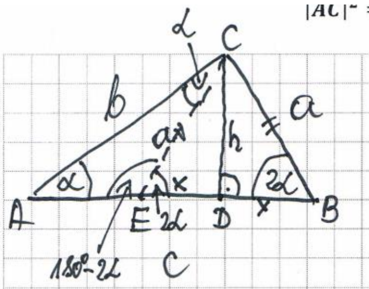
$$b^2 = a^2 + ac$$

Rozumowanie w drugim przypadku jest bardzo podobne do tego, co w pierwszym przypadku – różnica polega na tym, że tym razem długości odcinków BD i ED są równe $|BD| = |ED| = \frac{a-c}{2}$.

Maturzyści, którzy wybrali ten sposób rozwiązania, często nie dostrzegali dwóch możliwych położeń punktu D lub nie komentowali w żaden sposób kwestii drugiego przypadku (jak w przedstawionym Przykładzie 3R) jak również wykazywali duże braki w opanowaniu elementarnych przekształceń wyrażeń algebraicznych (Przykład 4R).

Przykład 3R.

$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$



ΔEBC jest równoramienny $|EC|=|BC|$

$|EC|=a$

$h^2=a^2-x^2$

$h^2=b^2-(c-x)^2$ $\Rightarrow a^2-x^2=b^2-(c-x)^2$

$|\sphericalangle ECA| = 180^\circ - \alpha - (180^\circ-2\alpha) = \alpha$

$|AE| = c-2x$

$|EC|=|EA| \Rightarrow a=c-2x$

$2x=c-a$

$x=\frac{c-a}{2}$

$a^2-x^2=b^2-(c^2-2cx+x^2)$

$a^2-\cancel{x^2}=b^2-c^2+2cx-\cancel{x^2}$

$a^2=b^2-c^2+2cx$

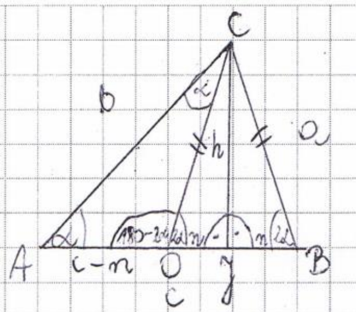
$a^2=b^2-c^2+\cancel{2}c\cdot\frac{c-a}{\cancel{2}}$

$a^2=b^2-\cancel{c^2}+\cancel{c^2}-ac$

$a^2+ac=b^2$

$|BC|^2+|AB|\cdot|BC|=|AC|^2$

Przykład 4R.



Warunek: $b^2=a^2+c\cdot a$

$a=c-m$

$h^2+m^2=a^2$

$a^2+(c-m)^2=b^2$

$a^2+c^2-m^2=b^2$

Cechą wspólną obydwu zaprezentowanych sposobów rozwiązania zadania 8. jest to, że dorysowanie odpowiedniego odcinka lub odcinków (w pierwszym sposobie była to dwusieczna kąta ABC, w drugim – wysokość CD i odcinek CE) – umożliwia przeprowadzenie pełnego dowodu przy wykorzystaniu umiejętności, które nie wykraczają poza zakres podstawowy.

Przeważająca część zdających rozwiązywała zadanie 8. z wykorzystaniem trygonometrii. Najliczniejszą grupę tej klasy rozwiązań stanowiły prace, w których maturzyści wykorzystywali jednocześnie twierdzenie sinusów oraz twierdzenie cosinusów. Zastosowanie twierdzenia sinusów prowadziło do związku $\frac{b}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$ (gdzie a i b oznaczają długości boków – odpowiednio – BC i AC trójkąta ABC, natomiast α i 2α – miary kątów leżących naprzeciw tych boków). Stąd, po zastosowaniu wzoru na sinus podwojonego kąta, wyznaczano cosinus kąta α w zależności od a i b. Następnie stosowano twierdzenie cosinusów dla kąta α albo dla kąta 2α, otrzymując równość $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ lub $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos 2\alpha$.

Wstawienie do pierwszej z tych równości wstawić w miejsce $\cos\alpha$ ułamka $\frac{b}{2a}$ pozwalało otrzymać związek $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \frac{b}{2a}$, z którego poprzez przekształcenia otrzymywano tezę.

Wykorzystanie równości $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos 2\alpha$ wymagało wcześniejszego zastosowania wzoru na cosinus podwojonego kąta i zapisaniu tej równości w postaci $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot (2\cos^2\alpha - 1)$. Wówczas wstawienie w miejsce $\cos\alpha$ wyrażenia $\frac{b}{2a}$ prowadziło do związku

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \left(2\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - 1\right)$$

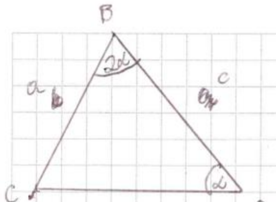
z którego po przekształceniach otrzymywano tezę.

Przykład 5R to ilustracja opisanego powyżej sposobu rozwiązania, w którym maturzysta zapisał obie równości wynikające z twierdzenia cosinusów (dla kąta α i dla kąta 2α), ale w toku rozwiązania wykorzystał jedynie tę pierwszą.

Przykład 5R.

$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$

$b^2 = a^2 + c \cdot a$



$\frac{b}{\sin(2\alpha)} = \frac{a}{\sin\alpha}$ $\sin\alpha \geq 0$ $\sin\alpha \neq 0$

$\frac{b}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$

$b = 2\cos\alpha\, a$ $2\cos\alpha = \frac{b}{a}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(2\alpha)$ $a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha$

$b^2 = \frac{a^3 - c^2a}{(a-c)}$ $a^2 = c^2 + b^2 - \frac{b}{a} \cdot cb$

$b^2 = \frac{a(a^2 - c^2)}{(a-c)}$ $a^2 = c^2 + b^2 - \frac{cb^2}{a}$

$a^3 = c^2a + b^2a - cb^2$

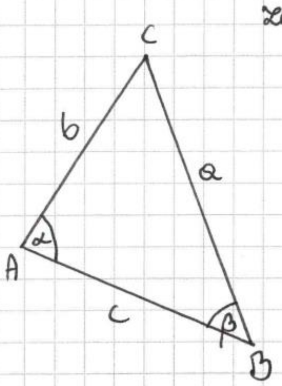
$b^2 = \frac{a(\cancel{a-c})(a+c)}{(\cancel{a-c})}$ $\quad a^3 = c^2a + b^2(a-c)$

$b^2 = a^2 + ac = a^2 + ca$

$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$ CKD

Przykład 6R to z kolei ilustracja opisanego powyżej sposobu rozwiązania, w którym maturzysta zapisał równość wynikającą z twierdzenia cosinusów dla kąta 2α.

Przykład 6R.



zał: $|AC| \neq |AB| \neq |BC|$

$\measuredangle ABC = 2 \cdot \measuredangle BAC$ $\quad \frac{\measuredangle ABC}{\measuredangle BAC} = 2$

niech $\measuredangle ABC = \beta$

$\measuredangle BAC = \alpha$

$\beta = 2\alpha$

niech $|AB| = c$

$|BC| = a$

$|AC| = b$

$\alpha, \beta \in (0, 180^\circ)$

$\sin\alpha, \sin\beta \neq 0$

$a, b, c > 0$

z tw. sinusów

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin 2\alpha}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\alpha\cos\alpha}$

$a = \frac{b}{2\cos\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{b}{2a}$

z tw. cosinusów

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos\beta$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos 2\alpha$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac(2\cos^2\alpha - 1)$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac(2 \cdot \frac{b^2}{4a^2} - 1)$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac(\frac{b^2}{2a^2} - 1)$

$b^2 = c^2 + a^2 - \cancel{2}ac \cdot \frac{b^2}{\cancel{2}a^2} + 2ac$

$b^2 = c^2 + a^2 - \frac{c \cdot b^2}{a} + 2ac$

$b^2 + \frac{c \cdot b^2}{a} = (c+a)^2$

$b^2(1 + \frac{c}{a}) = (c+a)^2$

$b^2 \cdot \frac{1}{a}(a+c) = (a+c)^2 \quad /:(a+c)$ bo $a, c > 0$

$b^2 \cdot \frac{1}{a} = a+c \quad /\cdot a$ bo $a > 0$

$b^2 = a^2 + ac$

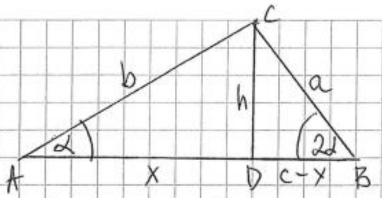
$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$

cnd

Użycie trygonometrii w niektórych rozwiązaniach ograniczało się do zastosowania definicji tangensa kąta ostrego i wzoru na tangens podwojonego kąta. Taką sytuację możemy zaobserwować w Przykładzie 7R.

Maturzysta poprowadził wysokość CD trójkąta ABC i otrzymał w ten sposób dwa trójkąty prostokątne ADC i BDC. W pierwszym z nich wyznaczył $\operatorname{tg}\alpha$, w drugim wyznaczył $\operatorname{tg}2\alpha$. Z otrzymanych równości i ze wzoru na tangens podwojonego kąta wyznaczył h^2 (kwadrat wysokości CD) w zależności od długości c boku AB oraz długości x odcinka AD. W dalszej części dowodu zapisał równości wynikające z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do każdego z trójkątów ADC i BDC. Z otrzymanych zależności, wyprowadził tezę. Należy tu podkreślić, że autor tego rozwiązania, podobnie jak to było w Przykładach 3R i 4R, nie rozpatrzył przypadku, gdy spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka C leży poza bokiem AB. Wtedy kąt ostry przy wierzchołku B w trójkącie prostokątnym BDC jest równy $(180° - 2\alpha)$, a tangens tego kąta jest równy $\operatorname{tg}(180° - 2\alpha) = \frac{h}{x-c}$ (przy oznaczeniach autora).

Przykład 7R.



△ ADC: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{x}$

△ BOD: ~~tgα~~ $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{h}{c-x}$

$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\frac{h}{c-x} = \frac{2\frac{h}{x}}{1-\left(\frac{h}{x}\right)^2}$

$1-\left(\frac{h}{x}\right)^2 = \frac{2}{x}(c-x)$

$x^2 - h^2 = 2x(c-x)$

$3x^2 - h^2 = 2xc$ $\cancel{\Rightarrow h^2 = 2x}$

$h^2 = 3x^2 - 2xc$

$b^2 = x^2 + h^2 \qquad a^2 = (c-x)^2 + h^2$

$b^2 = x^2 + 3x^2 - 2xc \quad / \quad a^2 = (c-x)^2 + 3x^2 - 2xc$

$b^2 = 4x^2 - 2xc \qquad a^2 = c^2 \cancel{+2cx} + x^2 + 3x^2 - 2xc$

$b^2 = \cancel{2x(c-2x)} \qquad a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + 3x^2 - 2xc$

$b^2 = 2x(2x-c) \qquad a^2 = c^2 - 4cx + 4x^2$

$a^2 = 4x^2 - 2xc - 2xc + c^2$

$a^2 = b^2 - 2xc + c^2$

$b^2 = \cancel{a^2 + 2xc + c^2}$

$b^2 = a^2 + c(2x-c)$

$2x(2x-c)$

$\cancel{2x(c-2x)} = a^2 + c(2x-c)$

$\cancel{a^2 = 2x(c-2x) - c(2x-c)}$

$a^2 = 2x(2x-c) - c(2x-c)$

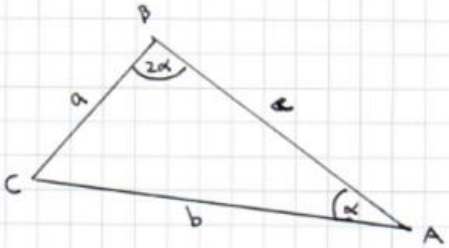
$a^2 = (2x-c)^2$

$a = 2x - c$

$b^2 = a^2 + c \cdot a$

Wystąpiły, choć bardzo nieliczne, rozwiązania, w których zdający w znaczący sposób wykorzystywali trygonometrię, nie ograniczając się tylko do zapisania równości wynikających ze wzoru cosinusów lub wzoru sinusów.
W kolejnym Przykładzie 8R maturzysta wykorzystał twierdzenie sinusów dla wszystkich trzech kątów trójkąta ABC, otrzymując zależności $\frac{b}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$ oraz $\frac{c}{\sin(180°-3\alpha)} = \frac{a}{\sin\alpha}$. Z pierwszej z nich, po wcześniejszym zastosowaniu wzoru na sinus podwojonego kąta, otrzymał równość $b = 2\cos\alpha \cdot a$, natomiast z drugiej otrzymał (po zastosowaniu wzoru redukcyjnego i wzoru na sinus sumy kątów) równość $c = (2\cos^2\alpha + \cos 2\alpha) \cdot a$. W ten sposób uzależnił wielkości b i c od wielkości a, $\cos\alpha$ oraz $\cos 2\alpha$. Otrzymane równości wykorzystał w kolejnym kroku swojego dowodu. Przekształcił każdą ze stron dowodzonej równości do tej samej postaci $4\cos^2\alpha \cdot a^2$, kończąc w ten sposób dowód. Analizując to rozwiązanie, można zauważyć, że autor miał obmyśloną dokładną strategię przeprowadzenia dowodu, którą krok po kroku zrealizował. Podkreślić też należy, że wprowadzając czytelne oznaczenia w postaci znaków: ①, ②, ③, ④, maturzysta zadbał o precyzję i jednoznaczność przeprowadzonego dowodu. Taka sytuacja nie jest powszechna – tylko niewielki odsetek zdających dba o precyzyjne i jednoznaczne zapisanie rozwiązania tam, gdzie jest to konieczne.

Przykład 8R.



Założenia
$|\sphericalangle ABC| = 2|\sphericalangle BAC|$, czyli
$|\sphericalangle ABC| = 2\alpha$, $|\sphericalangle BAC| = \alpha$
$|AB| \neq |AC| \neq |BC|$

Teza
$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB| \cdot |BC|$

$(b^2 = a^2 + c \cdot a)$

Dowód
niech $|AB| = c$, $|BC| = a$ oraz $|AC| = b$ $(a, b, c > 0)$

① z tw. sinusów

$\frac{b}{\sin 2\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$

$\sin\alpha\, b = 2\sin\alpha\cos\alpha\, a \quad \backslash : \sin\alpha$

$b = 2\cos\alpha\, a$

② z tw. sinusów

$$\frac{c}{\sin(180^\circ-3\alpha)}=\frac{a}{\sin\alpha}$$

$$c=\frac{a(\sin 3\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{a(\sin(2\alpha+\alpha))}{\sin\alpha}=\frac{a(\sin2\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos2\alpha)}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{a(2\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos2\alpha)}{\sin\alpha}=(2\cos^2\alpha+\cos2\alpha)a$$

③ $P=|BC|^2+|AB|\cdot|BC|=a^2+a\cdot c=a^2+a\cdot\overbrace{(2\cos^2\alpha+\cos2\alpha)a}^{z\ ②}=$

$=a^2+a^2(2\cos^2\alpha+2\cos^2\alpha-1)=a^2(1+2\cos^2\alpha+2\cos^2\alpha-1)$

$=a^2\cdot4\cos^2\alpha$

④ $L=|AC|^2=b^2=(\overbrace{2\cos\alpha\, a}^{z\ ①})^2=4\cos^2\alpha\cdot a^2$

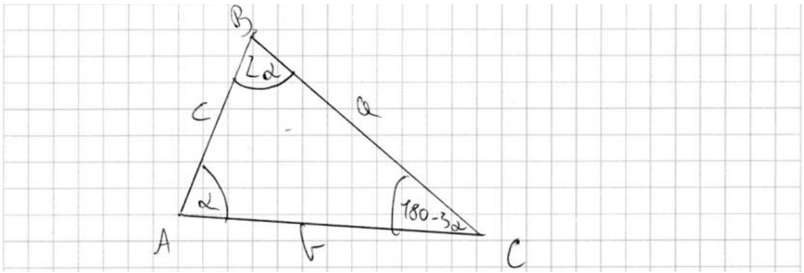
⑤ z ③ i ④ mamy $L=P$,

$\uparrow$

$(a^2\cdot4\cos^2\alpha=a^2\cdot4\cos^2\alpha)$

Kolejne trzy przykłady ilustrują najczęściej występującą sytuację wśród tych zdających, którzy podjęli próbę rozwiązania tego zadania, ale nie pokonali zasadniczych trudności tego dowodu, a więc nie zapisali zależności między wielkościami a, b i c. Po wyznaczeniu kątów trójkąta ABC, zapisywali tylko równości wynikające z twierdzenia cosinusów (Przykład 9R i Przykład 10R), ewentualnie jeszcze równość wynikającą z twierdzenia sinusów (Przykład 11R). Duża część zdających, która podjęła się tego zadania, albo na tym poprzestawała, albo w dalszej części swojego rozwiązania podejmowała nieudane próby przekształcania tych zależności w celu otrzymania tezy.

Przykład 9R.



$b^2=a^2+ca$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos2\alpha$

$a^2=c^2+b^2-2cb\cos\alpha$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos(180-3\alpha)=a^2+b^2+2ab\cos3\alpha$

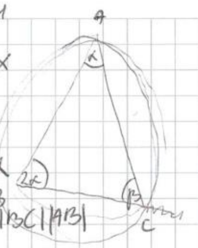
$b^2=c^2+b^2-2cb\cos\alpha+a^2+b^2+2ab\cos3\alpha-(c^2+b^2-2cb\cos\alpha)(a^2+b^2+2ab\cos3\alpha)=2b^2+c^2+a^2-2cb\cos\alpha+2ab\cos3\alpha-$

Przykład 10R.

$$2\cos^2\alpha-1$$

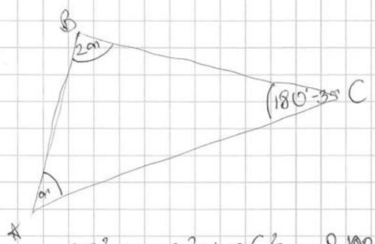
$$\begin{cases} |AC|^2 = |BC|^2+|AB|^2-2|BC||AB|\cdot\cos 2\alpha \\ |BC|^2 = |CA|^2+|AB|^2-2|CA||AB|\cdot\cos\alpha \\ |BA|^2 = |CB|^2+|CA|^2+2|CB||CA|\cdot\cos 3\alpha \end{cases}$$

$$|AC|^2 = |BC|^2+|AB|^2-4|BC||AB|\cdot\cos^2\alpha-2|BC||AB|$$



$\beta = 180^\circ - 3\alpha$

Przykład 11R.



$\cos(180^\circ-3\alpha) = \cos 3\alpha$

$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) =$

$\cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\cdot\sin 2\alpha$

$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R$

$\frac{BC}{2R} = \sin\alpha$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos 2\alpha$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha$

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC\cdot AC\cdot\cos 3\alpha$

Do zadań, z którymi zdający poradzili sobie bardzo słabo na tegorocznym egzaminie, należą także: **zadanie 6**., **zadanie 9.** i **zadanie 11.** Poziom wykonania każdego z tych zadań jest równy 18%. Wszystkie te zadania badają umiejętności z obszaru *Rozumowanie i argumentacja*.

Zadanie 6. dotyczyło kombinatoryki. W tym zadaniu należało zliczyć, ile jest liczb naturalnych o następującej własności: w zapisie dziesiętnym nie powtarza się jakakolwiek cyfra oraz dokładnie trzy cyfry są nieparzyste i dokładnie dwie cyfry są parzyste. Rozwiązując to zadanie, musimy najpierw wywnioskować, że rozważane liczby są pięciocyfrowe. Tej informacji nie ma wprost zapisanej w treści zadania, co dla niektórych maturzystów stanowiło trudność, której nie pokonali. Ustalenie tego faktu to warunek konieczny rozwiązania omawianego zadania.

Można wyróżnić trzy sposoby rozwiązania tego zadania. Omówimy po kolei każdy z nich, ilustrując je przykładami w pełni poprawnych rozwiązań oraz rozwiązań częściowo poprawnych.

Pierwszy sposób rozwiązania, który wybierała najliczniejsza grupa maturzystów, polegał na rozpatrzeniu dwóch przypadków ze względu na to, czy pierwsza cyfra (licząc od lewej strony) rozpatrywanej liczby jest parzysta czy nieparzysta. W każdym z tych przypadków należało obliczyć, ile jest wszystkich tego typu liczb, a następnie, wykorzystując regułę dodawania, zsumować otrzymane liczby. Ten sposób rozwiązania ilustruje Przykład 12R.

Zdający najpierw zapisał informacje zawarte w treści zadania, następnie zapisał, że cyfra 0 nie jest na początku. To właśnie cyfra zero powoduje, że w tym sposobie rozwiązania należy, oddzielnie zliczyć liczby, które zaczynają się cyfrą parzystą (a zero taką cyfrą jest) i oddzielnie zliczyć te liczby, które zaczynają się cyfrą nieparzystą. Autor tego rozwiązania takie właśnie dwa przypadki rozważył, wyjaśniając przy tym znaczenie wprowadzonych przez siebie symboli. W pierwszym przypadku zapisał iloczyn $4 \cdot \binom{4}{1} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$, objaśniając prawie wszystkie czynniki występujące w tym iloczynie. Podobnie postąpił w drugim przypadku. Tu także żaden czynnik poprawnie zapisanego iloczynu $5 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3$ nie został bez objaśnienia. Oba iloczyny 3840 i 7200 zostały poprawnie obliczone; poprawnie też została obliczona suma $3840 + 7200$. Liczba 11040 to poprawny wynik.

Przykład 12R.

• _ _ _ _ _ • trzy cyfry nieparzyste • dwie cyfry parzyste

• wszystkie cyfry różne • 0 nie jest na początku

Rozważmy takie sytuacje (p-parzysta; n-nieparzysta)

1° p _ _ _ _

2° n _ _ _ _

Sytuacja 1° ma opcji $\underbrace{4}_{\text{pierwsza parzysta}} \cdot \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{druga parzysta}} \cdot 4 \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3}_{\text{trzy nieparzyste}} = 4^4 \cdot 15 = 3840$

Sytuacja 2° ma opcji $\underbrace{5}_{\text{pierwsza nieparzysta}} \cdot \underbrace{\binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 4}_{\text{dwie parzyste}} \cdot \underbrace{4 \cdot 3}_{\text{dwie pozostałe nieparzyste}} = 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3 \cdot 6 =$

$= 7200$

W sumie takich liczb jest więc 11040

Bardzo częstym błędem popełnianym przez zdających, którzy obrali ten sposób rozwiązania, było niepoprawne przeanalizowanie jednego z dwóch rozpatrywanych przypadków. Przykład 13R przedstawia częściowo poprawne rozwiązanie.
Tu także zdający rozważa dwa przypadki. W pierwszym przypadku, zatytułowanym przez zdającego: *Na początku jest liczba nie parzysta*, rozpatruje on liczby zaczynające się cyfrą nieparzystą. Ten przypadek zdający przeanalizował poprawnie, choć objaśnił tylko, co oznaczają drugi i trzeci czynnik zapisanego iloczynu $5 \cdot \binom{4}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4$. Sam iloczyn też zdający obliczył poprawnie. Tytuł, jaki nadał zdający drugiemu z rozpatrywanych przypadków: *Na początku jest liczba nieparzysta*, jest prawdopodobnie zwykłym przeoczeniem pisarskim (zamiast wyrazu parzysta jest po raz drugi zapisane *nieparzysta*). Tak można sądzić na podstawie pierwszego czynnika iloczynu $4 \cdot \binom{4}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4$. Niestety dalej autor rozwiązania pisze $\binom{4}{2}$ i tym razem nie wyjaśnia, co oznaczają poszczególne czynniki. Jeśli ten symbol Newtona oznacza wybór dwóch miejsc spośród czterech (od

drugiego do czwartego), to być może jednak są to miejsca przeznaczone dla dwóch cyfr parzystych, a wtedy zdający popełnia błąd w rozumowaniu. Równie dobrze symbol ten może oznaczać wybór dwóch cyfr spośród czterech. Tak, czy inaczej w tym miejscu rozwiązania jest błąd i nie jest to zwykły błąd rachunkowy.

Przykład 13R.

3-n i 2p $\qquad n \in (1,3,5,7,9)$

$p \in (0,2,4,6,8)$

_ _ _ _ _

1/ Na początku jest liczba nie parzysta

$\underline{5} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 7200$

możliwych miejsc dla liczby nieparzystej

możliwe liczby nieparzyste

$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 1}$

2/ Na początku jest liczba nieparzysta

$\underline{4} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 1440$

liczb

Razem $1440 + 7200 = 8640$

Przykład 14R także ilustruje ten sam sposób rozwiązania.
Wynik, jaki uzyskał ten maturzysta w każdym z rozpatrywanych przypadków, jest błędny. Tym razem jednak możemy dokładnie zdiagnozować błąd, jaki tu występuje. We wstępnej ocenie, zapisany w pierwszym przypadku iloczyn $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3$ i znajdujące się pod nim objaśnienia wydają się poprawne. Pierwsza zapisana liczba 4 to liczba sposobów ustalenia pierwszej cyfry rozpatrywanej liczby, gdy cyfra ta jest parzysta. Drugi czynnik (również 4) oznacza liczbę wyborów jednego z pozostałych czterech miejsc dla drugiej cyfry parzystej. Ten czynnik też jest poprawny. Trzeci czynnik tego iloczynu (ponownie 4) oznacza liczbę sposobów, na jakie można wybrać drugą cyfrę parzystą. Tak rzeczywiście jest, gdyż po zapisaniu na pierwszej pozycji pierwszej – różnej od zera – cyfry parzystej mamy do dyspozycji cztery pozostałe cyfry parzyste, z których jedną zapiszemy na jednym z wybranych miejsc od drugiego do piątego. Następny czynnik, jakim jest liczba 3, to liczba wyborów jednego spośród trzech pozostałych wolnych miejsc. Kolejny czynnik 5, to liczba wyborów pierwszej cyfry nieparzystej spośród pięciu dostępnych. W ten sam sposób maturzysta objaśnia kolejne czynniki, które łączy w pary według zasady: liczba wyborów miejsca razy liczba wyborów cyfry, którą na to wybrane miejsce stawia. Niestety popełnia on błąd, zapisując iloczyn wszystkich tych czynników, gdyż uwzględnia w ten sposób zarówno

kolejność wybieranych pojedynczo miejsc dla cyfr nieparzystych, jak i kolejność wybieranych cyfr nieparzystych, a przecież kolejność, w jakiej wybieramy miejsca dla tych trzech cyfr nieparzystych, nie ma znaczenia. Te miejsca są ustalone. Zatem zaznaczone kolorem czerwonym w iloczynie $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3$ czynniki 3, 2 i 1 nie powinny się pojawić. Wtedy iloczyn byłby równy $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 3840$. Dokładnie ten sam błąd kombinatoryczny maturzysta popełnił w drugim z rozpatrywanych przypadków. Błąd ten, który można byłoby nazwać błędem multiplikacji, pojawiał się stosunkowo często – nawet wśród maturzystów, którzy osiągnęli dobry wynik ogólny egzaminu. Niekiedy nie jest on tak łatwy do stwierdzenia (zobacz Przykład 15R).

Przykład 14R.

p – parzyste , u – nieparzyste

I p _ _ _ _

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \underbrace{3 \cdot 5} \cdot \underbrace{2 \cdot 4} \cdot \underbrace{1 \cdot 3} = 23040$

pierwsza p

druga p

miejsce dla drugiej p

miejsce dla ~~[illegible]~~ pierwszej u i pierwsza u

miejsce dla drugiej u i druga u

miejsce dla trzeciej u i trzecia u

II u _ _ _ _

$5 \cdot \underbrace{4 \cdot 4} \cdot \underbrace{3 \cdot 3} \cdot \underbrace{2 \cdot 5} \cdot \underbrace{1 \cdot 4} = 28800$

pierwsza u

miejsce i druga u

miejsce i trzecia u

miejsce i pierwsza p

miejsce i druga p

$23040 + 28800 = 51840$

Przykład 15R – tutaj sposób rozwiązania jest ten sam, co poprzednio. Maturzysta rozpatrzył dwa przypadki. W pierwszym – gdy pierwsza cyfra jest parzysta – zapisał przykładową cyfrę 2, wyjaśniając pod spodem, że na tym miejscu można postawić jedną z cyfr: 2, 4, 6, 8. Dalsze objaśnienia są bardzo skrótowe. Istotny jest natomiast zapisany w tym przypadku poprawny iloczyn i jego wynik 3840. W drugim rozpatrywanym przez siebie przypadku maturzysta zapisał niepoprawny iloczyn $5 \cdot \binom{4}{1} \cdot 4 \cdot \binom{3}{1} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4$. Jest on niepoprawny, a z objaśnień, jakie zdający zapisał nad tym iloczynem, wynika, że popełnił błąd multiplikacji – uwzględnił niepotrzebnie kolejność losowanych pojedynczo miejsc dla drugiej i trzeciej liczby nieparzystej. Błędny wynik jest zatem dwukrotnie większy od wyniku poprawnego.

Przykład 15R.

3 niepan., 2 parzyste → 5 cyfrowa

(1) parzysta liczba z przodu

2 _ _ _ _

0, 4, 6, 8 1, 3, 5, 7, 9

~~0, 2, 4, 6, 8~~

nie może być 0, czyli może być 2, 4, 6, 8 (4 możliwości)

$n = 4 \cdot \binom{4}{1} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 3840$

(2) nieparzysta z przodu

_ _ _ _ _

5 możliwości, jedno miejsce z 4 dla kolejnej, z 4 pozostałych nieparzysty, jedno miejsce z 3 dla kolejnej, z trzech nieparzystej, możliwości drugiej, pierwszej parzystej, parzysty

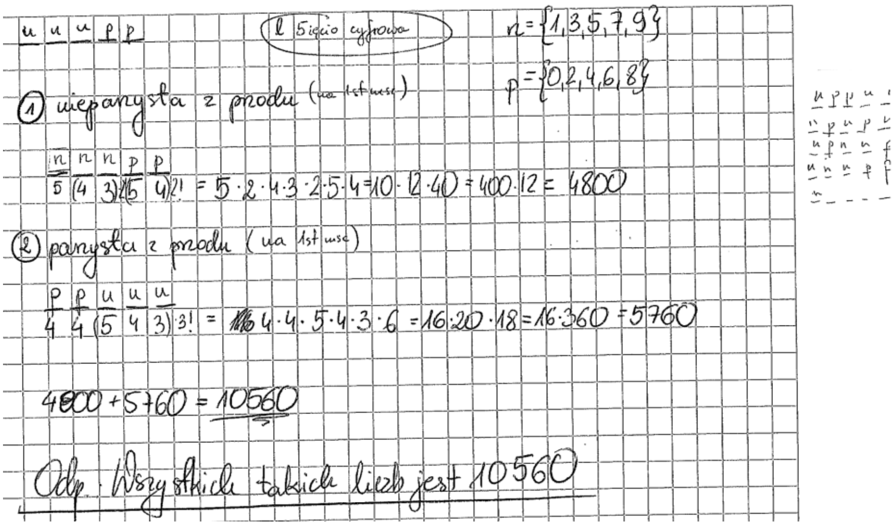
$n = 5 \cdot \binom{4}{1} \cdot 4 \cdot \binom{3}{1} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 =$
$= 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 14400$

$14400 + 3840 = 18240$

ODP: Jest 18240 takich liczb

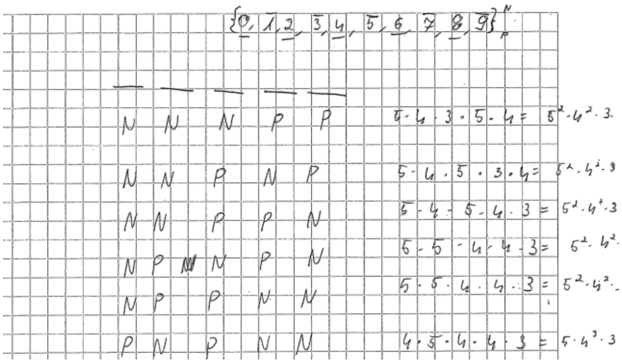
W Przykładzie 16R występują błędy jeszcze innego rodzaju. Maturzysta rozpatruje dwa przypadki ze względu na parzystość pierwszej cyfry. Tym razem objaśnień poszczególnych czynników zapisanych iloczynów w zasadzie nie ma, poza zapisanymi ciągami *nnnpp*, *ppnnn*, z których (poza pierwszą cyfrą) możemy jedynie ustalić, ile cyfr parzystych i ile nieparzystych znajduje się na miejscach od drugiego do piątego. Możemy jednak z zapisanych iloczynów wywnioskować znaczenie poszczególnych czynników, a tym samym ustalić, jaki błąd popełnił autor rozwiązania. Iloczyn $5 \cdot (4 \cdot 3) \cdot 2! \cdot (5 \cdot 4) \cdot 2!$, który po znaku równości ma postać $5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4$, w której nie ma już nawiasów ani symbolu !, pozwala ustalić znaczenie poszczególnych czynników. Pierwszy czynnik 5, to oczywiście liczba sposobów wylosowania pierwszej cyfry rozpatrywanej liczby, a więc nieparzystej, bo taki właśnie przypadek rozpatrujemy. Kolejne dwa czynniki 4 i 3 (ujęte w nawias) opisują liczbę sposobów wylosowania drugiej i trzeciej cyfry nieparzystej. Takie samo znaczenie ma iloczyn $(5 \cdot 4)$, tyle, że w odniesieniu do cyfr parzystych. Pisząc pierwszy czynnik $2!$, maturzysta najprawdopodobniej chciał uwzględnić jeszcze przestawienie drugiej i trzeciej cyfry nieparzystej. Analogiczne znaczenie ma drugi z zapisanych czynników $2!$. Błąd, jaki tu występuje, polega na tym, że autor ustalił miejsca dla dwóch cyfr nieparzystych (któreś dwa od drugiego do czwartego) i dwa pozostałe dla dwóch cyfr parzystych. Nie potrafił jednak policzyć liczby wyborów dwóch miejsc spośród czterech. Nie można jednak twierdzić, że nie zdawał sobie z tego sprawy. Świadczy o tym zapisana na prawym marginesie rozwiązania próba wypisania wszystkich ciągów pięciowyrazowych składających z trzech liter *n* i dwóch *p*, których pierwszym wyrazem jest litera *n*. Maturzysta wypisał cztery takie ciągi, zaczął pisać piąty i na tym zakończył. Szkoda, bo tych ciągów jest tylko sześć. Należy tu jeszcze dodać, że metoda zliczania liczby takich ciągów (binarnych), polegająca na „przesuwaniu” w prawo o jedno miejsce drugiej litery *p*, w której w tym zadaniu otrzymujemy kolejno ciągi: *nppnn*, *npnpn*, *npnnp*, *nnppn, nnpnp*, *nnnpp*, jest jedną z elementarnych metod kombinatorycznych. Zdający tej metody nie zrealizował. Podsumowując, gdyby w zapisanym przez maturzystę iloczynie zamiast czynników $2!$, $2!$ był jeden czynnik 6, to całe rozwiązanie zadania byłoby poprawne. Analogiczny błąd występuje w drugim przypadku.

Przykład 16R.



W kolejnym Przykładzie 17R maturzysta próbował wypisać najpierw wszystkie ciągi pięciowyrazowe złożone z dwóch liter *P* i trzech liter *N*. W każdym z utworzonych w ten sposób siedmiu przypadków poprawnie zapisał liczbę rozpatrywanych liczb, a otrzymane wyniki zsumował. Wynik końcowy, jaki uzyskał, jest jednak niepoprawny. Zapis wskazuje, że zdający wypisywał ciągi pięciowyrazowe złożone z dwóch liter *P* i trzech liter *N* bez obrania jakiegokolwiek metodycznego sposobu postępowania. Zapisując siedem ciągów: *NNNPP*, *NNPNP, NNPPN, NPNPN, NPPNN, PNPNN, PPNNN*, pominął niestety jeszcze trzy. Gdyby wypisywał te ciągi, stosując na przykład metodę „przesuwania” o jedno miejsce w prawo litery *P*, to otrzymałby:
PPNNN, PNPNN, PNNPN, PNNNP, NPPNN, NPNPN, NPNNP, NNPPN, NNPNP, NNNPP
(na czerwono zaznaczone zostały ciągi pominięte przez maturzystę).
Oczywiście liczbę tych ciągów można łatwo ustalić, gdyż jest to liczba wyborów dwóch miejsc z pięciu, a więc jest ona równa 10. Zamiast zapisanej sumy $5 \cdot (1200) + 2 \cdot (960)$ należało zapisać $6 \cdot (1200) + 2 \cdot (960)$, wtedy otrzymalibyśmy poprawną odpowiedź: 11040.

Przykład 17R.



P P N N N $4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 5 \cdot 4^3 \cdot 3$

$5 \cdot (5^2 \cdot 4^2 \cdot 3) + 2 \cdot (5 \cdot 4^3 \cdot 3) =$

$= 5(1200) + 2(960) = 6000 + 1920 = 7920$

O ile w Przykładach 16R i 17R zdający podjęli próbę ustalenia liczby wyborów dwóch miejsc spośród czterech, choć w efekcie poprawnie jej nie ustalili, to w wielu rozwiązaniach liczba wyborów miejsc w ogóle nie została uwzględniona. Taką sytuację ilustruje rozwiązanie z Przykładu 18R.

Przykład 18R.

Pięciocyfrowa liczba   parz = {0, 2, 4, 6, 8} ~~zbiór parzystych~~ 5   niepar = {1, 3, 5, 7, 9} ~~zbiór nieparzystych~~ 5

I) przypadek (~~liczba~~ cyfra stojąca na czele jest nieparzysta, więc nie jest zerem)

niep · niep · niep · parz · parz

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 1200$ liczb

II) przypadek (pierwsza cyfra jest parzysta)   0 nie może być pierwsze

parz · parz · niep · niep · niep

$4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 960$ liczb

$1200 + 960 = 2160$

Jest 2160 takich liczb.

Drugi z najczęściej obieranych sposób rozwiązania polegał na obliczeniu liczby wszystkich różnowartościowych ciągów pięciowyrazowych, których dwa wyrazy to cyfry parzyste, a pozostałe trzy to cyfry nieparzyste, następnie obliczeniu liczby tych spośród nich, których pierwszy wyraz jest zerem i odjęciu od pierwszej z otrzymanych liczb drugiej.
Pełną realizację tego sposobu rozwiązania przedstawia Przykład 19R.
Maturzysta od razu zapisał różnicę $\binom{5}{3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \binom{2}{2} \cdot 5 \cdot 4 - \binom{4}{3} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$, tłumacząc, co oznaczają pierwszy i piąty czynnik odjemnej i co oznacza cały odjemnik. Wszystkie jego dalsze obliczenia są poprawne.
Zwróćmy tutaj uwagę na to, że ten zdający zapisuje w rozwiązaniu pytanie dotyczące parzystości liczby 0. Na szczęście w swoim rozwiązaniu uznał, że 0 jest liczbą parzystą, ale dla wielu zdających egzamin maturalny z matematyki odpowiedź na to pytanie oczywista nie jest. Jest to o tyle niepokojące, że powinien to wiedzieć uczeń szkoły podstawowej.

Przykład 19R.

czy 0 jest parzyste?

~~minimum~~ 5 cyfr

parzyste 0, 2, 4, 6, 8

1° 5 cyfr

nieparzyste 1, 3, 5, 7, 9

wybór miejsca dla nieparzystych

wybór miejsca dla parzystych

odjąć te z 0 na początku

$$\binom{5}{3}\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot\binom{2}{2}\cdot 5\cdot 4-\binom{4}{3}\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 4=$$

$$=\frac{\cancel{3!}\cdot\overset{2}{\cancel{4}}\cdot 5}{\cancel{3!}\cdot\cancel{2!}}\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 20-\frac{\cancel{3!}\cdot 4}{\cancel{3!}\cdot 1}\cdot 20\cdot 12=$$

$$=10\cdot 20\cdot 60-4\cdot 240=12000-960=11.040$$

Przykład 20R. ilustruje pewien wariant drugiego z omawianych sposobów rozwiązania zadania 6.

Obliczając liczbę wszystkich różnowartościowych ciągów pięciowyrazowych, których dwa wyrazy to cyfry parzyste, a pozostałe trzy to cyfry nieparzyste, maturzysta oddzielnie obliczył liczbę tych, które rozpoczynają się cyfrą nieparzystą (ten element rozwiązania jest taki sam, jak w rozwiązaniu sposobem pierwszym) oraz liczbę tych, które rozpoczynają się cyfrą parzystą. Są to przypadki oznaczone w pracy jako I i II. Następnie obliczył liczbę ciągów, których pierwszym wyrazem jest 0. Ten przypadek oznaczył przez III. Na końcu rozwiązania odjął od sumy $3600+4800$ liczbę 960, otrzymując ostateczny wynik 7440. Wynik ten nie jest poprawny, ale nie jest to efektem błędnego rozumowania, a zwykłego błędu rachunkowego przy skracaniu ułamka $\frac{4!}{2!2!}$.

Przykład 20R.

n – nieparzysta   p – parzysta

I $\quad n\ \underbrace{n\ p\ p\ n}_{2n,\ 2p}$

$$5\cdot\binom{4}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 4=5\cdot\frac{\overset{1}{\cancel{4!}}}{\cancel{2!}\cdot\cancel{2!}}\cdot 12\cdot 20=3600$$

II $\quad p\ \underbrace{n\ n\ p\ n}_{1p,\ 3n}$

$$5\cdot 4\cdot 4\cdot 5\cdot 4\cdot 3=20\cdot 20\cdot 12=4800$$

III $\quad 0\ \underbrace{n\ p\ n\ n}_{1p,\ 3n}$

$$1\cdot 4\cdot 4\cdot 5\cdot 4\cdot 3=16\cdot 20\cdot 3=960$$

$$3600+4800-960=7440$$

Maturzyści, którzy rozwiązywali to zadanie tym sposobem, najczęściej rozwiązywali je poprawnie od strony kombinatorycznej, popełniając co najwyżej błędy nieuwagi lub rachunkowe.

Trzeci sposób rozwiązania zadania 6. polega na obliczeniu liczby tych wszystkich dodatnich liczb całkowitych pięciocyfrowych, w zapisie których nie powtarza się żadna cyfra i żadna

cyfra nie jest zerem, następnie obliczeniu liczby tych wszystkich rozpatrywanych liczb, w zapisie których jedna z cyfr jest zerem, a następnie dodaniu otrzymanych liczb.
Próbę rozwiązania zadania tym sposobem przedstawia Przykład 21R.
Wynik końcowy, jaki uzyskał zdający jest błędny. Błędnie zostały też ustalone liczby rozpatrywanych liczb w każdym z przypadków. Łatwo też wskazać błąd popełniony w tym rozwiązaniu. W każdym z zapisanych przez zdającego iloczynów $\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot 4\cdot\binom{3}{3}\cdot\ 5\cdot 4$ oraz $\binom{5}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot\binom{3}{3}\cdot\ 5\cdot 4$ brakuje jeszcze czynnika 3. Jest to liczba wyborów trzeciej cyfry nieparzystej. Zdający z pewnością miał świadomość, że w zapisie liczby występują trzy cyfry nieparzyste – ustalił to już na samym początku swojego rozwiązania, ale z jakichś powodów nie zapisał tego czynnika.

Przykład 21R.

liczba: 3x "np" oraz 2x "p"
liczba jest pięciocyfrowa o każdej cyfrze różnej
_ _ _ _ _

l. parzyste: $\{0,2,4,6,8\}$
l. nieparzyste: $\{1,3,5,7,9\}$

1°: występuje zero

_ p _ 0 _ $\quad \binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot 4\cdot\binom{3}{3}\cdot 5\cdot 4$

2°: nie występuje zero

p _ _ p _ $\quad \binom{5}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot\binom{3}{3}\cdot 5\cdot 4$

$$|A| = \binom{4}{1}\binom{4}{1}\cdot 4\binom{3}{3}\cdot 5\cdot 4+\binom{5}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot\binom{3}{3}\cdot 5\cdot 4 =$$
$$= 4\cdot 4\cdot 4\cdot 1\cdot 5\cdot 4 + \binom{5}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot 1\cdot 5\cdot 4 =$$
$$= 4^4\cdot 5 + \frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 4^2\cdot 15 =$$
$$= 4^4\cdot 5 + \frac{5\cdot 4}{2}\cdot 4^2\cdot 15 =$$
$$= 1280 + 2400 = 3680$$ liczb spełniających warunki zadania

odp.: 3680 liczb

Zdający, którzy podjęli próbę rozwiązania tego zadania, często nie mieli żadnej obranej strategii rozwiązania, co ilustrują Przykłady 22R-24R.

Przykład 22R.

$n \in \mathbb{N}$ $\binom{5}{3}\binom{5}{2}\cdot 5!$

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

3 cyfry – niepar.

2 cyfry – par.

Przykład 23R.

3 nieparzyste: 1, 3, 5, 7, 9

2 parzyste: 0, 2, 4, 6, 8

_ _ _ _ _

p np np np p

p np p p np

p np p np np

p p np np np

np p np np p

$\cancel{C_3^5 \; C_2^5} =$

$C_5^3 \cdot C_5^2 = \frac{5!}{3!(5-3)!}\cdot\frac{5!}{2!(5-2)!} =$

$= \frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 1\cdot 2}\cdot\frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 1\cdot 2} =$

$= \frac{20}{2}\cdot\frac{20}{2} = 10\cdot 10 = 100$

Przykład 24R.

_ _ _ _ _ 3 nieparzyste 2 parzyste

$1\cdot\binom{4}{1}\cdot 3! = 1\cdot 4\cdot 6 = 24$

$3\cdot\binom{4}{2}\cdot 2\cdot 2! = 3\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!} = 12\cdot\frac{24}{4} = 72$

~~24+38=80~~ $24+72=96$

Wśród zdających byli tacy, którzy nie stosowali poprawnej metody, otrzymując nierealny wynik końcowy. Przykład 25R ilustruje taką sytuację.

Wynik otrzymany przez tego zdającego łatwo zweryfikować, o ile wiemy, że rozpatrujemy liczby pięciocyfrowe. Największą taką liczbą jest 99 999, co oznacza, że całkowitych liczb dodatnich jedno-, dwu-, trzy-, cztero- i pięciocyfrowych jest mniej niż 100 000. Rozpatrujemy jakąś część liczb pięciocyfrowych, więc tych liczb musi być jeszcze mniej. Wobec tego wynik 252 000 jest z pewnością błędny. Umiejętność krytycznej oceny otrzymanego wyniku nie jest powszechna wśród maturzystów.

Przykład 25R.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

l. wszystkich kombinacji cyfr $= n! = 10!$

l. kombinacji cyfr nieparzystych $= \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(2!)} = \frac{\cancel{3!}\cdot \cancel{4}^{2}\cdot 5}{\cancel{3!}\cdot \cancel{2}_{1}} = 10$

l. kombinacji cyfr parzystych $= \frac{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{\cancel{2!}\cdot \cancel{3}^{1}\cdot \cancel{4}^{2}\cdot 5}{\cancel{2!}\cdot \cancel{6}_{1}} = 10$

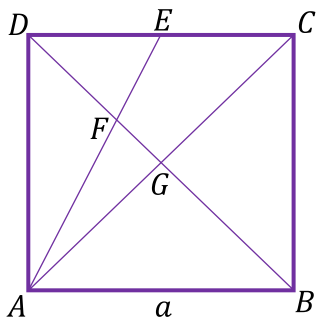
$10\cdot\binom{10}{3}\cdot 10\binom{7}{2} = 100\cdot\frac{10!}{3!\cdot 7!}\cdot\frac{7!}{2!\,5!} =$

$= 100\cdot\frac{\cancel{7!}\cdot \cancel{8}^{4}\cdot \cancel{9}^{3}\cdot 10}{\cancel{7!}\cdot \cancel{6}_{1}}\cdot\frac{\cancel{5!}\cdot \cancel{6}^{3}\cdot 7}{\cancel{5!}\cdot \cancel{2}_{1}} = 100\cdot 120\cdot 21 =$

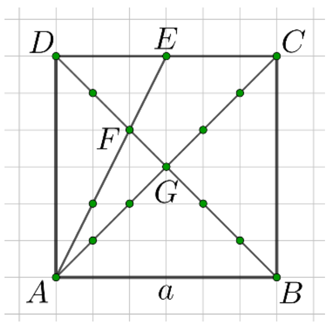
$= 252\,000$

Odp.: Wszystkich takich liczb jest 252000

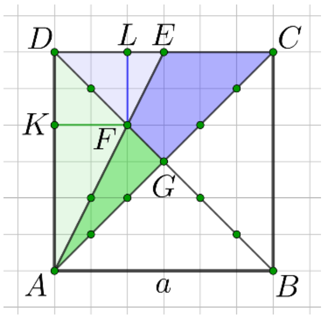
Trzecim najtrudniejszym zadaniem okazało się **zadanie 9**. (poziom wykonania – 18%). Zadanie to badało umiejętności z zakresu geometrii płaszczyzny. Mając dany kwadrat $ABCD$ o boku długości a, w którym przekątne AC i BD przecinały się w punkcie G, punkt E był środkiem boku CD, natomiast punkt F był punktem przecięcia przekątnej BD z odcinkiem AE, należało obliczyć pole trójkąta AGF oraz pole czworokąta $CEFG$. Treść zadania zawierała też rysunek przedstawiający tę sytuację.



Omówienie tego zadania zaczniemy od zaprezentowania wybranych sposobów jego rozwiązania i zilustrujemy je przykładami rozwiązań tegorocznych maturzystów.
Jeden z najprostszych sposobów rozwiązania tego zadania opiera się na punktach kratowych. Wystarczy narysować ten kwadrat, przyjmując długość jego boku na 6 kratek (lub wielokrotność liczby 6), tak jak na poniższym rysunku.



Wtedy punkty G i F są punktami kratowymi. Punkt G leży w odległości trzech kratek od każdego z boków kwadratu, a punkt F leży w odległości dwóch kratek od boków AD i CD.
Przekątne dzielą kwadrat na cztery przystające trójkąty, a więc na trójkąty o równych polach.
Obliczenie pola trójkąta AGF i pola czworokąta $CEFG$ można teraz przeprowadzić bardzo łatwo.
Można na przykład od pola trójkąta AGD odjąć pole trójkąta AFD – otrzymujemy wtedy pole trójkąta AGF, a odejmując od pola trójkąta CDG pole trójkąta DFE, otrzymujemy pole czworokąta $CEFG$.



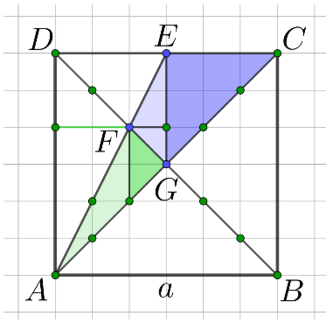
Wtedy

$$P_{AGF} = P_{AGD} - P_{AFD} = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |KF| = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{6}a = \frac{1}{12}a^2$$

oraz

$$P_{CEFG} = P_{CDG} - P_{DFE} = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |LF| = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{6}a = \frac{1}{6}a^2$$

Można też podzielić te figury odcinkami na trójkąty, których boki i wysokości są wielokrotnościami kratki (zobacz rysunek poniżej).



Wtedy

$$P_{AGF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6}a \cdot \frac{2}{6}a + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6}a \cdot \frac{1}{6}a = \frac{1}{12}a^2$$

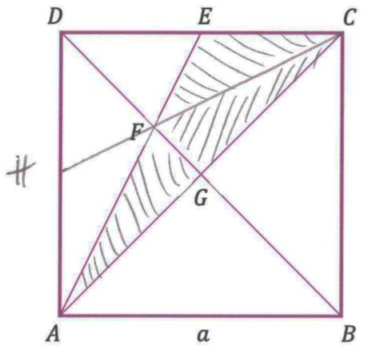
oraz

$$P_{CEFG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6}a \cdot \frac{1}{6}a + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6}a \cdot \frac{3}{6}a = \frac{1}{6}a^2$$

Należy zaznaczyć, że umiejętności potrzebne do rozwiązania zadania tym sposobem, są elementarne.
Kolejny sposób rozwiązania zadania przedstawiony jest w Przykładzie 26R.
Autor tego rozwiązania zauważył, że odcinki AF i DG są dwiema środkowymi trójkąta ACD.
Poprowadził trzecią środkową i wykorzystał twierdzenie o podziale trójkąta środkowymi na trójkąty równych polach. Treść tego twierdzenia nawet zacytował. Dalej pozostało jedynie

obliczenie szóstej części połowy pola kwadratu oraz pola dwóch takich części. Warto zaznaczyć, że oznaczenie pola figury, jakiego użył maturzysta, nie jest powszechne. Zadanie 9. rozwiązała tym sposobem niewielka grupa zdających.

Przykład 26R.



DG i AF to środkowe △ACD, to F jest środkiem ciężkości tego trójkąta.
CH – trzecia środkowa
Z twierdzenia mówiącego, że środkowe dzielą trójkąt na sześć trójkątów o równych polach wynika

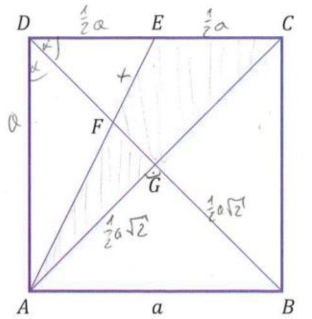
$[AGF] = \frac{1}{6}[ACD] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{12}a^2$

$[CEFG] = [CEF] + [CFG] = \frac{2}{6} \cdot \cancel{a^2}\ \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{6}a^2$

Zasadniczą trudnością tego zadania było obliczenie stosunku podziału któregokolwiek z odcinków AE, DG, BD punktem F. Stosunek ten pozwala z kolei obliczyć długość odcinka FG lub zapisać relację między polami odpowiednich trójkątów – np. AFD i EDF.
Obliczenie tego stosunku podziału można zrealizować na wiele różnych sposobów. Maturzyści najczęściej zauważali podobieństwo trójkątów ABF i EDF, a zdecydowanie rzadziej – podobieństwo trójkątów AFD i EFG. Nieliczni ze zdających zauważali, że w trójkącie ADE odcinek DF jest dwusieczną kąta prostego ADC, a ponieważ $|DE| = \frac{1}{2} \cdot |AD|$, więc z twierdzenia o dwusiecznej wnioskowali, że $|EF| = \frac{1}{2} \cdot |AF|$.
Jeden z tych sposobów ilustruje rozwiązanie z Przykładu 27R.
W rozwiązaniu tym zdający najpierw obliczył pole trójkąta ACE, następnie - z twierdzenia Pitagorasa - długość odcinka AE. Dopiero potem zapisał proporcję $\frac{\frac{1}{2}a}{x} = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a - x}$, która wynika z twierdzenia o dwusiecznej. Stąd obliczył $x = \frac{\sqrt{5}}{6}a$ (tj. długość odcinka EF), a następnie długość odcinka AF. To pozwoliło mu obliczyć $|FG| = \frac{a\sqrt{2}}{6}$ – długość przyprostokątnej FG trójkąta AFG. Teraz pozostało już tylko obliczenie pola trójkąta AFG i pola czworokąta $CEFG$.

Analiza tego rozwiązania pokazuje, że autor miał dokładny plan na rozwiązanie tego zadania. Rozpoczął je od obliczenia pola trójkąta ACE. Ten wynik wykorzystał dopiero na samym końcu swojego rozwiązania.

Przykład 27R.



$$P_{\triangle AEC} = \frac{1}{2}a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}a^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 + a^2 = |EA|^2$$

$$\frac{5}{4}a^2 = |EA|^2$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}a = |EA|^2$$

$$\frac{\frac{1}{2}a}{x} = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a - x}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{4}a - \frac{1}{2}x = x$$

$$\frac{\sqrt{5}}{4}a = \frac{3}{2}x$$

$$\frac{\cancel{2}\sqrt{5}}{\cancel{12}_{6}}a = x$$

$$|AF| = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{\sqrt{5}}{6}a = \frac{\cancel{2}\sqrt{5}}{\cancel{6}_{3}}a$$

$$\frac{1}{4}a^2 + |FG|^2 = \frac{5}{9}a^2$$

$$|FG|^2 = \frac{5}{9}a^2 - \frac{2}{4}a^2 = \frac{10}{18}a^2 - \frac{9}{18}a^2 = \frac{1}{18}a^2$$

$$|FG| = a\frac{1}{3\sqrt{2}} = a\frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$P_{\triangle AGF} = a\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{6} \cdot \frac{1}{\cancel{8}}a\sqrt{\cancel{8}} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{a^2 \cdot \frac{1}{12}}$$

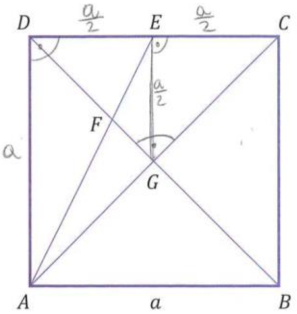
$$P_{CEFG} = P_{\triangle ACE} - P_{\triangle AGF} = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{12}a^2 = \boxed{= \frac{1}{6}a^2}$$

Wśród maturzystów stosunkowo liczna grupa obliczała pole trójkąta ACE i pole trójkąta AFG, zauważając potem, że pole czworokąta $CEFG$ jest różnicą $P_{ACE} - P_{AFG}$ pól tych dwóch trójkątów. Zależność tę można także wykorzystać, obliczając najpierw pole czworokąta $CEFG$, a następnie pole trójkąta AFG jako różnicę $P_{ACE} - P_{CEFG}$. Taki jednak sposób postępowania występował o wiele rzadziej.

W Przykładzie 28R przedstawione jest rozwiązanie, w którym maturzysta wykorzystał podobieństwo trójkątów AFD i EFG.

Podobieństwo tych trójkątów zostało poprawnie uzasadnione, zapisana została, wynikająca z tego podobieństwa, poprawna proporcja $\frac{GF}{FD}=\frac{1}{2}$. Niestety autor rozwiązania podczas obliczania długości odcinka GF popełnił błąd, pisząc $GF=\frac{1}{3}\cdot a\sqrt{2}$ zamiast $GF=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Dalsza część rozwiązania jest już konsekwencją tego błędu, a pozornie poprawne wyniki wzięły się właśnie z zależności $P_{CEFG}=P_{ACE}-P_{AFG}$.

Przykład 28R.



Pole kwadratu $= a^2$

$|AC|=|BD|=a\sqrt{2}$ ← przekątne kwadratu

Pole trójkąta ADC

$|AG|=|BG|=|CG|=|DG|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ ← przekątne kwadratu przecinają się w połowie i pod kątem prostym

$P=\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{2a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$

Pole trójkąta ADE

$P=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{4}$

Pole trójkąta AEC

$P=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{2a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}$

Pole trójkąta GCE

~~GCE~~ $P=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{8}$

$\triangle DFA\sim\triangle GFE$ (cecha kkk)

skala podobieństwa $\frac{1}{2}$

$\frac{GF}{FD}=\frac{1}{2}\Rightarrow GF=\frac{1}{3}\cdot a\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{2}}{3}$

Pole trójkąta AGF

$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{2a^2}{12} = \frac{a^2}{6}$

Pole czworokąta $CEFG$

$P = P_{AGC} - P_{AGF} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{6} = \frac{3a^2}{12} - \frac{2a^2}{12} = \frac{a^2}{12}$

Odp. Pole figury AGF wynosi $\frac{a^2}{6}$, natomiast figury $CEFG$ $\frac{a^2}{12}$

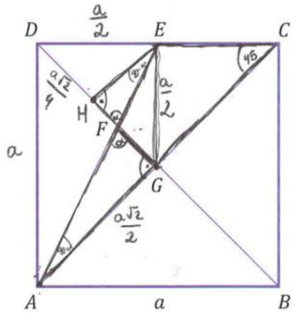
Kolejny sposób rozwiązania, jaki pojawiał się w rozwiązaniach zdających, przedstawiono w Przykładzie 29R.

Pomysł na rozwiązanie tego zadania polega na poprowadzeniu wysokości EH trójkąta EFG. Trójkąt EHF jest wtedy podobny do trójkąta AGF. To podobieństwo zdający wykorzystał do obliczenia długości $x = \frac{a\sqrt{2}}{12}$ odcinka HF, a następnie długości odcinka $FG = 2x = \frac{a\sqrt{2}}{6}$. ..

Mając długość odcinka FG, maturzysta obliczył pole trójkąta AGF. Następnie zapisał i obliczył pole czworokąta $CEFG$ jako sumę pól trójkątów ECG i FEG, przy czym pole trójkąta FEG obliczył jako różnicę pól trójkątów EHG i EHF.

W niektórych zapisach występują błędy lub usterki (np. w zapisie równania $EF \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$ występuje ewidentny błąd pisarski, długość odcinka AE jest obliczona z błędem rachunkowym), ale nie wpływają one na poprawność użytej metody i jakość rozwiązania.

Przykład 29R.



$P_{ADF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{4}$ $\quad EA = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}a}{4}$

$P_{\Delta AEC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$ $\quad AF = ?$ $\quad EF = ?$

$\frac{a}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{a\sqrt{2}} = \frac{2a}{2a2} = \frac{1}{2}$

$\Delta AFG \sim \Delta HEF$ z kkk

$EF \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$ $\quad EH = \frac{a^2}{42} \cdot \frac{8}{a\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$

$HF + FG = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ $\cancel{\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2 + (HF)^2 = EF^2}$ G

$\cancel{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (HG - HF)^2 =}$

stosunek boków trójkątów $\frac{EH}{AG} = \frac{1}{2}$

więc $HF = x$ $FG = 2x$

$HF + FG = 3x$ $3x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ $x = \frac{a\sqrt{2}}{12}$ $FG = \frac{a\sqrt{2}}{6}$

$P_{AFG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{12}$

$P = \frac{a}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{12} = \frac{a^2}{48}$

$P_{ECGF} = P_{\Delta ECG} + P_{FEG} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} + (P_{\Delta EHG} - P_{EHF}) =$

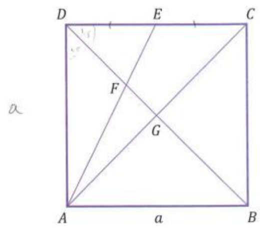
$\frac{a}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{8}$

$\frac{a^2}{8} + \left(\frac{a^2}{16} - \frac{a^2}{48}\right) = \frac{6a^2 + 3a^2 - a^2}{48} = \frac{8a^2}{48} = a$

$P_{ECGF} = \frac{a^2}{6}$

Nieliczni zdający stosowali twierdzenie o stosunku pól trójkątów o równych wysokościach. Tak właśnie postąpił autor rozwiązania z Przykładu 30R.
Już w pierwszej linii swojego rozwiązania zapisał równość pól trójkątów ADE i ACE, zauważając, że mają one wspólną wysokość i podstawy równej długości. Zapisał też, że pole każdego z tych trójkątów to czwarta część pola kwadratu. To pozwoliło mu zapisać związek $P_{AGF} + P_{CEFG} = \frac{1}{4}a^2$, o którym wspominaliśmy w poprzednich przykładach. Zasadnicze trudności zdający pokonał w momencie zapisania poprawnej zależności $P_{DFA} = 2P_{DFE}$ między polami trójkątów DFA i DFE. Uzasadnił ją, stwierdzając równość wysokości opuszczonych z wierzchołka F w trójkątach DFA i DFE. Równość tych wysokości także uzasadnił, odwołując się do własności dwusiecznej kąta wypukłego. To pozwoliło mu obliczyć najpierw pole trójkąta DFE, następnie pole trójkąta DFA, a stąd pole trójkąta AGF.
Na koniec, wykorzystując zapisaną wcześniej równość $P_{AGF} + P_{CEFG} = \frac{1}{4}a^2$, obliczył pole czworokąta $CEFG$.

Przykład 30R.



$P_{ADE} = P_{ACE} = \frac{1}{4}a^2 \rightarrow$ bo ACE i ADE mają równe podstawy i wysokość, a △ADC to połowa kwadratu

$P_{ABF} + P_{CEFG} = \frac{1}{4}a^2$

Ponieważ DB to dwusieczna (∢ADC i ∢ABC) to wszystkie leżące na niej punkty są równo oddalone od odpowiednich boków kwadratu (parami AD i DC oraz AB i BC)

Zatem P_{DFA} ~~jest~~ $= 2P_{DFE}$ bo mają równe wysokości i podstawa △ADF to a, a podstawa △DEF to $\frac{1}{2}a$

$P_{ADE} = P_{DFA} + P_{DFE} = 3P_{DFE} = \frac{1}{4}a^2$

$P_{DFE} = \frac{1}{12}a^2$ $P_{DFA} = \frac{1}{6}a^2 = \frac{2}{12}a^2$

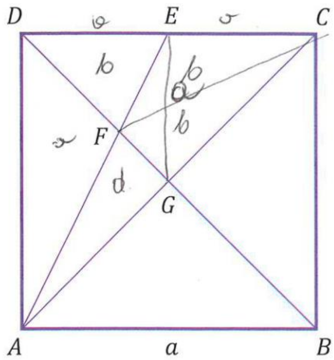
Ponieważ $\cancel{P_{ABG}}$ $P_{ABG} = \frac{1}{4}a^2 = P_{DFA} + P_{AFG}$ to

$P_{AGF} = \frac{1}{4}a^2 - \frac{2}{12}a^2 = \frac{1}{12}a^2$

Zatem $P_{CEFG} = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{12}a^2 = \frac{2}{12}a^2 = \frac{1}{6}a^2$

Rozwiązanie z Przykładu 31R również opiera się na wykorzystaniu twierdzenia o stosunku pól trójkątów o wspólnej wysokości i ustaleniu związków między polami odpowiednich figur. Autor tego rozwiązania rozpoczął od zapisania dwóch równości $P_{GCEF} + P_{FED} = \frac{1}{4}a^2$ oraz $P_{GCEF} + P_{AGF} = \frac{1}{4}a^2$, z których otrzymał $P_{FED} = P_{AGF}$. Kolejna równość $P_{FED} = P_{FCE}$ wynika z faktu, że trójkąty FED i FCE mają równe podstawy i wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka F. Uzasadnienie takie, choć bardzo skrótowe, autor stosownie zapisał. Z ostatnich dwóch równości wywnioskował, że $P_{AGF} = P_{FCE}$. Powołując się jeszcze raz na równość pól trójkątów o równych podstawach i wspólnej wysokości, zapisał dalej $P_{AGF} = P_{GCF}$, choć mógł po prostu stwierdzić, że trójkąty AGF i GCF są przystające. Otrzymane związki pozwoliły mu zapisać równość $P_{GCEF} = P_{GCF} + P_{FCE} = 2P_{AGF}$. Stąd i z zapisanej na początku pierwszej równości otrzymał $3P_{AGF} = \frac{1}{4}a^2$, a dalej $P_{AGF} = \frac{1}{12}a^2$. Na koniec obliczył pole czworokąta $CEFG$: $P_{GCEF} = 2 \cdot \frac{1}{12}a^2 = \frac{1}{6}a^2$.

Przykład 31R.



$a+b=\frac{1}{4}a^2$

$b+c=\frac{1}{4}a^2$

$a+d=\frac{1}{4}a^2$

$a=c$

$b=d$

$P_{EEG}=\frac{a^2}{8}-B$

$P_{EEG} \neq P_{GEC}$

$P_{GCEF}+P_{FED}=\frac{1}{4}a^2$ ☆

$P_{GCEF}+P_{AGF}=\frac{1}{4}a^2$

$\Downarrow$

$P_{FED}=P_{AGF}$

1. $P_{FED}=P_{FCE}$, bo $|DE|=|EC|$ i wspólne wysokości

$\underline{P_{AGF}\overset{(1)}{=}P_{FCE}}$

2. ~~$P_{AGF}=P$~~

$P_{AGF}=P_{GCF}$ / bo $|AG|=|GC|$ (przekątne w kwadracie) i wspólne wysokości

$P_{GCEF}=P_{GCF}+P_{FCE}=2P_{AGF}$

☆ $3P_{AGF}=\frac{1}{4}a^2$

$P_{AGF}=\frac{1}{12}a^2$

$P_{GCEF}=2\cdot\frac{1}{12}a^2=\frac{1}{6}a^2$

odp:

$P_{AGF}=\frac{1}{12}a^2$

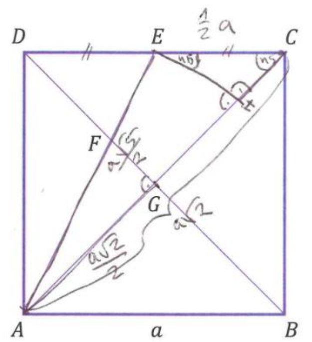
$P_{CEFG}=\frac{1}{6}a^2$

Przykłady 30R i 31R dobitnie pokazują, że zadanie 9. można było rozwiązać z wykorzystaniem elementarnej wiedzy matematycznej, ale takie rozwiązania nie występowały często.

Nieco inny pomysł miał maturzysta z Przykładu 32R.

Poprowadził on wysokość EH trójkąta ACE i obliczył kolejno długości odcinków AE, AG. Następnie w równoramiennym trójkącie prostokątnym EHC obliczył długości przyprostokątnych EH oraz HC. To pozwoliło mu obliczyć długość przyprostokątnej AH trójkąta prostokątnego AHE. W kolejnym kroku wykorzystał podobieństwo trójkątów AGF oraz AHE w celu obliczenia długości odcinka FG, pokonując tym samym zasadnicze trudności tego zadania. Dalszą część wykonał poprawnie.

Przykład 32R.



$|AC| = a\sqrt{2}$

W ΔAED $|AD| = a$ $|DE| = \frac{1}{2}a$, zatem:

$|AE|^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + a^2$

$|AE|^2 = \frac{a^2}{4} + a^2$

$|AE|^2 = \frac{5a^2}{4}$

$|AE| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$|AG| = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Przekątne w kwadracie ABCD przecinają się pod kątem prostym, zatem $\sphericalangle AGF = 90^\circ$

ΔCHE jest prostokątny i $\sphericalangle HCE = 45^\circ$, zatem: $|EH| = |HC|$

$2|EH|^2 = \frac{a^2}{4} \quad /:2$

$|EH|^2 = \frac{a^2}{8} \quad /\sqrt{}$

$|EH| = \frac{a}{\sqrt{8}} = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4} = |HC|$

$|AH| = |AC| - |HC| = a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{4a\sqrt{2}}{4} - \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{4a\sqrt{2} - a\sqrt{2}}{4} =$

$= \frac{3a\sqrt{2}}{4}$

$\triangle AGF \sim \triangle AHE$, czyli:

$$\frac{|EH|}{|FG|} = \frac{|AH|}{|AG|}$$

$$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{|FG|} = \frac{\frac{3a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

$$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{|FG|} = \frac{3\cancel{a\sqrt{2}}}{\cancel{4}_{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{a\sqrt{2}}}$$

$$\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{|FG|} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{2}|FG| \quad /:\frac{3}{2}$$

$$\frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\cancel{4}_{2}} = |FG|$$

$$\frac{a\sqrt{2}}{6} = |FG|$$

$$P_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot a = \frac{1}{4}a \cdot a = \frac{1}{4}a$$

$$P_{AEC} = P_{ABCD} - P_{ABC} - P_{ADE} = a^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = a^2 - \frac{3}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2$$

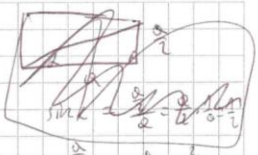
$$P_{AGF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{2a^2}{24} = \frac{a^2}{12}$$

$$P_{CEFG} = P_{AEC} - P_{AGF} = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{12} = \frac{3a^2}{12} - \frac{a^2}{12} = \frac{2a^2}{12} = \frac{1}{6}a^2$$

Z oglądu zaprezentowanych do tej pory przykładów wynika, że do rozwiązania tego zadania nie są potrzebne funkcje trygonometryczne. Jednak duży odsetek tych, którzy rozwiązali zadanie 9., zdecydował się na użycie funkcji, co przedstawiono w Przykładzie 33R.
Po obliczeniu długości odcinka AE, zdający obliczył pole trójkąta ACE. W następnym kroku obliczył sinus, cosinus i tangens kąta DAE (oznaczonego w rozwiązaniu przez α). Stąd, po zastosowaniu wzoru na tangens sumy kątów, obliczył tangens kąta AFG, co z kolei doprowadziło go do obliczenia długości przyprostokątnej GF trójkąta AFG. Dalszą część rozwiązania zrealizował już bez problemu.

Przykład 33R.

$$a^2 + \frac{a^2}{4} = |AE|^2 \qquad \alpha = \measuredangle DAE$$



$$\frac{4a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = |AE|^2$$

$$|AE|^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$|AE| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$|AF|^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{2a^2}{16+16\sqrt{3}+12}$

$|AF|^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{2a^2}{28+16\sqrt{3}}$

$|AF|^2 = \frac{a^2(14+8\sqrt{3})+2a^2}{28+16\sqrt{3}}$

$|AF| =$

$P_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{4}$

$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a^2 = \frac{a^2}{2}$

$P_{ABCD} = a^2$

$P_{ACE} = \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4} - \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{5}$

$\cos^2\alpha = \frac{4}{5}$

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$tg\,\alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$

$tg(\alpha+45) = \frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = 3$

$3 = \frac{|AG|}{|GF|}$

$3 = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{|GF|}$

$3|GF| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$|GF| = \frac{a\sqrt{2}}{6}$

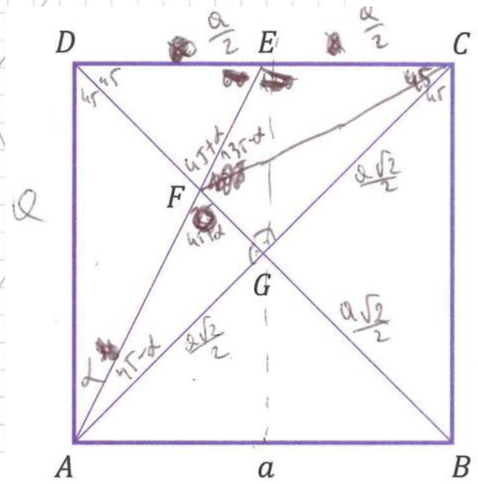
$P_{AGF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} =$

$= \frac{2a^2}{2 \cdot 12} = \frac{a^2}{12}$

$P_{CEFG} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{12} =$

$= \frac{3a^2}{12} - \frac{a^2}{12} =$

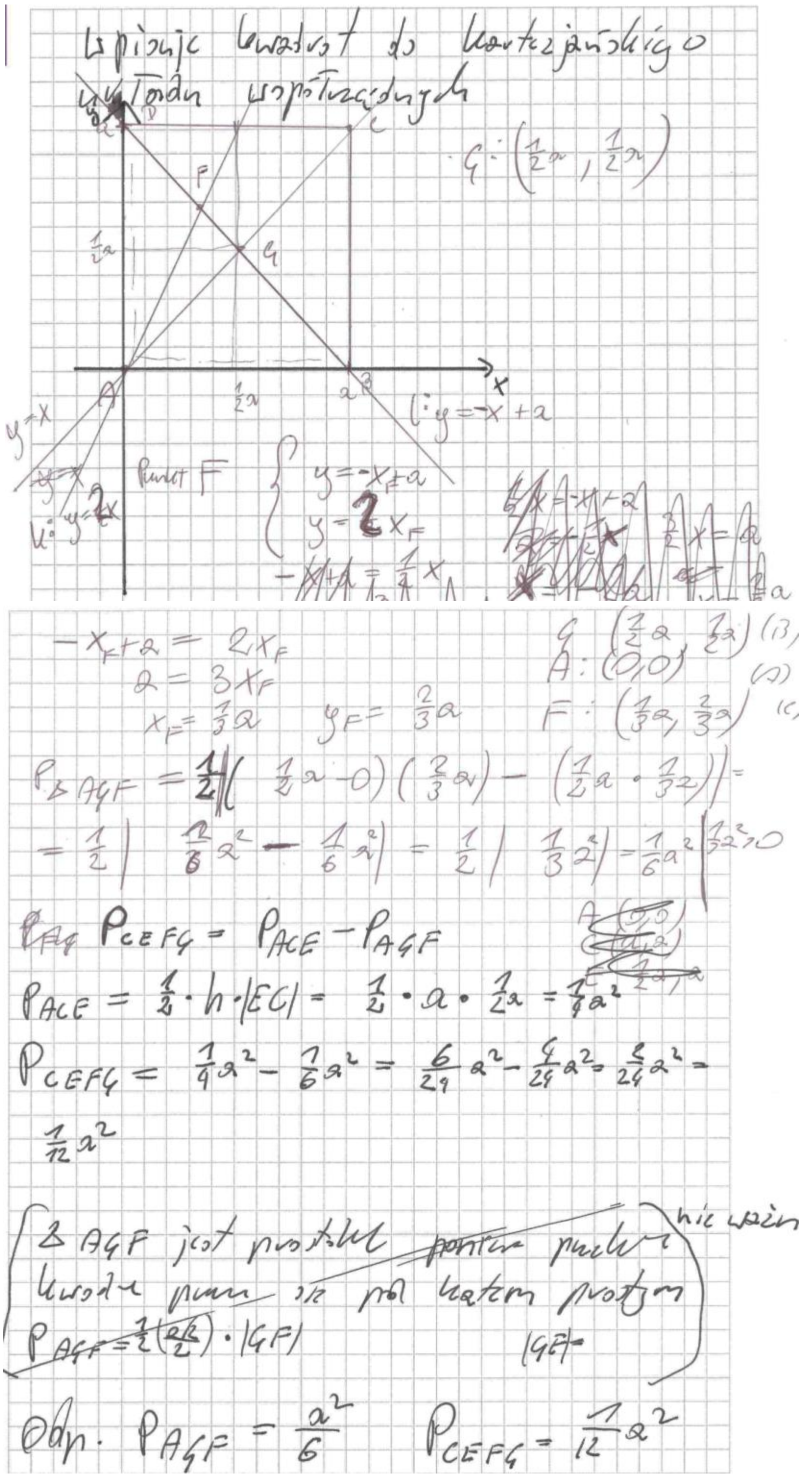
$= \frac{2a^2}{12} = \frac{a^2}{6}$



Ostatni sposób rozwiązania, jaki omówimy, to rozwiązanie z wykorzystaniem aparatu geometrii analitycznej (Przykład 34R).

Maturzysta osadził kwadrat $ABCD$ w prostokątnym układzie współrzędnych kartezjańskich w ten sposób, aby wierzchołek A był w początku układu współrzędnych, wierzchołki B i D leżały na osiach – odpowiednio – Ox i Oy, a wierzchołek C znajdował się w pierwszej ćwiartce tego układu. Wtedy współrzędne tych wierzchołków są równe $A = (0,0)$, $B = (a, 0)$, $C = (a, a)$, $D = (0, a)$. Współrzędne punktów G i E również łatwo określić: $G = \left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$, $E = \left(\frac{1}{2}a, a\right)$. Współrzędnych punktu E autor rozwiązania co prawda nie zapisał, ale wykorzystał je, zapisując równanie $y = 2x$ prostej AE. Zapisał także równanie $y = -x + a$ prostej BD. Z układu równań, który otrzymał, obliczył współrzędne punktu $F = \left(\frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a\right)$. W kolejnym kroku rozwiązania zastosował wzór na pole trójkąta o danych współrzędnych wierzchołków do obliczenia pola trójkąta AGF. Obliczając to pole, maturzysta popełnił błąd rachunkowy i otrzymał pole trójkąta AGF równe $\frac{1}{6}a^2$ (zamiast $\frac{1}{12}a^2$). Ponieważ pole czworokąta $CEFG$ obliczał, wykorzystując przytaczaną w wielu poprzednio omówionych rozwiązaniach równość $P_{CEFG} + P_{AFG} = \frac{1}{4}a^2$, to otrzymał pole czworokąta $CEFG$ równe $\frac{1}{12}a^2$.

Przykład 34R.



Wpisuję kwadrat do kartezjańskiego układu współrzędnych

$G: \left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$

$l: y = -x + a$

$k: y = 2x$

Punkt F $\begin{cases} y = -x_F + a \\ y = 2x_F \end{cases}$

$-x_F + a = 2x_F$

$a = 3x_F$

$x_F = \frac{1}{3}a \quad y_F = \frac{2}{3}a$

$G\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$, $A: (0,0)$, $F: \left(\frac{1}{3}a, \frac{2}{3}a\right)$

$P_{\triangle AGF} = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{2}a - 0\right)\left(\frac{2}{3}a\right) - \left(\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{3}a\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{2}{6}a^2 - \frac{1}{6}a^2\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{3}a^2\right| = \frac{1}{6}a^2$

$P_{CEFG} = P_{ACE} - P_{AGF}$

$P_{ACE} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot |EC| = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2$

$P_{CEFG} = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{6}a^2 = \frac{6}{24}a^2 - \frac{4}{24}a^2 = \frac{2}{24}a^2 = \frac{1}{12}a^2$

nie ważne

Odp. $P_{AGF} = \frac{a^2}{6}$ $\quad P_{CEFG} = \frac{1}{12}a^2$

Omówienie wszystkich sposobów rozwiązania zadania 9. wykracza poza zakres niniejszego opracowania, ale te zaprezentowane powyżej dobrze odzwierciedlają rozwiązania, które wystąpiły w pracach zdających. Niezmiernie rzadko pojawiały się prace, w których maturzyści w celu rozwiązania zadania próbowali zastosować twierdzenia wykraczające poza zakres rozszerzony. Jednym z takich twierdzeń jest wzór Stewarta. Próbę jego wykorzystania możemy obejrzeć w Przykładzie 35R.

Autor tego rozwiązania powołał się na twierdzenie Stewarta dla trójkąta AGD. Jednak równość $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{6}a\right)+a^2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{3}a\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}a\ \left(|AF|^2+\frac{\sqrt{2}}{6}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}a\right)$, jaką zapisał, jest błędna (kolorem czerwonym zaznaczone zostały błędne zapisy). Poprawna równość ma postać

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{3}a\right)+a^2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{6}a\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\left(|AF|^2+\frac{\sqrt{2}}{6}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}a\right)$$

i pozwala obliczyć długość odcinka AF, co w konsekwencji prowadzi do obliczenia długości odcinka FG. Zdający bez jakiegokolwiek uzasadnienia przyjął, że odcinki DF i GF mają długości równe $\frac{\sqrt{2}}{3}a$ i $\frac{\sqrt{2}}{6}a$ (użył tych wielkości w zapisanej błędnej równości) i na podstawie dokonanych przez niego zapisów nie można stwierdzić, który z tych odcinków ma długość $\frac{\sqrt{2}}{6}a$, a który ma długość $\frac{\sqrt{2}}{6}a$. Ustalenie stosunku podziału jednego z odcinków AE, DG, czy BD punktem F, o czym już wspominaliśmy, stanowi zasadniczą trudność rozwiązania tego zadania.

Przykład 35R.

2. tw. Stewarta w $\triangle AGD$:

$$\left(\frac{\sqrt2}{2}a\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt2}{6}a\right)+a^2\left(\frac{\sqrt2}{3}a\right)=\frac{\sqrt2}{2}a\left(|AF|^2+\frac{\sqrt2}{6}a\cdot\frac{\sqrt2}{3}a\right)$$

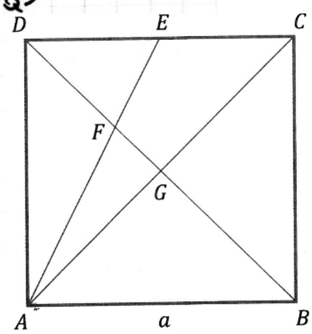
$$\frac12 a^2\cdot\frac{\sqrt2}{6}a+\frac{\sqrt2}{3}a^3=|AF|^2\cdot\frac{\sqrt2}{2}a+\frac{\sqrt2}{18}a^3$$

$$\frac{5\sqrt2}{12}a^3=|AF|^2\frac{\sqrt2}{2}a+\frac{\sqrt2}{18}a^3$$

$$\frac{13\sqrt2}{12}a^3=|AF|^2\cdot\frac{\sqrt2}{2}a$$

$$\frac{\sqrt{13}}{6}a^2=|AF|^2$$

$$\cancel{|AF|=\frac{\sqrt{13}}{6}}$$



z tw. Pitagorasa

$$|GF|^2=\frac{\sqrt{13}}{6}a^2-\frac12a^2$$

$$|GF|=\sqrt{\frac{\sqrt{13}-3}{6}}\,a$$

$$P_{\triangle AGF}=\frac12\cdot\frac{\sqrt2}{6}a\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{13}-3}{6}}\,a$$

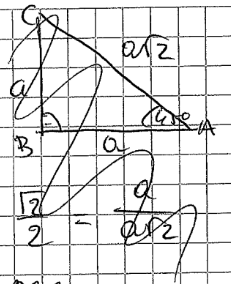
Błędy, które stosunkowo często pojawiały się w rozwiązaniach, polegały na przyjęciu dodatkowych błędnych założeń, które nie wynikają z treści zadania (dotyczy to zresztą nie tylko zadań z geometrii). Przykłady 36R i 37R ilustrują takie właśnie błędy.
W rozwiązaniu z Przykładu 36R maturzysta popełnił błąd przy obliczaniu pola trójkąta AGF.

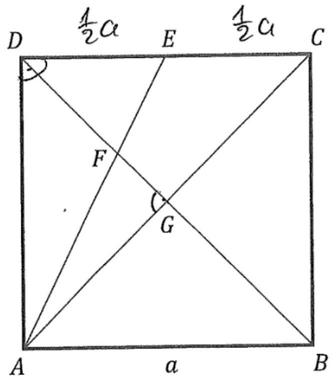
Pisząc $P_{AGF} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{2a^2}{8} = \frac{a^2}{4}$, błędnie przyjął długość któregoś z boków AG lub GF trójkąta AGF.

Przykład 36R.

$|AC| = a\sqrt{2}$

$|AG| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$





$P_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2$

$P_{AGF} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{2a^2}{8} = \frac{1}{4}a^2$

$P_{ADC} = \frac{1}{2}a^2$

$P_{CEFG} = P_{ADC} - P_{ADE} - P_{AGF}$

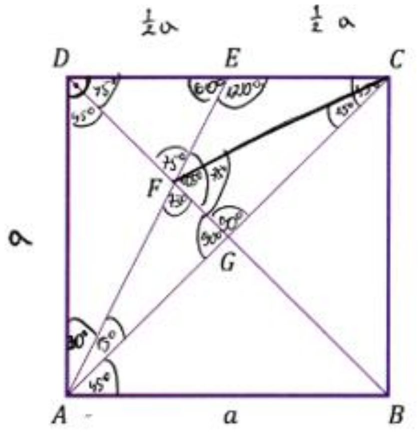
$P_{CEFG} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2$

$P_{AGF} = \frac{1}{4}a^2$

$P_{CEFG} = \frac{1}{2}a^2$

W rozwiązaniu z Przykładu 37R zdający błędnie założył, że trójkąt ADE jest połową trójkąta równobocznego. Wszystkie kolejne kroki tego rozwiązania oparte są na tym błędnym założeniu.

Przykład 37R.



Oblicz pola figur AGF oraz $CEFG$. Zapisz obliczenia.

$\triangle ADE$ to połowa trójkąta równobocznego

$$P_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot a = \frac{1}{4} a^2$$

$$P_{AFG} = \frac{1}{2} \cdot FG \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{DF}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{1}{2}a}{\sin 75^\circ}$$

$$DF = \frac{a}{4 \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

$$FG = \frac{a\sqrt{2}}{2} - DF = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{2a\sqrt{2} - a(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} =$$

$$= a\,\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = a\,\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$P_{AGF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} = \frac{a^2\sqrt{2}(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{16} =$$

$$= \frac{2a^2(3-\sqrt{3})}{16} = \frac{a^2(3-\sqrt{3})}{8}$$

$$P_{EFGC} = P_{ACE} - P_{AGF} = \frac{1}{4}a^2 - a^2\,\frac{(3-\sqrt{3})}{8} =$$

$$= a^2\left(\frac{2-3+\sqrt{3}}{8}\right) = a^2\,\frac{\sqrt{3}-1}{8}$$

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najlepiej

Najłatwiejszym zadaniem dla tegorocznych maturzystów było **zadanie 5**. Poziom wykonania tego zadania to 62%. Zadanie to nominalnie należy do grupy zadań z IV obszaru wymagań ogólnych (*Rozumowanie i argumentacja*), gdyż należy tutaj udowodnić podaną w treści zadania równość $\log_{12} 80 = \frac{2a+1}{a(1+b)}$, wiedząc, że prawdziwe są dwie równości $\log_5 4 = a$ oraz $\log_4 3 = b$ stanowiące założenie.

Konstrukcja zadania sprawia, że należy je zaliczyć do grupy zadań typowych. Dowód podanej jako teza równości sprowadza się do przekształcenia wyrażenia znajdującego się po jednej z jej stron do wyrażenia, które stanowi drugą stronę tej równości. Podczas przekształceń należy wykorzystać związki podane w założeniu oraz zastosować wzory na: logarytm iloczynu, logarytm ilorazu, logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu. Umiejętności posługiwania się trzema pierwszymi z wymienionych wzorów są z zakresu podstawowego; jedynie posługiwanie się wzorem na zamianę podstawy logarytmu leży w zakresie rozszerzonym. Można zatem wyjść od lewej strony równości stanowiącej tezę i dojść do prawej lub odwrotnie; ewentualnie można równocześnie przekształcać obie strony równości.

Zdecydowana większość maturzystów, którzy zrobili to zadanie lub je zaczynali (nie kończąc), wybierała kierunek przejść od „prawej do lewej”.
Maturzysta, którego rozwiązanie prezentujemy jako Przykład 38R, obrał właśnie taki kierunek przejść.
Zdający wykorzystał równości podane w założeniu, zapisał liczbę 1 w postaci odpowiedniego logarytmu i zastosował wzór na logarytm potęgi. Stąd otrzymał wyrażenie $\frac{\log_5 16+\log_5 5}{(\log_5 4)\cdot(\log_4 4+\log_4 3)}$.
Następnie dwukrotnie zastosował wzór na logarytm iloczynu oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu i otrzymał $\log_{12} 80$.

Przykład 38R.

$$\frac{2a+1}{a\cdot(1+b)}=\frac{2\cdot\log_5 4+1}{\log_5 4(1+\log_4 3)}=\frac{\log_5 16+\log_5 5}{\log_5 4(\log_4 4+\log_4 3)}=\frac{\log_5 80}{\log_5 4\cdot\log_4 12}=$$

$$=\log_4 80\cdot\frac{1}{\log_4 12}=\log_{12} 80$$

c.n.w

Wykonanie tych samych przejść od lewej do prawej wymaga trochę głębszego przemyślenia i dlatego takich rozwiązań było bardzo mało.
W Przykładach 39R i 40R zdający rozpoczęli od przekształcania lewej strony równości (tj. wyrażenie $\log_{12} 80$) i otrzymali wyrażenie $\frac{2a+1}{a\cdot(1+b)}$, wykonując w efekcie te same przejścia, co autor rozwiązania z poprzedniego przykładu.

Przykład 39R.

$$\log_{12} 80=\frac{\log_5 80}{\log_5 12}=\frac{\log_5 80}{\log_5 4\cdot\log_4 12}=\frac{\log_5 16+\log_5 5}{\log_5 4(\log_4 4+\log_4 3)}=$$

$$=\frac{\log_5 16+1}{\log_5 4(1+\log_4 3)}=\frac{2\log_5 4+1}{\log_5 4(1+\log_4 3)}=\frac{2a+1}{a(1+b)}$$

cnd.

Przykład 40R.

$$\log_{12} 80=\frac{\log_4 80}{\log_4 12}=\frac{\log_4(16\cdot 5)}{\log_4(4\cdot 3)}=\frac{\log_4 16+\log_4 5}{\log_4 4+\log_4 3}=\frac{2+\log_4 5}{1+\log_4 3}=$$

$$=\frac{2+\frac{\log_5 5}{\log_5 4}}{1+\log_4 3}=\frac{2+\frac{1}{\log_5 4}}{1+\log_4 3}=\frac{\frac{2\log_5 4+1}{\log_5 4}}{1+\log_4 3}=\left(\frac{2\log_5 4+1}{\log_5 4}\right)\cdot\frac{1}{1+\log_4 3}=$$

$$=\frac{2\log_5 4+1}{(\log_5 4)(1+\log_4 3)}=\frac{2a+1}{a(1+b)}$$

c.n.w.

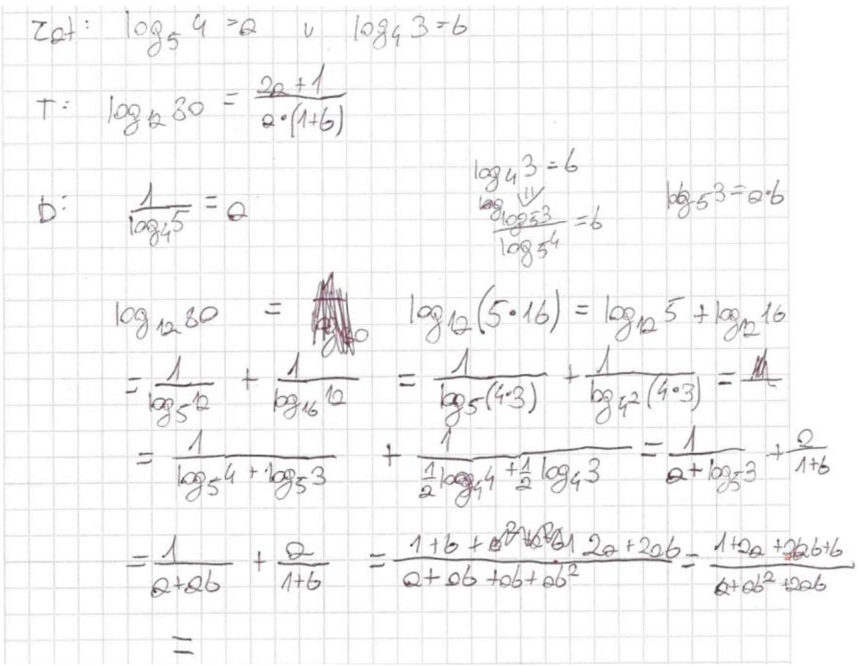
Nie wszystkim, którzy podjęli się próby rozwiązania tego zadania, udało się w pełni to zadanie rozwiązać.
W Przykładzie 41R maturzysta próbował przekształcić lewą stronę podanej w tezie równości. Dokładna analiza tego rozwiązania pokazuje, że ten maturzysta nie ma żadnych problemów ze stosowaniem własności logarytmów. Wszystkie przekształcenia zapisane przez zdającego są poprawne, wraz z ostatnim zapisanym wyrażeniem $\frac{1+2a+2ab+b}{a+ab^2+2ab}$. Zdający nie doprowadził już tego wyrażenia do końca, choć wystarczyło zapisać jeszcze

$$\frac{1+2a+2ab+b}{a+ab^2+2ab}=\frac{(2a+1)+b(2a+1)}{a(1+2b+b^2)}=\frac{(2a+1)(1+b)}{a(1+b)^2}=\frac{2a+1}{a(1+b)}$$

Problemu tego zdający mógłby uniknąć, gdyby wcześniej, sprowadzając ułamki $\frac{1}{a+ab}$ i $\frac{2}{1+b}$ do wspólnego mianownika, wyznaczył najmniejszy wspólny mianownik, a nie po prostu przyjął, że jest to iloczyn mianowników tych ułamków. Wtedy otrzymałby od razu

$$\frac{1}{a+ab}+\frac{2}{1+b}=\frac{1}{a(1+b)}+\frac{2}{1+b}=\frac{1+2a}{a(1+b)}$$

Przykład 41R.



Zał: $\log_5 4 = a \lor \log_4 3 = b$

T: $\log_{12} 80 = \frac{2a+1}{a\cdot(1+b)}$

D: $\frac{1}{\log_4 5} = a$

$\log_4 3 = b$ ⇓ $\frac{\log_5 3}{\log_5 4} = b$ $\quad \log_5 3 = a\cdot b$

$\log_{12} 80 = \log_{12}(5\cdot 16) = \log_{12} 5 + \log_{12} 16$

$= \frac{1}{\log_5 12} + \frac{1}{\log_{16} 12} = \frac{1}{\log_5(4\cdot 3)} + \frac{1}{\log_{4^2}(4\cdot 3)} =$

$= \frac{1}{\log_5 4 + \log_5 3} + \frac{1}{\frac{1}{2}\log_4 4 + \frac{1}{2}\log_4 3} = \frac{1}{a+\log_5 3} + \frac{2}{1+b}$

$= \frac{1}{a+ab} + \frac{2}{1+b} = \frac{1+b+2a+2ab}{a+ab+ab+ab^2} = \frac{1+2a+2ab+b}{a+ab^2+2ab}$

$=$

W kolejnym Przykładzie 42R maturzysta rozpoczął od prawej strony równości (tezy). Błąd popełnił już w początkowym etapie, pisząc w liczniku $2\cdot\log_5 20$. Zastosował błędnie twierdzenie o sumie logarytmów w sytuacji, gdy pierwszym składnikiem był podwojony logarytm. Ten błąd uniemożliwił mu wykazanie tezy.

Przykład 42R.

$a = \log_5 4 \qquad b = \log_4 3$

$$\log_{12} 80 = \frac{2\log_5 4 + 1}{\log_5 4\left(1 + \log_4 3\right)} \qquad \frac{2a+1}{a(1+b)} =$$

$$= \frac{2\log_5 4 + \log_5 5}{\log_5 4\left(\log_4 4 + \log_4 3\right)} = \frac{2 \cdot \log_5 20}{\log_5 4 \cdot \log_4 12} =$$

$$= \frac{\log_5 20}{\log_5 4} \cdot \frac{2}{\log_4 12} =$$

$$= \log_4 20 \cdot \frac{2}{\log_4 12} = \frac{2\log_4 20}{\log_4 12} = 2\log_{12} 20$$

Stosunkowo liczną grupę stanowili też maturzyści, którzy nie mieli pomysłu na przeprowadzenie dowodu. Próbowali stosować własności logarytmów, mając nadzieję, że po ich zastosowaniu trafią na właściwy ciąg przekształceń, który pozwoli na wykazanie tezy. Przykład 43R ilustruje takie rozwiązanie.

Przykład 43R.

$\log_5 4 = a \qquad \log_4 3 = b \qquad \log_{12} 80 = \frac{2a+1}{a(1+b)}$

$\frac{1}{\log_4 5} = a \qquad \log_4 3 = b$

$$\log_5 4 = \frac{\log_{12} 4}{\log_{12} 5}$$

$$\log_4 3 = \frac{\log_{12} 3}{\log_{12} 4}$$

$$\frac{\cancel{\log_{12} 4}}{\log_{12} 5} \cdot \frac{\log_{12} 3}{\cancel{\log_{12} 4}} = \frac{\log_{12} 3}{\log_{12} 5}$$

Maturzyści dobrze sobie poradzili z **zadaniem 4.** (poziom wykonania tego zadania wyniósł 50%), które dotyczyło interpretacji geometrycznej pochodnej funkcji. W tym zadaniu należało obliczyć współczynniki w równaniu kierunkowym stycznej do wykresu danej funkcji w pewnym punkcie o danej pierwszej współrzędnej. Problem postawiony w zadaniu należy do typowych na poziomie rozszerzonym, a rozwiązanie jest algorytmiczne. Tego typu zadania występowały już w arkuszach w poprzednich latach, więc zdający byli już na to zadanie przygotowani. Błędy, które zdający najczęściej popełniali, były natury rachunkowej (Przykład 44R). Dużo rzadziej występowały rozwiązania, w których zdający błędnie wyznaczyli pochodną ilorazu funkcji (Przykład 45R).

W przykładzie 44R zdający poprawnie wyznacza pochodną funkcji podanej w zadaniu, oblicza wartość pochodnej w zadanym punkcie i poprawnie ją interpretuje jako współczynnik kierunkowy stycznej. Podczas obliczania współczynnika b popełnia błąd rachunkowy.

Przykład 44R.

$P=(2,0)$

$$f'(x)=\frac{(3x^2-3)\cdot x-(x^3-3x+2)\cdot 1}{x^2}=\frac{3x^3-3x-x^3+3x-2}{x^2}=\frac{2x^3-2}{x^2}$$

$$f'(2)=\frac{2\cdot 8-2}{4}=\frac{16-2}{4}=\frac{14}{4}$$

$$f(2)=\frac{8-6+2}{2}=\frac{2+2}{2}=2$$

$$\frac{28}{4}+\frac{16}{4}=\frac{44}{4}=11$$

$$y=\frac{14}{4}(x-2)+2$$

$$-\frac{28}{4}+\frac{16}{4}=$$

$$y=\frac{14}{4}x-\frac{28}{4}+2$$

$$y=\frac{14}{4}x-3$$

$$a=\frac{14}{4}\qquad b=-3$$

Zdający, którego rozwiązanie prezentujemy w Przykładzie 45R, poprawnie oblicza drugą współrzędną punktu P, ale w dalszej części rozwiązania popełnia błąd przy wyznaczaniu pochodnej funkcji f, która jest ilorazem funkcji wielomianowych.

Przykład 45R.

$$f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x}\qquad P(2,y)\qquad x_0=2\qquad x\neq 0$$

$$y=\frac{8-6+2}{2}$$

$$y=\frac{4}{2}$$

$$y=2$$

$$P(2,2)$$

$$f'(x)=\frac{(3x^2-3)x-(x^3-3x+2)\cdot 1}{x^2}$$

$f'(x) = 3x^3 - 3x - x^3 + 3x - 2$

$f'(x) = 2x^3 - 2$

$a = f'(x_0)$ $\quad a = 2 \cdot 2^3 - 2$

$a = 2 \cdot 8 - 2$

$a = 14$

$y = ax + b$

$y = 14x + b$

$2 = 14 \cdot 2 + b$

$2 = 28 + b$

$b = -26$

$y = 14x - 26$

Zadanie 1. okazało się dla maturzystów równie łatwe, co zadanie 4. Poziom wykonania tego zadania wyniósł 48%.– podobnie jak w roku 2023. Zadania o kontekście praktycznym / realistycznym występują w arkuszach od roku 2022. Tegoroczne zadanie nawiązywało do procesu stygnięcia kawy. Na podstawie podanej zależności temperatury kawy od czasu i podanych kilku dodatkowych informacji, dotyczących m.in. warunków początkowych, należało obliczyć temperaturę kawy w zadanej chwili. Zadanie sprawdzało umiejętność wykorzystania przez zdającego informacji podanych w tekście matematycznym, odpowiedniej ich interpretacji, jak również umiejętności posługiwania się funkcją wykładniczą.

Problem „pod lupą”

Jednym z zadań tegorocznego arkusza egzaminacyjnego dla poziomu rozszerzonego było **zadanie 2.**, które polegało na obliczeniu granicy $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^3-8}{(x-2)^2}$. Za rozwiązanie tego zadania maturzysta mógł otrzymać maksymalnie 2 punkty. Dla maturzysty, który w trakcie nauki realizował rozszerzony program nauczania, jest to zadanie typowe, które bada umiejętność z III obszaru wymagań ogólnych - *Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.* Jednocześnie bada ono umiejętności spoza zakresu podstawowego. Poziom wykonania tego zadania wyniósł 31%, co oznacza, że zadanie okazało się trudne dla zdających.
Nie biorąc pod uwagę różnych technik wykonywania standardowej czynności, jaką jest rozkład wielomianu na czynniki, mamy zasadniczo dwa sposoby rozwiązania tego zadania. Każdy z tych sposobów składa się z dwóch etapów. Pierwszy etap – wspólny dla obydwu sposobów rozwiązania – to ustalenie, że mamy do czynienia z symbolem nieoznaczonym

typu $\frac{0}{0}$ i usunięcie tej nieoznaczoności. Można to zrobić, rozkładając wielomian $x^3 - 8$ na czynniki. Tę czynność także można wykonać różnie. Najszybciej można to zrobić, stosując wzór skróconego mnożenia na różnicę sześcianów

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

Można też zastosować metodę grupowania wyrazów

$$x^3 - 8 = x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + 4x - 8 = x^2(x-2) + 2x(x-2) + 4(x-2) =$$

$$= (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

albo algorytm Hornera

	1	0	0	-8
2	1	2	4	0

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

Po tym rozkładzie możemy zapisać rozważaną granicę w postaci $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)^2}$, a następnie skrócić ułamek algebraiczny $\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)^2}$, zapisując go w postaci $\frac{x^2+2x+4}{x-2}$. Otrzymujemy w ten sposób granicę $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2+2x+4}{x-2}$, w której nie występuje już nieoznaczoność, gdyż licznik ułamka $\frac{x^2+2x+4}{x-2}$ dąży, przy x dążącym do 2 z lewej strony, do 12, a mianownik do 0 z lewej strony. Zatem $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2+2x+4}{x-2} = -\infty$.

Drugi ze sposobów obliczenia tej granicy to wykorzystanie twierdzenia de l'Hospitala. Twierdzenie to jest poza zakresem wymagań szkoły średniej, jednak część maturzystów je stosowała. Twierdzenie to możemy zastosować, gdyż spełnione są w przypadku tej granicy założenia tego twierdzenia, w szczególności występuje nieoznaczoność typu $\frac{0}{0}$. Po zastosowaniu reguły de l'Hospitala otrzymujemy granicę $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{3x^2}{2x-4}$, która jest równa $(-\infty)$.

Przykład 100R ilustruje poprawne obliczenie tej granicy pierwszym sposobem, a przykład 101R – drugim.

W Przykładzie 100R zdający nie zapisał, że ma do czynienia z nieoznaczonością typu $\frac{0}{0}$, ale rozłożył licznik na czynniki, korzystając ze wzoru na różnicę sześcianów, i skrócił ułamek. Następnie poprawnie ustalił, do czego dążą licznik i mianownik ułamka $\frac{x^2+2x+4}{x-2}$, i na tej podstawie zapisał poprawny wynik końcowy.

Przykład 100R.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2+2x+4}{x-2} = \left[\frac{12}{0^-}\right] = -\infty$$

W kolejnym przedstawionym rozwiązaniu (Przykład 101R) maturzysta zawarł informację o nieoznaczoności $\frac{0}{0}$. Poprawnie też zastosował regułę de l'Hospitala i obliczył granicę. W tym rozwiązaniu nie zasygnalizował jedynie, że stosuje regułę de l'Hospitala.

Przykład 101R.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\overset{\to 0}{x^3-8}}{\underset{\searrow 0}{(x-2)^2}}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\overset{\to 12}{3x^2}}{\underset{\searrow 0^-}{2(x-2)\cdot 1}}=-\infty$$

Kolejne przykłady ilustrują błędy, jakie zdający popełniali najczęściej w tym zadaniu. Przykład 102R pokazuje, jak ważne jest sprawne i bezbłędne operowanie wzorami skróconego mnożenia. Zdający na początku poprawnie ustalił, że ma do czynienia z symbolem nieoznaczonym typu $\frac{0}{0}$. Jednak podczas rozkładu wielomianu x^3-8 na czynniki popełnił błąd i zamiast poprawnego rozkładu $(x-2)(x^2+2x+4)$ otrzymał $(x-2)(x^2-2x+8)$. Dalej, konsekwentnie do popełnionego błędu, ustalił, do czego dążą licznik i mianownik ułamka $\frac{x^2-2x+8}{x-2}$, gdy $x\to 2^-$, i wreszcie wyznaczył wynik końcowy.

Przykład 102R.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-8}{(x-2)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x^3-2^3)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x^2-2x+8)}{(x-2)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-2x+8}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-2x+8}{x-2}=\left[\frac{8}{0^-}\right]=-\infty$$

W Przykładzie 103R maturzysta popełnił tylko jeden (ale za to istotny) błąd. Wszystko, co zapisał do ostatniego znaku równości, jest poprawne; w szczególności zdający poprawnie ustalił, do czego dążą licznik i mianownik ułamka $\frac{x^2-2x+4}{x-2}$, gdy $x\to 2^-$. Jednak wynik końcowy, jaki zapisał, jest błędny.

Przykład 103R.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-8}{(x-2)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-2^3}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{(x-2)^{\cancel{2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x^2+2x+4)}{(x-2)}=\frac{4+4+4}{0^-}=\frac{12}{0^-}=0$$

Z podobną sytuacją mamy do czynienia w Przykładzie 104R. Tutaj maturzysta popełnił dwa błędy – oba istotne w rozwiązaniu tego zadania. Pierwszy etap rozwiązania wykonał poprawnie, ale błędnie ustalił, do czego dąży mianownik ułamka $\frac{x^2-2x+4}{x-2}$, gdy $x\to 2^-$. Następnie błędnie ustalił wynik końcowy. Powinien zapisać – konsekwentnie do popełnionego błędu – wynik końcowy $+\infty$.

Przykład 104R.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-8}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+\cancel{8x}+2x+4)}{(x-2)^{\cancel{2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+2x+4}{x-2}=\left\{\frac{12^+}{0^+}\right\}=12$$

Przykład 105R to rozwiązanie, w którym zdający popełnił dwa błędy w pierwszym etapie rozwiązania. Pierwszym błędem było niepoprawne zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy. Zamiast x^2-4x+4 zdający zapisał błędnie x^2-2x+4. Kolejnym błędem było zastosowanie reguły de l'Hospitala w sytuacji, w której zastosować tej reguły nie można. Gdy $x\to 2^-$, to mianownik ułamka $\frac{x^3-8}{x^2-2x+4}$ nie dąży do zera. Błąd ten powoduje, że dalsza część rozwiązania staje się bezwartościowa. Decydując się na zastosowanie jakiegoś twierdzenia, trzeba koniecznie znać jego założenia, a zatem umieć odróżnić sytuację, gdy można to twierdzenie zastosować, od tej, gdy nie można zastosować twierdzenia ze względu na niespełnienie założeń. Uwaga ta jest ogólna i dotyczy nie tylko opisanej tu sytuacji.

Przykład 105R.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-8}{(x-2)^2}=$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-8}{x^2-2x+4}$$

Korzystając z twierdzenia de l'Hospitala $\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to n}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3x^2}{2x-2}=\frac{3\cdot 4}{2\cdot 2-2}=6$$

Kolejne Przykłady 106R i 107R przedstawiają rozwiązania, w których zdający nie wykazują się dostatecznymi umiejętnościami dotyczącymi obliczania granic funkcji.
W Przykładzie 106R autor rozwiązania zastosował co prawda poprawnie wzór na kwadrat różnicy i zapisał granicę w postaci $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^3-8}{x^2-4x+4}$, jednak dalej popełnił błąd rachunkowy przy wyłączaniu x^2 w liczniku. Próbując obliczyć tę granicę, albo w ogóle nie analizował, do czego dążą licznik i mianownik ułamka $\frac{x^3-8}{x^2-4x+4}$, albo zrobił to błędnie. Trzecia linia rozwiązania, w której wyłączył z licznika i z mianownika czynnik x^2, jest błędna. Zapisy w mianowniku wskazują, że zdający błędnie przyjął, że ułamki $\frac{4}{x}$ i $\frac{4}{x^2}$ dążą do zera. Postąpił w tym momencie tak, jakby obliczał granicę w punkcie niewłaściwym.

Przykład 106R.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^3-8}{(x-2)^2} =$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{x^3-8}{x^2-4x+4} =$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{\cancel{x^2}(x-8)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{-6}{1} = -6$$

Kolejny Przykład 107R także przedstawia rozwiązanie błędne.
Przekształcenia dokonane przez maturzystę w tym rozwiązaniu, pomijając już brak zapisu symbolu granicy po pierwszym znaku równości, wskazują, że zdający próbuje obliczyć granice ułamków $\frac{8}{x^2}$, $\frac{4}{x}$ i $\frac{4}{x^2}$ w punkcie niewłaściwym, a jednocześnie nie postępuje tak z wyrażeniem x.

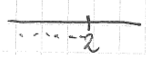
Przykład 107R.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^3-8}{x^2-4x+4} = \frac{x^2\left(x-\frac{8}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{x}{1} = 2^-$$

Ostatnie – także błędne – rozwiązanie tego zadania przedstawiamy w przykładzie 108R.
Postawienie zbędnego znaku równości po symbolu granicy jest być może tylko zwykłą usterką przy przepisywaniu, ale może też świadczyć o niezrozumieniu stosowanej symboliki. Najbardziej wartościowy i zrozumiały fragment tego rozwiązania to rysunek, z którego można wywnioskować, że maturzysta wie, że oblicza lewostronną granicę w punkcie 2. Pozostałe zapisy zdającego nie są już jasne, bo jeśli symbol $\oplus$ miałby oznaczać, że wyrażenie dąży do zera z prawej strony, to wtedy użycie tego symbolu w liczniku ułamka jest błędne. Wynik końcowy także jest błędny.

Przykład 108R.

$$\lim_{x \to 2^-} = \frac{x^3-8 \ \oplus}{(x-2)^2 \ \oplus} = +\infty$$



WNIOSKI I REKOMENDACJE

POZIOM PODSTAWOWY

1. Wyniki egzaminu maturalnego na poziomie podstawowym wskazują, że do zadań, w których zdający osiągnęli bardzo dobre rezultaty, należą przede wszystkim zadania jednoetapowe, osadzone w typowym kontekście.
2. Najlepsze wyniki maturzyści osiągnęli w zadaniach zamkniętych.
3. Maturzyści lepiej poradzili sobie z zadaniami, w których należało posłużyć się definicją lub zastosować znany algorytm, niż z zadaniami, które wymagały zaplanowania strategii rozwiązania, zbadania własności podanego modelu lub uzasadnienia tezy twierdzenia.
4. Największe trudności (poziom wykonania – 23%) sprawiło zdającym zadanie wymagające posłużenia się związkiem między objętościami brył podobnych.
5. Dużo lepiej niż w roku poprzednim wypadło zadanie na dowodzenie, którego tematem była podzielność w zbiorze liczb całkowitych.
6. Jedną z głównych przyczyn niepowodzeń na egzaminie maturalnym z matematyki jest brak odpowiedniej sprawności rachunkowej, słaba znajomość praw działań oraz własności działań w zbiorze liczb rzeczywistych, nieuwaga zdających skutkująca popełnianiem błędów w obliczeniach lub w przekształceniach algebraicznych, często nieskomplikowanych lub też brak refleksji nad sensownością otrzymanego wyniku liczbowego. Warto byłoby kształtować świadomość, że sprawdzanie poprawności oraz realności otrzymanych wyników jest częścią rozwiązania zadania.
7. Szczególną uwagę w nauczaniu matematyki warto poświęcić rozważaniom zagadnień kilkuetapowym. Nie do przecenienia jest kształcenie umiejętności opracowywania, a potem przeprowadzania logicznego ciągu następujących po sobie działań.

POZIOM ROZSZERZONY

1. Najlepsze wyniki zdający uzyskali w zadaniach sprawdzających umiejętność stosowania wzoru na zamianę podstawy logarytmu oraz wzorów na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi, stosowania funkcji wykładniczej w zagadnieniach o kontekście realistycznym oraz stosowania definicji pochodnej funkcji, podawania interpretacji geometrycznej pochodnej.
2. Z rozwiązaniem zadań, w których należy wykorzystać znany algorytm, maturzyści poradzili sobie znacznie lepiej, niż z zadaniami wymagającymi zaplanowania strategii rozwiązania, modelowania matematycznego czy uzasadnieniem postawionej tezy.
3. Wyniki egzaminu maturalnego wyraźnie wskazują, że najwięcej trudności na egzaminie z matematyki sprawiają maturzystom zadania z zakresu geometrii, a szczególnie te zadania, w których wymagane jest uzasadnienie prawdziwości tezy.
4. Egzamin ujawnił niski poziom opanowania przez zdających umiejętności z zakresu wymagania *Rozumowanie i argumentacja*; dotyczy to głównie zadań, w których należało stworzyć strategię rozwiązania, łącząc w spójną, logicznie uporządkowaną całość kilka pojedynczych umiejętności. Wskazane jest zatem, aby doskonalić z uczniami rozwiązywanie zadań różnymi sposobami, ukazując tym samym rozmaitość strategii rozwiązywania problemów matematycznych.
5. Na wynik egzaminu z matematyki na poziomie rozszerzonym znacząco wpływa brak sprawności rachunkowej oraz problemy z poprawnym wykonywaniem obliczeń rachunkowych.

6. Prawie 10% zdających uzyskało 0 pkt, co świadczy o daleko nieprzemyślanym wyborze matematyki jako przedmiotu dodatkowego zdawanego na egzaminie maturalnym i/lub niedostatecznie solidnym przygotowaniu do egzaminu.