CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

OKRĘGOWA KOMISJA EGZAMINACYJNA W POZNANIU

Rodzaj dokumentu:	**Sprawozdanie za rok 2023** **województwo lubuskie**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy** **Poziom rozszerzony**
Terminy egzaminów:	8 maja 2023 r. – poziom podstawowy 12 maja 2023 r. – poziom rozszerzony
Data publikacji dokumentu:	19 września 2023 r.

Opracowanie
Piotr Hess (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Hubert Rauch (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Ewa Ludwikowska (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku)
Mieczysław Fałat (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu)

Redakcja
dr Wioletta Kozak (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Opracowanie techniczne
Andrzej Kaptur (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Współpraca
Beata Dobrosielska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Agata Wiśniewska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Pracownie ds. Analiz Wyników Egzaminacyjnych okręgowych komisji egzaminacyjnych

Opracowanie dla województwa lubuskiego

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
Izabela Szafrańska
Anna Sperling

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. 22 536 65 00, fax 22 536 65 04
e-mail: sekretariat@cke.gov.pl
www.cke.gov.pl

SPIS TREŚCI

Poziom podstawowy

Opis arkusza egzaminu maturalnego

W roku szkolnym 2022/2023 egzamin maturalny z matematyki został przeprowadzany na podstawie wymagań egzaminacyjnych określonych w rozporządzeniu Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r.[1]

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie podstawowym zawierał ogółem 34 zadania (ujęte w 31 grup/wiązek tematycznych), na które składało się 27 zadań zamkniętych i 7 zadań otwartych. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności ujęte w czterech obszarach wymagań ogólnych:

I. Sprawność rachunkowa (4 zadania zamknięte łącznie za 5 punktów).
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji (5 zadań zamkniętych łącznie za 5 punktów).
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (19 zadań łącznie za 26 punktów, w tym: 15 zadań zamkniętych łącznie za 16 punktów oraz 4 zadania otwarte łącznie za 10 punktów).
IV. Rozumowanie i argumentacja (6 zadań łącznie za 10 punktów, w tym: 3 zadania zamknięte łącznie za 3 punkty oraz 3 zadania otwarte łącznie za 7 punktów).

Zdający mogli korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych na egzamin maturalny z matematyki* oraz linijki, cyrkla i kalkulatora prostego.

Za rozwiązanie wszystkich zadań można było otrzymać 46 punktów.

Dane dotyczące populacji zdających

TABELA 1. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZU STANDARDOWYM*

Liczba zdających (Formuła 2023)		**3 141**
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	ze szkół na wsi	0
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	962
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	483
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	1 696
	ze szkół publicznych	2 924
	ze szkół niepublicznych	217
	kobiety	2 066
	mężczyźni	1 075
	bez dysleksji rozwojowej	2 866
	z dysleksją rozwojową	275
	rozwiązujący zadania w języku litewskim	0
Liczba zdających (Formuła 2023), o których mowa w art. 2 ust. 1 ustawy[2] (obywatele Ukrainy)		**7**

* Dane w tabeli dotyczą tegorocznych absolwentów.

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (poz. 1246).
[2] Ustawa z dnia 12 marca 2022 r. o pomocy obywatelom Ukrainy w związku z konfliktem zbrojnym na terytorium tego państwa (Dz.U. z 2023 r. poz. 103, z późn. zm.).

TABELA 2. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZACH DOSTOSOWANYCH

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	24
	słabowidzący	6
	niewidomi	0
	słabosłyszący	2
	niesłyszący	2
	z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym	0
	z zaburzeniem widzenia barw	0
	Ogółem	**34**

Przebieg egzaminu

TABELA 3. INFORMACJE DOTYCZĄCE PRZEBIEGU EGZAMINU

Termin egzaminu			8 maja 2023
Czas trwania egzaminu dla arkusza standardowego			180 minut
Liczba szkół			51
Liczba zespołów egzaminatorów			2
Liczba egzaminatorów			54
Liczba obserwatorów[3] (§ 8 ust. 1)			5
Liczba unieważnień[4]	w przypadku:		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	0
	art. 44zzv pkt 3	zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu	0
	art. 44zzw ust. 1	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego	9
	art. 44zzy ust. 10	niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)	0
Liczba wglądów[4] (art. 44zzz)			36

[3] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 1 sierpnia 2022 r. w sprawie egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2022 r. poz. 1644) – podano łącznie dla Formuły 2023 i Formuły 2015.
[4] Ustawa z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz.U. z 2022 r. poz. 2330).

Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających

WYKRES 1. ROZKŁAD WYNIKÓW ZDAJĄCYCH

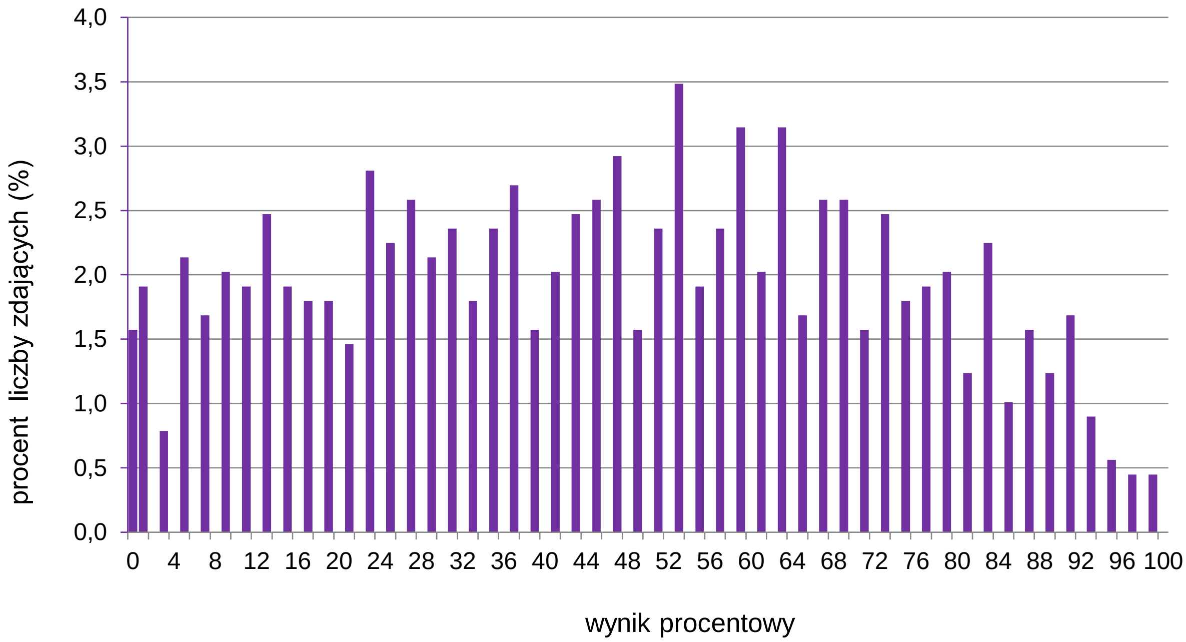


TABELA 4. WYNIKI ZDAJĄCYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
Ogółem Formuła 2023	**3 141**	**9**	**100**	**72**	**98**	**69**	**24**
obywatele Ukrainy	7	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

* Dane dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów, którzy przystąpili do wszystkich egzaminów obowiązkowych. Parametry statystyczne są podane dla grup liczących 30 lub więcej zdających.

Poziom wykonania zadań

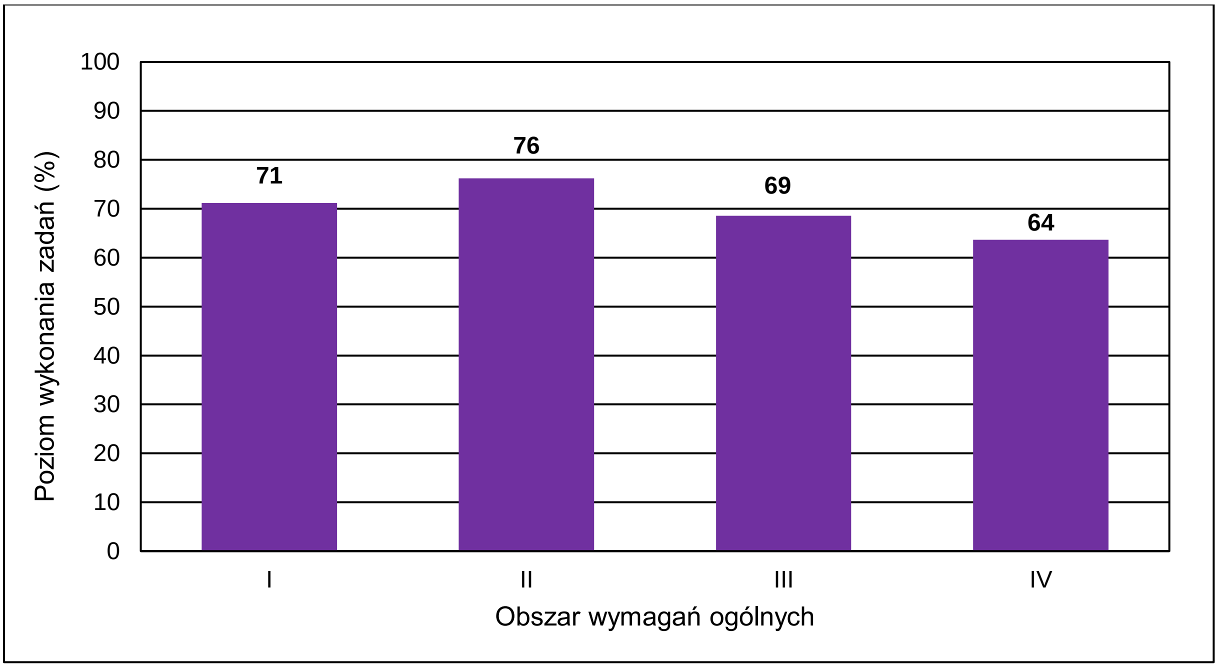
TABELA 5. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ

Wymagania egzaminacyjne 2023			
Nr zad.	**Wymagania ogólne**	**Wymagania szczegółowe**	**Poziom wykonania zadania (%)**
1.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: I.7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: […] $\lvert x+3\rvert \geq 4$.	69
2.	I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.	81
3.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych.	41
4.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: I.1) wykonuje działania ([…] logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.	89
5.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2.	73
6.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: III.3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą.	67
7.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x)=0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej […].	82
8.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: III.6) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)}=0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.	74
9.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x)=0$ dla wielomianów […] takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej […] metodą grupowania.	74

10.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: IV.1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych […].	83
11.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: IV.2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.	91
12.1.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę […].	90
12.2.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: […] największe […] wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym […].	61
12.3.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: […] przedziały monotoniczności […].	94
13.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.	76
14.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.11) wykorzystuje własności funkcji […] kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych […].	76
15.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VI.1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.	96
16.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VI.6) wykorzystuje własności ciągów, w tym […] geometrycznych, do rozwiązywania zadań […].	83
17.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VI.4) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.	45
18.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji […] tangens dla kątów od $0°$ do $180°$ […].	80
19.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ […].	46
20.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: VIII.4) korzysta z własności kątów i przekątnych w […] rombach […].	59
21.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.	71

22.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VIII.8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów.	73
23.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: IX.1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje.	71
24.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniem prostej na płaszczyźnie w postaci kierunkowej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład […] równoległość […] do innej prostej […]).	71
25.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: X.2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną; X.3) rozpoznaje w graniastosłupach […] kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) […]. VII.4) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty […]).	58
26.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: X.4) oblicza objętości i pola powierzchni […] ostrosłupów, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.	49
27.	I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych.	88
28.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XI.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych.	79
29.	I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną i […] znajduje medianę […].	67
30.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.	66
31.1.	I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: V.3) […] interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą […] wzorów […]; V.2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.	54
31.2.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XIII) rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.	51

WYKRES 2. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ W OBSZARZE WYMAGAŃ OGÓLNYCH



POZIOM ROZSZERZONY

Opis arkusza egzaminu maturalnego

W roku szkolnym 2022/2023 egzamin maturalny z matematyki został przeprowadzany na podstawie wymagań egzaminacyjnych określonych w rozporządzeniu Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r.[6]

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie rozszerzonym zawierał ogółem 14 zadań otwartych (ujętych w 13 grup/wiązek tematycznych). Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności ujęte w następujących obszarach wymagań ogólnych:

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji (1 zadanie otwarte za 2 punkty).
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (5 zadań otwartych łącznie za 20 punktów).
IV. Rozumowanie i argumentacja (8 zadań otwartych łącznie za 28 punktów).

Zdający mogli korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych na egzamin maturalny z matematyki* oraz linijki, cyrkla i kalkulatora prostego.

Za rozwiązanie wszystkich zadań można było otrzymać 50 punktów.

Dane dotyczące populacji zdających

TABELA 6. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZU STANDARDOWYM*

Liczba zdających (Formuła 2023)		**890**
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	ze szkół na wsi	0
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	165
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	136
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	589
	ze szkół publicznych	841
	ze szkół niepublicznych	49
	kobiety	435
	mężczyźni	455
	bez dysleksji rozwojowej	801
	z dysleksją rozwojową	89
	rozwiązujący zadania w języku litewskim	0
Liczba zdających (Formuła 2023), o których mowa w art. 2 ust. 1 ustawy[7] (obywatele Ukrainy)		**0**

* Dane w tabeli dotyczą tegorocznych absolwentów.

[6] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (poz. 1246).
[7] Ustawa z dnia 12 marca 2022 r. o pomocy obywatelom Ukrainy w związku z konfliktem zbrojnym na terytorium tego państwa (Dz.U. z 2023 r. poz. 103, z późn. zm.).

TABELA 7. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZACH DOSTOSOWANYCH

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	9
	słabowidzący	0
	niewidomi	0
	słabosłyszący	2
	niesłyszący	1
	z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym	0
	z zaburzeniem widzenia barw	0
	Ogółem	**12**

Przebieg egzaminu

TABELA 8. INFORMACJE DOTYCZĄCE PRZEBIEGU EGZAMINU

Termin egzaminu			12 maja 2023
Czas trwania egzaminu dla arkusza standardowego			180 minut
Liczba szkół			44
Liczba zespołów egzaminatorów			1
Liczba egzaminatorów			27
Liczba obserwatorów[8] (§ 8 ust. 1)			5
Liczba unieważnień[9]	w przypadku:		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	0
	art. 44zzv pkt 3	zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu	0
	art. 44zzw ust. 1	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego	0
	art. 44zzy ust. 10	niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)	0
Liczba wglądów[9] (art. 44zzz)			18

[8] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 1 sierpnia 2022 r. w sprawie egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2022 r. poz. 1644) – podano łącznie dla Formuły 2023 i Formuły 2015.
[9] Ustawa z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz.U. z 2022 r. poz. 2230).

Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających

WYKRES 3. ROZKŁAD WYNIKÓW ZDAJĄCYCH

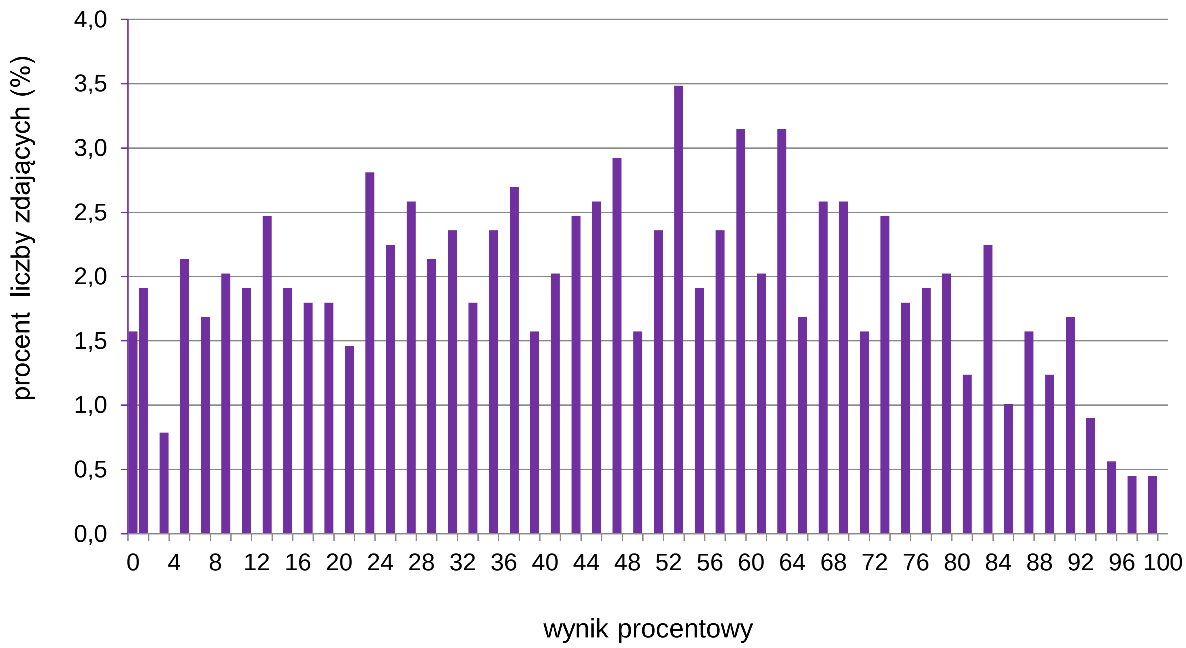


TABELA 9. WYNIKI ZDAJĄCYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
Ogółem Formuła 2023	**890**	**0**	**100**	**48**	**54**	**47**	**26**

* Dane dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów, którzy przystąpili do wszystkich egzaminów obowiązkowych. Parametry statystyczne są podane dla grup liczących 30 lub więcej zdających.

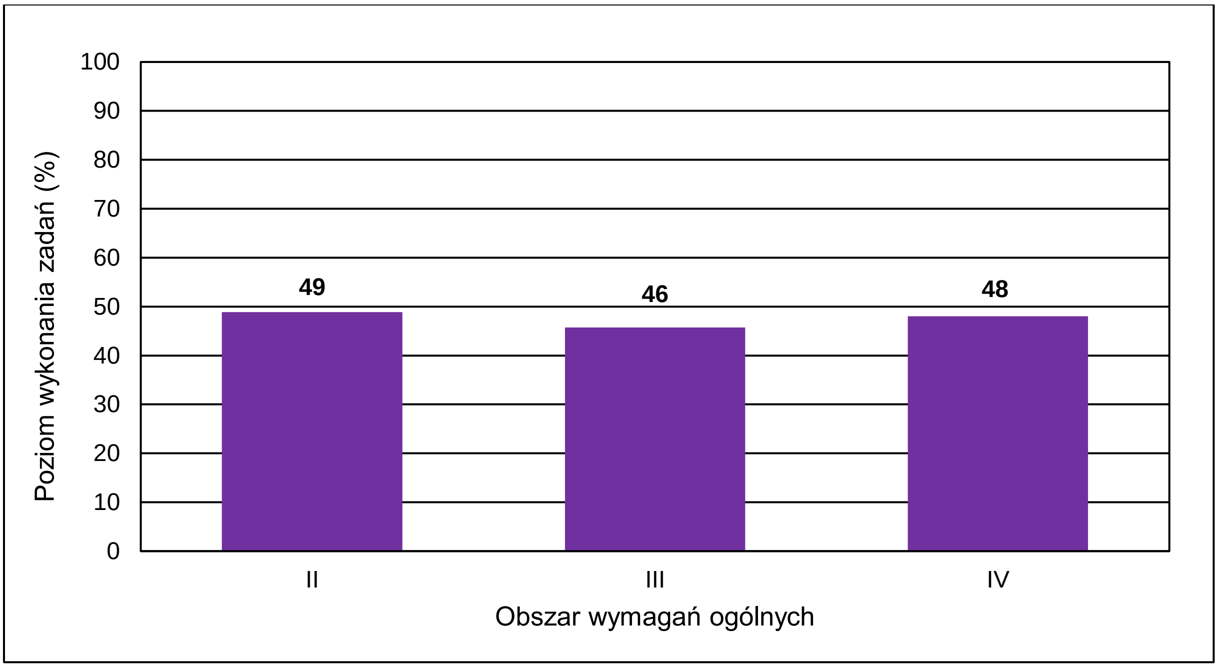
Poziom wykonania zadań

TABELA 10. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ

Wymagania egzaminacyjne 2023			
Nr zad.	**Wymagania ogólne**	**Wymagania szczegółowe** *Gdy wymaganie dotyczy treści zakresu podstawowego szkoły ponadpodstawowej – dopisano (P).*	**Poziom wykonania zadania (%)**
1.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.13) (P) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.	49
2.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XII.2) stosuje schemat Bernoullego.	67
3.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: XIII.2) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu.	58
4.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: II.3) korzysta ze wzorów na: $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3+b^3 i a^3-b^3.	64
5.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VIII.3) przeprowadza dowody geometryczne.	31
6.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VII.6) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4\cos 2x \cos 5x = 2\cos 7x + 1$.	40
7.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: X.1) (P) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się. X.5) wyznacza przekroje sześcianu […].	45
8.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VIII.1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.	38
9.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: II.1) (P) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2. III.4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o stopniu trudności nie większym niż: $2\|x+3\|+3\|x-1\|=13$, $\|x+2\|+2\|x-3\|<11$.	53

10.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VI.2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.	35
11.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: III.3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.	42
12.1.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: I.1) stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu. I.9) (P) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.	75
12.2.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: XIII.3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu; XIII.4) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji.	54
13.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VII.5) korzysta ze wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych. IX.3) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej.	36

WYKRES 4. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ W OBSZARZE WYMAGAŃ OGÓLNYCH



KOMENTARZ (DOTYCZY WYNIKÓW KRAJOWYCH)

Analiza jakościowa zadań – poziom podstawowy

Wśród 27 zadań **zamkniętych** arkusza egzaminacyjnego 4 zadania okazały się bardzo łatwe dla zdających (poziom wykonania powyżej 90%), 17 zadań można uznać za łatwe dla zdających (poziom wykonania od 70% do 89%), a pozostałe 6 zadań zamkniętych okazało się umiarkowanie trudnych (poziom wykonania od 50% do 69%).

Na podstawie analizy wskaźników poziomu wykonania zadań (Tabela 5.) można stwierdzić, że wśród 7 zadań **otwartych** żadne nie było bardzo łatwe dla tegorocznych maturzystów, tylko 2 zadania okazały się łatwe dla zdających, 3 zadania były umiarkowanie trudne dla zdających, a 2 zadania okazały się trudne dla zdających (poziom wykonania wynosił od 20% do 49%).

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najsłabiej

Na poziomie podstawowym można zauważyć, że największą trudność sprawiły zdającym zadania badające umiejętność przeprowadzenia rozumowania, dobierania i tworzenia modeli matematycznych oraz tworzenia pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu. Są to umiejętności opisane, odpowiednio, w IV oraz III obszarze wymagań ogólnych.

Najtrudniejszym zadaniem w arkuszu okazało się **zadanie 3.**, w którym należało uzasadnić podzielność przez 8 liczby postaci $(2n+1)^2-1$, określonej dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Dla tego zadania poziom wykonania wyniósł 43%. Więcej miejsca na analizę trudności, z jakimi borykali się maturzyści przy rozwiązywaniu zadania 3., poświęcimy w dalszej części tego sprawozdania (zob. *Problem pod lupą*).

Trudne dla zdających (poziom wykonania równy 48%) okazało się dwupunktowe **zadanie 17.**, w którym należało obliczyć kwotę pierwszej raty pożyczki, znając wielkość tej pożyczki, liczbę rat oraz zależność między kwotami kolejnych rat. Zdający najczęściej zauważali, że kolejne raty tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $r=-30$, a kwota pożyczki jest sumą osiemnastu początkowych wyrazów tego ciągu. Korzystali zatem ze wzorów na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisywali równanie z jedną niewiadomą a_1 (kwotą pierwszej raty). Taki sposób rozwiązania jest przedstawiony w Przykładach 1. oraz 2.

Przykład 1.

$(a_1, a_1+30, a_1-60, \ldots, a_{18})$

$S_{18} = 8910$

$r = -30$

$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$

$8910 = \frac{2a_1 + (18-1)(-30)}{2} \cdot 18$

$8910 = \frac{(2a_1 - 540 + 30)18}{2} \quad / \cdot 2$

$17820 = 36a_1 - 9180 \quad / + 9180$

$27000 = 36a_1 \quad /:36$

$750 = a_1$

Spr:

$S_{18} = \frac{2 \cdot 750 + (18-1) \cdot -30}{2} \cdot 18$

$S_{18} = \frac{(1500 - 510) \cdot 18}{2}$

$S_{18} = \frac{990 \cdot 18}{2}$

$S_{18} = 8910$

Odp: Pierwsza rata wynosiła 750 zł

Przykład 2.

x - ~~pierwsza~~ kwota pierwszej raty

$8910 = x + x-30 + x-60 + \ldots + x-480 + x-510$

$8910 = \frac{x + x - 510}{2} \cdot 18$

$x - 255 = 495$

$x = 750$ [zł]

odp. Pierwsza rata wynosiła 750 zł.

Często zdający, którzy podjęli próbę rozwiązania tego zadania, błędnie przyjmowali, że ciąg kolejnych rat jest ciągiem arytmetycznym o różnicy 30 (Przykład 3.).

Przykład 3.

kwota pierwszej raty - a_1

$$\frac{2\cdot a_1 + (18-1)\cdot 30}{\cancel{2}} \cdot \cancel{18}^{9} = 8910 \quad |:9$$

$$2a_1 + 17\cdot 30 = 990 \quad |:2$$

$$a_1 + 255 = 495$$

$$a_1 = 495 - 255$$

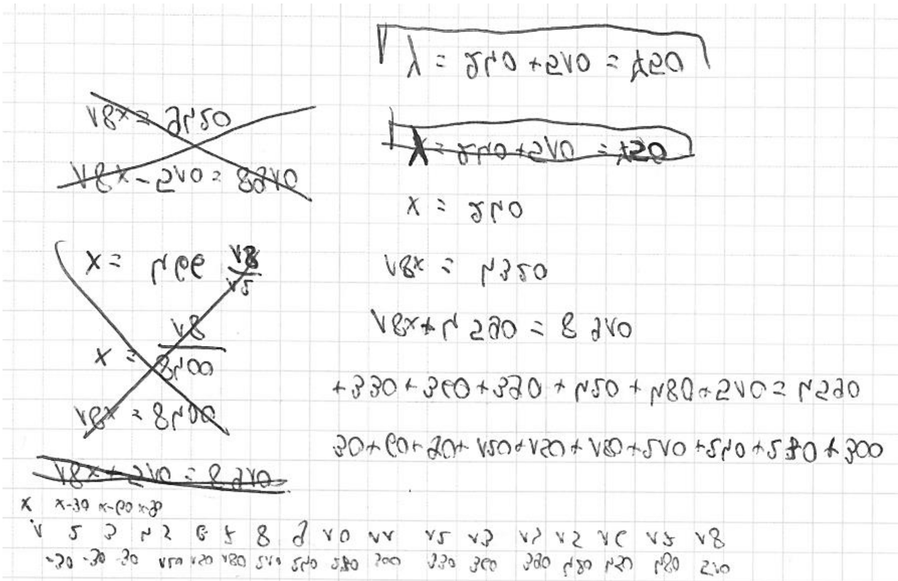
$$a_1 = 240$$

Odp: kwota pierwszej raty = 240 zł

Inny sposób rozwiązania **zadania 17.** (podobny do sposobu opisanego wyżej) bazuje na rozpatrzeniu osiemnastowyrazowego ciągu arytmetycznego o różnicy $r = 30$, w którym a_1 oznacza ratę o najmniejszej wysokości (ciąg „odwróconych” rat). Zastosowanie wzoru na sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego, zapisanie poprawnego równania z niewiadomą a_1 oraz rozwiązanie tego równania prowadzi do $a_1 = 240$. Dalej należy zinterpretować otrzymaną liczbę jako kwotę ostatniej raty i obliczyć pierwszą ratę, korzystając ze wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego.

Przykład 4. ilustruje rozwiązanie, w którym zdający rozpatruje ciąg różnic bezwzględnych poszczególnych rat i raty pierwszej, oblicza wysokość najniższej raty, a następnie wysokość pierwszej raty. Usterką jest pominięcie składnika 450 w zapisie.

Przykład 4.



Największą inwencją twórczą wykazali się ci zdający, którzy „odrzucili” wzory dotyczące ciągów arytmetycznych. Ich rozwiązania bywały nietypowe (Przykład 5.).

Przykład 5.

$8910 : 18 = 495$

$$\left.\begin{array}{ll} 1 & 750 \\ 2 & 720 \\ 3 & 690 \\ 4 & 660 \\ 5 & 630 \\ 6 & 600 \\ 7 & 570 \\ 8 & 540 \\ 9 & 510 \\ 10 & 480 \\ 11 & 450 \\ 12 & 420 \\ 13 & 390 \\ 14 & 360 \\ 15 & 330 \\ 16 & 300 \\ 17 & 270 \\ 18 & 240 \end{array}\right\} = 8910$$

odp. Pierwsza rata wynosiła 750 zł.

W powyższym rozwiązaniu kluczowe dla zdającego było określenie średniej kwoty jednej raty. Zdający otrzymał liczbę 495, a ponieważ znał różnicę kolejnych rat równą 30 oraz wiedział, że jest parzysta liczba rat, więc otrzymał wysokości dwóch kolejnych rat: ratę dziesiątą (równą $510 = 495 + 15$) oraz ratę dziewiątą (równą $480 = 495 - 15$).
Do zakończenia rozwiązania pozostało zatem zapisać wysokości pozostałych szesnastu rat: ośmiu wyższych od kwoty 510 złotych i ośmiu niższych od kwoty 480 złotych.

Inne nietypowe podejście do tego problemu prezentujemy w Przykładzie 6., w którym zdający niemal po gaussowsku ułożył odpowiednie raty w 8 par. Suma kwot w każdej parze była równa $2a - 510$. To ułatwiło dalej obliczenia.

Przykład 6.

1. a
2. $a-30$
3. $a-60$
4. $a-90$
5. $a-120$
6. $a-150$
7. $a-180$
8. $a-210$
9. $a-240$
10. $a-270$
11. $a-300$
12. $a-330$
13. $a-360$
14. $a-390$
15. $a-420$
16. $a-450$
17. $a-480$
18. $a-510$

$a > 510$

$510 \cdot 9 = 4590$

$8910 + 4590 = 13500$

$13500 : 18 = 750$

$a = 750$

pierwsza rata wynosiła 750 zł

W rozwiązaniach zdających pojawiała się średnia kwota raty równa 495 złotych, jednak nie wszyscy potrafili poprawnie zinterpretować tę liczbę. Niewielu zdających zauważało, że dla osiemnastowyrazowego ciągu rat średnia kwota raty jest średnią arytmetyczną wyrazów dziewiątego i dziesiątego (Przykład 7.).

Przykład 7.

$S_{18} = 8910$ $\qquad a_n = a_1 + (n-1)\cdot(-30)$

$śr = \frac{8910}{18} = 495 = \frac{a_9 + a_{10}}{2}$

$a_{10} = a_9 - 30$

$495 = \frac{a_9 + a_9 - 30}{2} = a_9 - 15$

$a_9 = 510$

$\Downarrow$ $\qquad a_9 = a_1 + 8\cdot(-30)$

$a_1 = 510 + 8 \cdot 30 = \underline{\underline{750}}$

pierwsza rata wynosiła 750 zł

spr

$a_n = 750 + (n-1)\cdot(-30)$

$S_{18} = \frac{240+750}{2} \cdot 18 = 8910$

$a_{18} = 750 - 510 = 240$

Jednym z nietypowych podejść do rozwiązania zadania jest zdefiniowanie osiemnastowyrazowego ciągu arytmetycznego o różnicy 30, lub też (-30), o wyrazach nieujemnych i obliczenie sumy wszystkich wyrazów tego ciągu. Jeśli ta suma przewyższa kwotę pożyczki, to poprzez zmniejszenie o odpowiednią kwotę każdej z rat można uzyskać wysokość pierwszej raty. Jeśli natomiast ta suma jest mniejsza niż kwota pożyczki, to wysokość pierwszej raty można uzyskać poprzez zwiększenie o odpowiednią kwotę każdej z rat. Taką strategię rozwiązania prezentowali nieliczni.

W pracach występowały błędy na różnych etapach rozwiązania zadania, począwszy od błędnego przeczytania treści zadania i rozważania ośmiu rat pożyczki zamiast osiemnastu, poprzez błędną interpretację ostatniej raty pożyczki aż do braku refleksji nad otrzymanym rozwiązaniem równania. Tym błędom w czytaniu ze zrozumieniem oraz interpretacji otrzymanych wyników towarzyszyły błędy w stosowaniu wzorów na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego oraz błędy rachunkowe.

Przykład 8. ilustruje rozwiązanie, w którym zdający rozpatruje spłatę pożyczki z błędną liczbą ośmiu rat.

Przykład 8.

Oblicz kwotę pierwszej raty. Zapisz obliczenia.

$a_1 + a_1 + (n-1)\cdot r$

8910 zł → pożyczka

$r = -30$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_8$

$S_8 = 8910$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot(-30)$

$8910 = \frac{2a_1 + (8-1)\cdot(-30)}{\cancel{2}_{1}} \cdot \cancel{8}\,4$

-210

$2227{,}5 = 2a_1 + 7(-30)$

$2227{,}5 = 2a_1 - 210$

$2a_1 = 2437{,}5$

$a_1 = 1218{,}75$

W kolejnym przykładzie (Przykład 9.) przedstawiono rozwiązanie, w którym zdający, po zapisaniu poprawnego równania, skrócił licznik z mianownikiem i „zapomniał” o ilorazie/czynniku równym 9. Można dyskutować nad tym, czy rzeczywiście w trakcie zapisywania odpowiedzi zdający oceniał adekwatność otrzymanej kwoty pierwszej raty do warunków zadania.

Przykład 9.

$$S_{18} = \frac{2a_1+(n-1)r}{2}\cdot n$$
$$8910 = \frac{2a_1+(18-1)\cdot(-30}{\cancel{2}_{1}}\cdot \cancel{18}^{9}$$
$$8910 = 2a_1+17\cdot(-30)$$
$$8910 = 2a_1-510$$
$$9420 = 2a_1 \quad /:2$$
$$\underline{\underline{4710 = a_1}}$$

Odp.: Pierwsza rata wyniosła 4710 zł.

W poniższym rozwiązaniu (Przykład 10.) zdający błędnie założył, że kwota pożyczki jest równa osiemnastemu wyrazowi ciągu rat. Zdającemu zabrakło refleksji nad tym, że otrzymana kwota pierwszej raty przewyższyła kwotę pożyczki.

Przykład 10.

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$a_{18} = a_1 + (18-1)(-30)$$
$$8910 = a_1 + 17\cdot(-30)$$
$$8910 = a_1 + (-510)$$
$$8910 = a_1 - 510$$
$$8910 + 510 = a_1$$
$$9420 = a_1$$

Przykład 11. to rozwiązanie zdającego z typowym błędem rachunkowym w obliczeniu iloczynu $30 \cdot 17$. W tym rozwiązaniu pokutuje brak refleksji zdającego nad rzędem wielkości otrzymanego iloczynu.

Przykład 11.

x – wysokość pierwszej raty

$x,\ x-30,\ x-60, \ldots,\ x-17\cdot 30$ – ciąg arytmetyczny o $a_1=x$ i $r=-30$

$S_{18} = 8910$

$\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n = 8910$, $n=18$

$\frac{a_1+a_{18}}{2}\cdot n = 8910$

$\frac{x+x-30\cdot 17}{\cancel{2}_{1}}\cdot \cancel{18}^{9} = 8910$

$2x-5100 = \frac{\cancel{8910}^{990}}{\cancel{9}_{1}}$

$2x = 990+5100$

$x = \frac{6090}{2} = 3045$

Odp.: Kwota pierwszej raty wyniosła 3045 zł

Przykład 12. to rozwiązanie, w którym zdający uzyskuje wysokość pierwszej raty równą 240 zł. Przy danych warunkach zadania jest to oczywiście kwota zdecydowanie za niska, lecz nie wzbudziło to żadnych podejrzeń u zdającego co do realności/poprawności otrzymanego wyniku.

Przykład 12.

8910 zł 18 rat

1 | 2: −30 | 3: −60 | 4: −90 | 5: −120 | 6: −150 | 7: −180 | 8: −210 | 9: −240 | 10: −270

11: −300 | 12: −330 | 13: −360 | 14: −390 | 15: −420

16: −450 | 17: −480 | 18: −510

4320 : 18 = 240

Odp. Pierwsza rata wynosiła ~~4320 zł~~ 240 zł.

8910−30−60−90−120−150−180−210−240−270−300−330−360−390−420−450−480−510 = 4320

Przykład 13. pokazuje występujący w rozwiązaniach zdających błąd, który polega na przyrównaniu sumy rat do zera.

Przykład 13.

$u+(u-30)+(u-60)+(u-90)+(u-120)+(u-150)+(u-180)+(u-210)+$
$(u-240)+(u-270)+(u-300)+(u-330)+(u-360)+(u-390)+$
$(u-420)+(u-450)+(u-480)+(u-510)=\cancel{18u}$
$=18u-4590$

$4590=18u \quad /:18$

$u=255$

Odp
Pierwsza rata była równa 255

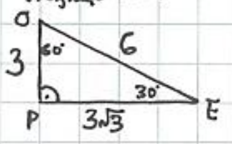
Kolejnym zadaniem, które sprawiło trudności dokładnie połowie populacji zdających (poziom wykonania równy 50%), było jednopunktowe **zadanie 19.** Zadanie sprawdzało umiejętność przekształcenia wyrażenia $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$ do prostszej postaci z zastosowaniem tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Stosunkowo niski poziom wykonania dla tego zadania świadczy o tym, że zdający nie radzą sobie z wyłączaniem wspólnego czynnika przed nawias, szczególnie w sytuacji, gdy w zadaniu występuje notacja funkcji trygonometrycznych.

Kłopot zdającym sprawiły również zadania 26. oraz 31.2. Oba zadania okazały się umiarkowanie trudne dla zdających (poziom wykonania tych zadań był jednakowy i równy 53%).

Zadanie 26. to czteropunktowe zadanie otwarte ze stereometrii, badające umiejętność tworzenia pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu. W tym zadaniu zdający obliczali objętość oraz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, mając daną wysokość ściany bocznej oraz miarę kąta nachylenia tej wysokości do płaszczyzny podstawy ostrosłupa. Obie informacje zostały zilustrowane sugestywnym rysunkiem poglądowym. Na podstawie analizy rozwiązań zdających można zauważyć, że maturzyści mają trudności z budowaniem poprawnej strategii rozwiązania zadania kilkuetapowego. W omawianym zadaniu zbudowaniu poprawnej strategii rozwiązania tego zadania sprzyjała włączona do treści zadania ilustracja graficzna, na której zaznaczono trójkąt prostokątny o kątach $30°, 60°, 90°$, stanowiący „połowę” trójkąta równobocznego o boku równym 6. Oczekiwano, że po analizie własności tego trójkąta albo też po zastosowaniu definicji sinusa i cosinusa podanego kąta $30°$ oraz uwzględnieniu podanej długości przeciwprostokątnej tego trójkąta, zdający poda lub obliczy wysokość ostrosłupa oraz poda lub obliczy długość odcinka łączącego środek krawędzi podstawy ze spodkiem wysokości ostrosłupa i stąd uzyska długość krawędzi podstawy. Następnie, mając już wysokość bryły i długość krawędzi podstawy, obliczy objętość tego ostrosłupa, a po włączeniu do obliczeń podanej wysokości ściany bocznej, obliczy pole powierzchni całkowitej tej bryły. Tak też postępowali zdający, którzy poprawnie rozwiązali to zadanie (Przykład 14.). Warto zwrócić uwagę na to, że zdający rozpoczął rozwiązanie zadania od własnego szkicu trójkąta wyróżnionego na rysunku w treści zadania, po czym, rozwiązując ten trójkąt, pokonał kluczowy etap, który umożliwiał dalej obliczenie objętości i pola powierzchni całkowitej.

Przykład 14.

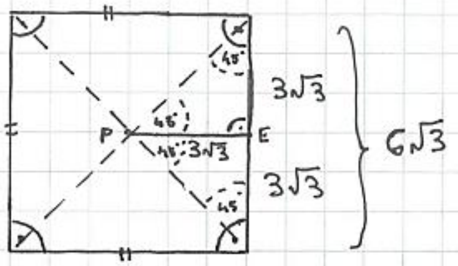
trójkąt $30°, 60°, 90°$, zatem



$\rightarrow H = 3$

Podstawa jest kwadratem a odcinek

$|PE| = \frac{1}{2}a$, $a > 0 \wedge a \in \mathbb{R}$



$a = 6\sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot (6\sqrt{3})^2 \cdot 3 = (6\sqrt{3})^2 = 36 \cdot 3 = 108$

$V = 108$

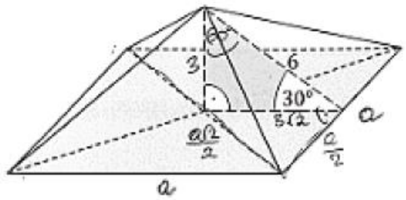
$P_{całk} = P_p + 4 \cdot P_{\Delta ABO}$ $\quad P_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6 = 18\sqrt{3}$

$P_{całk} = (6\sqrt{3})^2 + 4 \cdot 18\sqrt{3} = 108 + 72\sqrt{3}$

$P_{całk} = 108 + 72\sqrt{3}$

Rozwiązanie trójkąta wyróżnionego na rysunku w treści zadania było dla wielu zdających barierą, a popełnione na tym etapie rozwiązania błędy skutkowały niepoprawnymi obliczeniami końcowymi, jak miało to miejsce w poniższym rozwiązaniu (Przykład 15.). Zdający podał poprawną wysokość ostrosłupa oraz błędną długość przyprostokątnej leżącej przy kącie o mierze $30°$, czyli połowę długości krawędzi podstawy. Dalej rozpatrzył trójkąt prostokątny o bokach $3\sqrt{2}$, $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\frac{a}{2}$ i po zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa otrzymał (pewnie zgodnie ze swoimi przewidywaniami) długość krawędzi podstawy ostrosłupa równą $6\sqrt{2}$. Ten zdający popełnił również błąd przy obliczaniu pola powierzchni całkowitej ostrosłupa („niepotrzebny” czynnik 2).

Przykład 15.



$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$

~~$P_p = 2P_p + P_b$~~

$P_c = 2P_p + P_b$

$P_c = 2P_p + Obw_{podst} \cdot H$

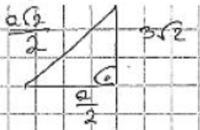
$V = \frac{1}{3} \cdot (6\sqrt{2})^2 \cdot 3 =$

$= \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 3 = 72$

$P_c = 2 \cdot 72 + 6\sqrt{2} \cdot 4 \cdot 3 =$

$= 144 + 24\sqrt{2} \cdot 3 =$

$= 144 + 72\sqrt{2}$



$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (3\sqrt{2})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$\frac{a^2 \cdot 2}{4} = 18 + \frac{a^2}{4}$

$\frac{2a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 18$

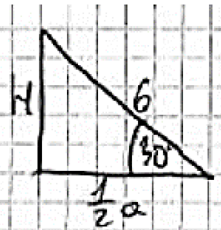
$\frac{a^2}{4} = 18 \;|\cdot 4$

$a^2 = 72$

$a = 6\sqrt{2}$

Kolejne rozwiązanie (Przykład 16.) ilustruje brak refleksji zdającego nad otrzymanym wynikiem cząstkowym. Błędna definicja sinusa kąta ostrego skutkowała otrzymaniem przyprostokątnej, która jest dwa razy dłuższa od przeciwprostokątnej tego trójkąta prostokątnego.

Przykład 16.



H – wysokość ostrosłupa

a – długość krawędzi podstawy

$\sin 30° = \frac{6}{H} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{H} \Rightarrow H = 12$

$\cos 30° = \frac{\frac{1}{2}a}{6} = \frac{a}{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{12}$

$a = 6\sqrt{3}$

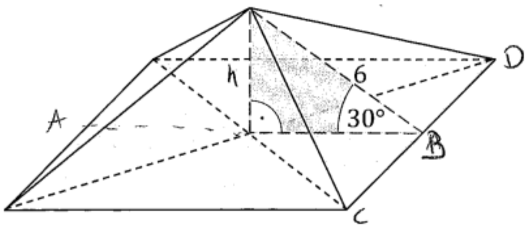
$V = H \cdot a^2 \cdot \frac{1}{3} = 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 3 = 432$

~~$P_c = a^2 + H^2 \, a \, 6 \ldots = 36 \cdot 3 + 6\sqrt{3} \cdot 2 = 108 + 12\sqrt{3}$~~

$P_c = a^2 + 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a = 108 + 4 \cdot 3 \cdot 6\sqrt{3} = 108 + 72\sqrt{3}$

Zdającemu, którego rozwiązanie przedstawiono w Przykładzie 17., zabrakło umiejętności poprawnej interpretacji danych oraz umiejętności rozwiązywania trójkątów prostokątnych. Błędnej analizie długości boków trójkąta prostokątnego towarzyszą błędne obliczenia pola jednej ściany bocznej.

Przykład 17.



Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$

$3\sqrt{2} = a$ $\quad 2\sqrt{2} = 6$ $\quad 2a = 6\sqrt{2}$ $\quad a = 3\sqrt{2}$

$AB = 12\sqrt{2}$

$h = 3\sqrt{2}$

$P_p = 12\sqrt{2} \cdot 12\sqrt{2} = 144 \cdot 2 = 288$

$V = \frac{1}{3} \cdot 288 \cdot 3\sqrt{2}$

$V = 96 \cdot 3\sqrt{2}$

$V = 288\sqrt{2}$

$CD = 12\sqrt{2}$

$P_\Delta = \frac{12\sqrt{2} \cdot 6}{2} = 36$

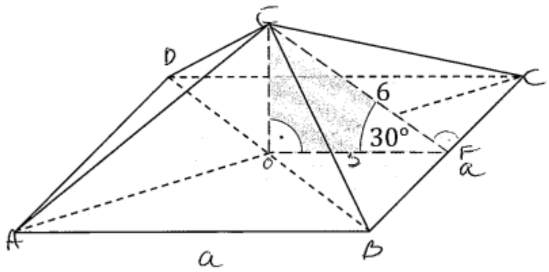
$P_b = 4 \cdot 36 = 144$

$P_c = P_b + P_p = 144 + 288 = 432$

Odp. Pole całkowite $= 432$, a objętość $= 288\sqrt{2}$

Wśród błędnych rozwiązań występowały też takie, w których zdający mylili własności miarowe trójkąta prostokątnego o kątach $30°$, $60°$, $90°$. Efektem tego była „zamiana” wysokości ostrosłupa z połową długości krawędzi podstawy (Przykład 18.). W tym przykładzie warto też zwrócić uwagę na to, że zdający potrzebował twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego OBC, zawartego w podstawie ostrosłupa, tylko po to, aby przekonać się o długości krawędzi podstawy ostrosłupa, mimo że analiza trójkąta COF pozwalała na natychmiastowe wyciągnięcie takiego wniosku. Optymalizowanie liczby czynności potrzebnych do rozwiązania zadania może mieć miejsce wtedy, gdy rozwiązanie jest poprzedzone planem postępowania.

Przykład 18.



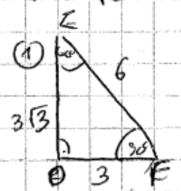
Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

V i P_{pc}

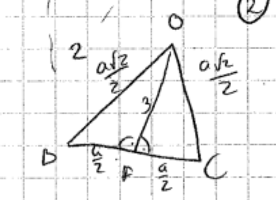
$V = P_p \cdot \frac{1}{3} \cdot h = P_p \cdot \frac{1}{3} 3\sqrt{3} = P_p \cdot \sqrt{3}$

ABCD – kwadrat

(1)



(2)



→ z tw. Pit.

$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 9 + \frac{a^2}{4}$

$\frac{1}{2}a^2 = 9 + \frac{a^2}{4}$ $/\cdot 4$

$2a^2 - a^2 = 36$

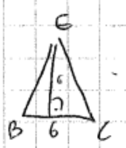
$a^2 = 36$

$\underbrace{a = 6}$ $(a>0)$

(3) $P_p = a^2 = 36 \Rightarrow V = 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3 = 36\sqrt{3}$

(4) $P_{pc} = P_p + P_b = 36 + 72 = 108$

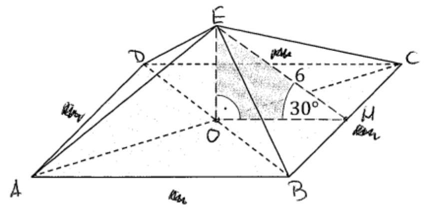
$P_b \to \cancel{4}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 6 \cdot 6 = 72$



Odp. $V = 36\sqrt{3}$
$P_{pc} = 72$

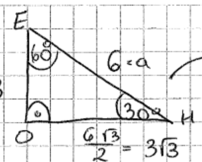
O tym, że poprawna analiza własności zaznaczonego trójkąta prostokątnego może zostać zniweczona włączeniem do rozwiązania niepoprawnej definicji ostrosłupa prawidłowego, przekonuje kolejne przedstawione rozwiązanie (Przykład 19.). Po poprawnym wstępie i obliczeniu długości odcinków EO i OH zdający wprowadził do rozwiązania dodatkowo błędną definicję ostrosłupa, co spowodowało, że ściany boczne tego ostrosłupa zostały uznane przez zdającego za przystające trójkąty równoboczne. Wskutek tego kolejne obliczenia nie tylko stały się błędne, ale i sprzeczne z początkowymi.

Przykład 19.

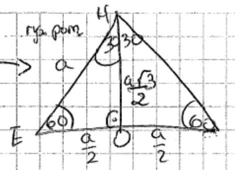


Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Δ EOH



rys. pom.

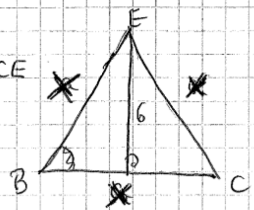


* skoro ostrosłup prawidłowy to: wszystkie krawędzie są równe, ściany boczne to Δ przystające (równoboczne)

wysokość ostrosłupa jest równa 3

$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$

Δ BCE



h Δ równobocznego

$6 = \frac{x\sqrt{3}}{2} \quad / \cdot 2$

$12 = x\sqrt{3}$

$x = \frac{12}{\sqrt{3}}$

$x = \frac{12\sqrt{3}}{3}$

$x = 4\sqrt{3}$

$P\Delta = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$

$P\Delta = \frac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{16 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}\ j^2$

~~Pole podstawy~~

Pole □ $= x^2 = x \cdot x$

Pole podstawy $= 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 16 \cdot 3 = 48\ j^2$

Pole całkowite ostrosłupa $= P_p + 4 \cdot P_{boczne} =$

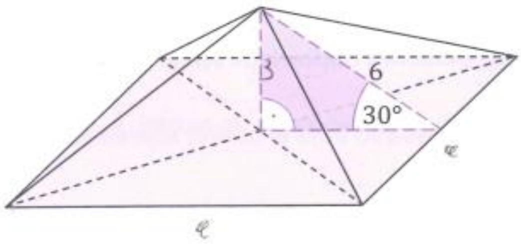
$= 48\ j^2 + 4 \cdot 12\sqrt{3}\ j^2 = 48\ j^2 + 48\sqrt{3}\ j^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 3 = 48\ j^3$

odp: $V = 48\ j^3$ a $P_c = 48\ j^2 + 48\sqrt{3}\ j^2$

W następnym rozwiązaniu (Przykład 20.) chcemy zwrócić Państwa uwagę nie tyle na błędną długość krawędzi podstawy ostrosłupa, ale na przyjmowane przez zdających różne oznaczenia powierzchni bocznej we wzorze na pole powierzchni całkowitej ostrosłupa. Zdający zapisał zależność $P_c = P_p + 4 \cdot P_b$, mimo że z dalszego rozwiązania wynika, że należało zapisać raczej $P_c = P_p + 4 \cdot P_\Delta$. Ustalone zasady oceniania były sformułowane tak, aby premiować prawidłowe obliczanie pola powierzchni całkowitej, bez kwestionowania prawdziwości zapisywanych wzorów. Warto jednak przy okazji rozwiązywania zadań zwrócić uwagę na odróżnianie poprawnego P_b od niepoprawnego $4 \cdot P_b$.

Przykład 20



Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

$P_c = P_p + 4 \cdot P_b$

$h = 3$

$a = 3\sqrt{3}$

$P_p = (3\sqrt{3})^2 = 9 \cdot 3 = 27\ cm^2$

$P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3}$

$P_\Delta = 3 \cdot 3\sqrt{3}$

$P_\Delta = 9\sqrt{3}$

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\cancel{\frac{1}{2} a h}$

$P_c = 27 + 4 \cdot 9\sqrt{3}$

$P_c = 27 + 36\sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot 3$

$V = 27\ [cm]^3$

Dwa kolejne rozwiązania (Przykład 21. i Przykład 22.) pokazują, że zdający wprowadzali do rozwiązania błędne założenie o tym, że ściany boczne są trójkątami równobocznymi, niezależnie od tego, czy wcześniej została obliczona długość krawędzi podstawy ostrosłupa (lub jej połowa), czy też nie. Zauważamy też, że obydwaj zdający używają oznaczenia P_b dla pola jednej ściany bocznej.

Przykład 21.

$P_c = 4P_b + P_p$

$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$

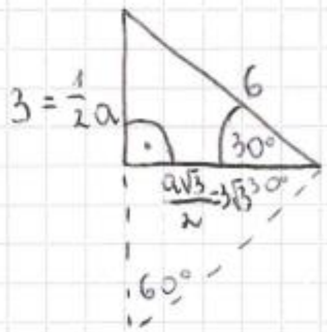
$h = \frac{6}{2} = 3$

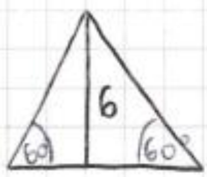
$P_b = \frac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$

$P_p = (4\sqrt{3})^2 = 48$

$P_c = 4 \cdot 12\sqrt{3} + 48 = 48\sqrt{3} + 48 \ (j^2)$

$V = \left(\frac{1}{3} \cdot 48\right) \cdot 3 = 48 \ (j^3)$

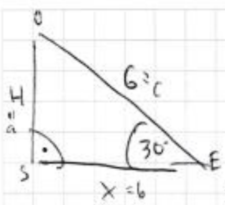


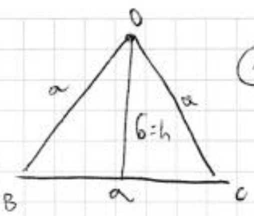


$6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\cancel{a = 2\sqrt{3}}$ $a = 4\sqrt{3}$

Przykład 22.

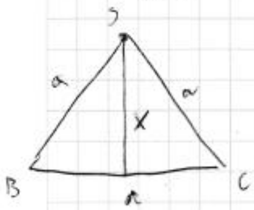




① $h = 6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$12 = a\sqrt{3}$

$a = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$



$P = P_p + 4P_b$

$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$

② $P_p = a^2 = (4\sqrt{3})^2 = 16 \cdot 3 = 48$

③ $P_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{48\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$

④ $P = 48 + 4 \cdot 12\sqrt{3} = 48 + 48\sqrt{3} \ [j^2]$

⑤ $\sin 30° = \frac{H}{6}$

$\frac{1}{2} = \frac{H}{6}$

$6 = 2H$

$H = 3$

⑥ $V = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot 48 \cdot \cancel{3} = 48 \ [j^3]$

Zadanie 31.2. badało umiejętność rozwiązania zadania optymalizacyjnego w sytuacji dającej się opisać funkcją kwadratową. Zdający poszukiwali odpowiedzi na pytanie o największą liczbę klientów pewnej apteki oraz o określenie, którego dnia rozważanego okresu ta największa liczba klientów miała miejsce. W tym zadaniu zdający nie budowali modelu matematycznego sytuacji opisanej w zadaniu, aby następnie badać własności tego modelu. Mając podany wzór funkcji, mogli od razu przystąpić do obliczenia (wskazania) argumentu, dla którego funkcja kwadratowa przyjmuje największą wartość oraz do obliczenia wartości funkcji, odpowiadającej temu argumentowi. Wykorzystywali do tego wzory na współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji albo własności funkcji kwadratowej. W szczególności ważną własność, jaką jest istnienie osi symetrii paraboli.

Zadanie 31.2. było drugim zadaniem w wiązce, poprzedziła je preambuła, w której podano wzór funkcji kwadratowej, opisującej liczbę klientów obsługiwanych w pewnej aptece w okresie 30 dni oraz zadanie zamknięte 31.1., typu prawda-fałsz, w którym zdający analizowali prawdziwość dwóch zdań dotyczących liczby klientów tej apteki i tym samym zapoznawali się z podanym wzorem funkcji kwadratowej. Interpretacja i skorzystanie z podanego wzoru funkcji kwadratowej w zadaniu 31.1. było nieznacznie łatwiejsze dla zdających – poziom wykonania tego zadania był równy 57%.

Przykład 23.

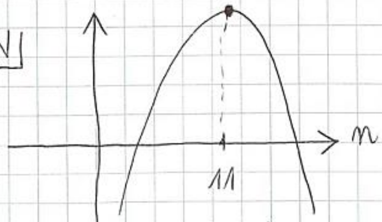
Zadanie 31.2. (0–2)

Którego dnia analizowanego okresu w aptece obsłużono największą liczbę klientów? Oblicz liczbę klientów obsłużonych tego dnia. Zapisz obliczenia.

Dziedzina: $n \in \langle 1, 30 \rangle$ $\boxed{n \in N}$

$L(n) = -n^2 + 22n + 279$

$p = \frac{-22}{-2} = 11 \in D$



f. rośnie $\langle 1, 11 \rangle$

f. maleje $\langle 11, 30 \rangle$

zatem funkcja osiąga wartość największą dla $\boxed{n = 11}$

czyli 11 dnia obsłużono najwięcej klientów → na kolejnej stronie ciąg obliczeń

$L(11) = -11^2 + 22 \cdot 11 + 279 = -121 + 242 + 279 =$

$= -121 + 521 = \underline{400}$ czyli obsłużono 400 klientów

Odp: Największą liczbę klientów obsłużono $\underline{11}$ dnia, obsłużono wtedy $\underline{400}$ klientów

W powyższym rozwiązaniu (Przykład 23.) zdający dobrze poradził sobie z obydwoma pytaniami. Zwróćmy uwagę, że po obliczeniu pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli zdający od razu skorzystał z podanego wzoru funkcji i obliczył $L(11)$. Nie korzystał ze wzoru na drugą współrzędną wierzchołka paraboli. Poprawnemu rozwiązaniu towarzyszyła i była pomocna ilustracja graficzna. Rozwiązanie zdającego z poniższego Przykładu 24. było jeszcze bardziej lakoniczne.

Przykład 24.

$L(n) = -n^2 + 22n + 279$

$p = -\frac{b}{2a} = \frac{-22}{-2} = 11$

$L(11) = -121 + 242 + 279 = 400$

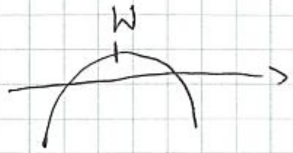
Odp.: Najwięcej klientów było 11 dnia, a było ich 400.

Obliczając drugą współrzędną wierzchołka ze wzoru $q = \frac{-\Delta}{4a}$, zdający mieli nieco dłuższą drogę do pokonania niż w przypadku obliczania wartości $L(11)$. Ponadto mogło zabraknąć czasu na refleksję nad wielkością otrzymanej liczby (Przykład 25.).

Przykład 25.

$L(n) = -n^2 + 22n + 279$, $n \in \langle 1, 30 \rangle$

$a < 0$



$W(p, q)$ największa liczba obsługiwanych klientów

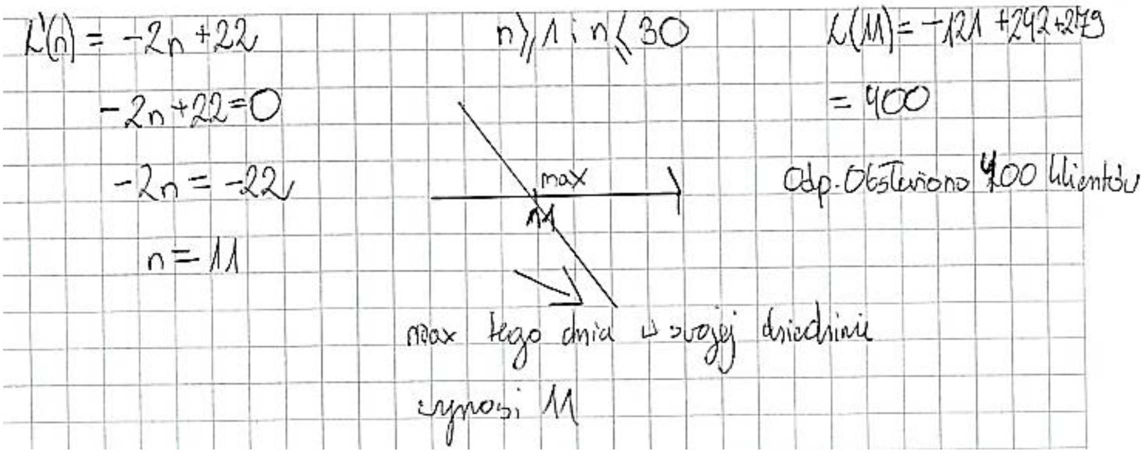
$p = -\frac{22}{-2} = 11$

$q = -\frac{22^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 279}{4 \cdot (-1)} = -\frac{484 + 1116}{-4} = 558$

$W(11, 558)$

Ponieważ zadania z tego arkusza rozwiązywali także ci zdający, którzy wybrali matematykę jako przedmiot dodatkowy na egzaminie maturalnym, więc nie należy się dziwić, że niektórzy z nich wprowadzali elementy rachunku różniczkowego do rozwiązania tego zadania (Przykład 26.). Rozważana funkcja jest funkcją kwadratową. Obliczona przez zdającego wartość argumentu $n = 11$ jest jedyną, dla której pochodna funkcji L przyjmuje wartość zero i która spełnia podane warunki $n \geq 1$ i $n \leq 30$. Jest więc jedynym maksimum lokalnym, a zatem miejscem, gdzie ta funkcja przyjmuje największą wartość.

Przykład 26.



$L'(n) = -2n + 22$

$-2n + 22 = 0$

$-2n = -22$

$n = 11$

$n \geq 1$ i $n \leq 30$

max

11

max tego dnia w swojej dziedzinie wynosi 11

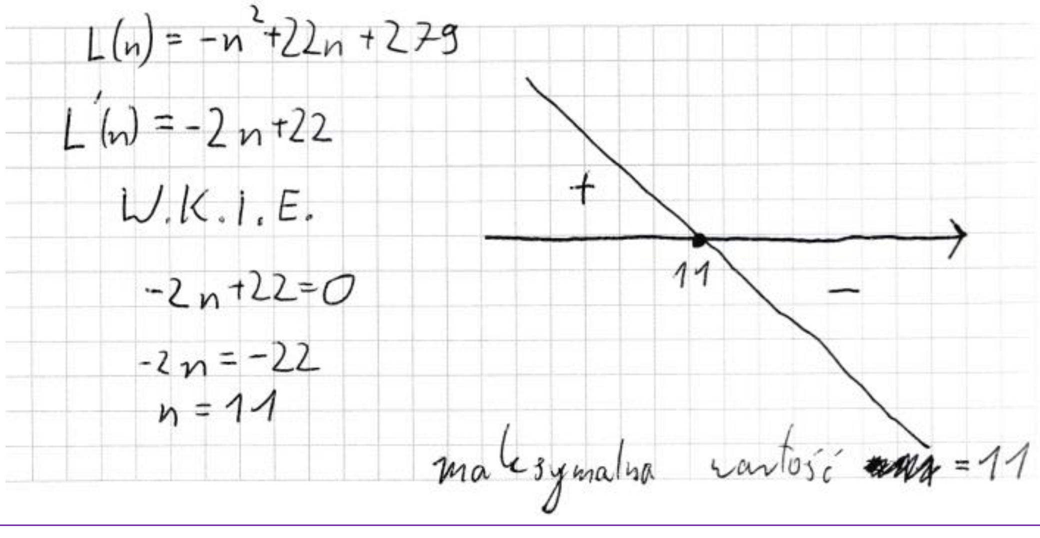
$L(11) = -121 + 242 + 279$

$= 400$

Odp. Obsłużono 400 klientów

W grupie zdających posługujących się pochodną funkcji możemy odnaleźć również rozwiązania, w których zdający nie odpowiedzieli na oba pytania (Przykład 27.).

Przykład 27.



$L(n) = -n^2 + 22n + 279$

$L'(n) = -2n + 22$

W.K.I.E.

$-2n + 22 = 0$

$-2n = -22$

$n = 11$

+

11

−

maksymalna wartość ~~n~~ = 11

Nie dla wszystkich zdających obliczenie współrzędnych wierzchołka paraboli było naturalną drogą znalezienia poprawnej odpowiedzi na pytanie o największą wartość funkcji kwadratowej. Podczas sprawdzania prac egzaminatorzy zauważyli sporo rozwiązań, w których zdający „przeszukiwali” wartości podanej funkcji według jej argumentów.

W Przykładzie 28. zdający oblicza wartości funkcji L dla kilku wybranych argumentów. Zauważa, że dla $n = 10$ oraz $n = 12$, leżących w jednakowej odległości od osi symetrii paraboli, funkcja przyjmuje te same wartości i na tej podstawie wnioskuje, że najwięcej klientów obsłużono jedenastego dnia. Zdający wskazał odpowiedź i obliczył poprawnie wartość $L(11) = 400$.

Przykład 28.

$L(n) = -n^2 + 22n + 279$

$L(1) = 300$

$L(5) = -5^2 + 5\cdot 22 + 279 = 364$

$L(10) = -10^2 + 10\cdot 22 + 279 = 399$

$L(11) = -11^2 + 11\cdot 22 + 279 = 400 \longrightarrow$ Odp: najwięcej klientów było dnia 11-tego. Obsłużono wtedy 400 klientów.

$L(12) = -12^2 + 12\cdot 22 + 279 = 399$

$L(13) = -13^2 + 13\cdot 22 + 279 = 396$

Wśród błędnych rozwiązań tego zadania niemało było takich, w których zdający zakładali, że w podanej dziedzinie funkcja L jest rosnąca, obliczali zatem $L(30)$ i zapisywali odpowiedź. Przy tym często była to odpowiedź 1839 klientów, co oznacza, że zdający dodatkowo popełniali błąd podczas potęgowania, zakładając, że $-30^2 = (-30)^2$. W tego typu błędnych rozwiązaniach zabrakło przede wszystkim sprawdzenia, jakie jest położenie wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji. W rozwiązaniu zamieszczonym poniżej (Przykład 29.) zdający, obliczył wartości $L(4)$, $L(1)$ oraz $L(2)$, po czym prawdopodobnie tylko utwierdził się w przekonaniu, że $L(30)$ jest poszukiwaną liczbą.

Przykład 29.

1839

$L(30) = -30^2 + 22\cdot 30 + 278 = 900 + 660 + 278 = \cancel{38}$

~~$L(4) = -4^2 + 22\cdot 4 + 278 = -16 + 88 + 278 = 351$~~

~~$L(1) = -1^2 + 22\cdot 1 + 274 = 1 + 22 + 274 = 297$~~

~~$L(2) = -2^2 + 2$~~

Odp: Najwiekszą liczbę klientów obsłużono 30 dnia.

Brakiem wiedzy o własnościach funkcji kwadratowej trzeba nazwać zupełnie przypadkowe przeszukiwania argumentów, które zdarzały się w pracach wielu zdających. Oto jedno z takich błędnych rozwiązań (Przykład 30.).

Przykład 30.

$L(1) = -1 + 22 + 279 = 30$

$L(15) = -225 + 22 \cdot 15 + 279 = -225 + 330 + 279 = 384$

$L(16) = -256 + 352 + 279 = 375$

$L(30) = -900 + 660 + 279 = -240 + 279 = 39$

Odp. W aptece obsłużono największą liczbę klientów dnia 15 w ciągu analizowanego okresu.

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najlepiej

Tegoroczni maturzyści najlepiej opanowali umiejętności:
1. obliczania wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym
2. odczytywania z wykresu funkcji przedziałów monotoniczności
3. odczytywania z wykresu funkcji dziedziny
4. stosowania układów równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Najłatwiejszym zadaniem w arkuszu dla poziomu podstawowego (poziom wykonania – 95%) okazało się **zadanie 15**., w którym zdający obliczali czwarty wyraz ciągu liczbowego, którego n-ty wyraz był podany wzorem. Niższy o jeden punkt procentowy poziom wykonania odnotowano w **zadaniu 12.3.**, w którym zdający odczytywali z wykresu funkcji podanego w treści zadania przedział, w którym funkcja jest malejąca. W **zadaniu 12.1.** zdający odczytywali z podanego wykresu dziedzinę funkcji. Poziom wykonania tego zadania był równy 91%. Przypominamy, że zadanie 12. było wiązką trzech zadań zamkniętych. Poziom wykonania trzeciego zadania z tej wiązki (12.2.) był już wyraźnie niższy i był równy 64%. **Zadanie 12.2.** polegało na odczytaniu z wykresu największej wartości funkcji w podanym przedziale domkniętym. Taki sam poziom wykonania (91%), jak w zadaniu 12.1., zdający osiągnęli w **zadaniu 11.** To dwupunktowe zadanie polegało na rozpoznaniu i wskazaniu dwóch poprawnych układów równań, które opisują podany obwód prostokąta oraz podaną różnicę długości jego boków.

Cztery wymienione zadania zamknięte mają bardzo wysokie wskaźniki poziomu wykonania, co naturalnie cieszy. Z drugiej strony trzeba jednak pamiętać, że trzy z nich nie wymagały od zdających wykonania jakichkolwiek obliczeń, a jedynie odczytywania z podanego wykresu podstawowych własności funkcji (dziedzina, przedziały monotoniczności) lub też wskazania poprawnego modelu matematycznego, opisującego dwie własności prostokąta.

Warto również zwrócić uwagę na to, że wśród 27 zadań zamkniętych w arkuszu było 17 zadań łatwych dla zdających (poziom wykonania od 70% do 89%). W szczególności zdający dobrze poradzili sobie z **zadaniem 4.** (poziom wykonania – 89%), które badało umiejętności wykonywania działań na logarytmach oraz z **zadaniem 27.** (poziom wykonania – 88%), w którym zdający wnioskowali o wielokącie w podstawie ostrosłupa, mając informację o stosunku liczby wierzchołków i liczby krawędzi tej bryły. Odnotujmy jeszcze, że stosunkowo wysoki poziom wykonania (85%) mają zadania zamknięte nr 10 i nr 16. W **zadaniu 10.** zdający rozpoznawali układ równań liniowych, którego interpretacja graficzna była przedstawiona na rysunku, natomiast w **zadaniu 16.** zdający obliczali wartość wyrażenia, które było równe trzeciemu wyrazowi ciągu geometrycznego, mając dane wyrazy pierwszy i drugi tego ciągu.

W grupie siedmiu zadań otwartych z tego arkusza znalazły się dwa zadania, które były łatwe dla zdających. **W zadaniu 9.** (poziom wykonania – 77%) zdający rozwiązywali równanie wielomianowe stopnia trzeciego, a w **zadaniu 22.** (poziom wykonania – 75%) obliczali pole trójkąta prostokątnego, mając dane długości przyprostokątnych jednego trójkąta, przeciwprostokątną drugiego trójkąta oraz informację, że te trójkąty są podobne.

Problem pod lupą – dowód algebraiczny – podzielność liczb

W majowym arkuszu egzaminacyjnym dla poziomu podstawowego zadaniem otwartym, które badało umiejętność przeprowadzenia rozumowania i argumentacji (IV obszar wymagań ogólnych) było **zadanie 3.** Przypomnijmy jego treść:

Zadanie 3. (0–2)
Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba $(2n+1)^2 - 1$ jest podzielna przez 8.

Zadanie dotyczące podzielności w zbiorze liczb całkowitych nie mogło być zaskoczeniem dla zdających egzamin maturalny z matematyki. Podstawa programowa matematyki zapowiadała w zakresie wymagań szczegółowych, że zdający „przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych”.

Warto też przypomnieć, że podzielność liczb całkowitych była tematem zadań egzaminacyjnych w trzech kolejnych arkuszach, poprzedzających majowy egzamin maturalny. Oto w arkuszu pokazowym, opublikowanym 4 marca 2022 r., zdający otrzymał do rozwiązania następujące zadanie:

Zadanie 9. (0–2)
Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej nieparzystej n liczba $n^2 + 2023$ jest podzielna przez 8.

W teście diagnostycznym, opublikowanym 29 września 2022 r., temat podzielności w zbiorze liczb całkowitych był reprezentowany w następującym zadaniu:

Zadanie 26. (0–2)
Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $10n^2 + 30n + 8$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3.

I wreszcie w teście diagnostycznym, opublikowanym 14 grudnia 2022 r., umiejętność przeprowadzenia rozumowania była sprawdzona zadaniem następującym:

Zadanie 14. (0–2)
Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $5n^2 + 15n$ jest podzielna przez 10.

Nietrudno zauważyć, że liczba punktów, zaproponowana w każdym z tych zadań, wynikała z istnienia naturalnych dwóch etapów ich rozwiązania. Pierwszy etap polegał na zapisaniu każdej z rozważanych liczb w postaci dogodnej do wnioskowania, drugi etap polegał na zapisaniu argumentów uzasadniających tezę każdego z tych twierdzeń.

Wróćmy zatem do zadania 3. z majowego arkusza egzaminacyjnego, w którym zdający dowodzili podzielności przez 8 liczby postaci $(2n+1)^2-1$, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Zdający musieli rozstrzygnąć dwie kwestie. Po pierwsze, do jakiej postaci należy przekształcić podane wyrażenie, aby następnie móc wyprowadzić i zapisać trafne, poprawne argumenty, uzasadniające tezę tego twierdzenia. Po drugie, na jakich zmiennych będzie prowadzone uzasadnienie: czy na zmiennej n podanej w treści zadania, czy może będzie trzeba wprowadzić dodatkowe zmienne. Chodzi, na przykład, o sytuacje wymagające oddzielnego rozważania przypadków liczb parzystych i nieparzystych.

Spróbujmy odnieść się do obydwu kwestii, analizując różne sposoby rozwiązania tego zadania oraz ilustrując te rozwiązania oryginalnymi zapisami zdających. Dla uzasadnienia podzielności przez 8 liczby $(2n+1)^2-1$ wygodne było przekształcenie tej liczby do postaci $4n(n+1)$, a następnie zapisanie, że iloczyn $n(n+1)$ jest liczbą parzystą jako iloczyn dwóch kolejnych liczb naturalnych.

Zdający w poniższym rozwiązaniu (Przykład 31.) dobrze uzasadnił prawdziwość tego twierdzenia. Zgodnie z ustalonymi zasadami oceniania rozwiązań tego zadania, do uzyskania dwóch punktów wystarczyło, aby zdający zauważył i zapisał, że rozważa dwie kolejne liczby naturalne.

Przykład 31.

$(2n+1)^2-1=2n(2n+2)=4\cdot n(n+1)$

Liczby n i n+1 są kolejnymi liczbami naturalnymi, więc jedna z nich jest parzysta, zatem liczba n(n+1) też jest parzysta.

Oznacza to, że liczba $4\cdot n(n+1)$ jest podzielna przez 8.

$(2n+1)^2-1=4n(n+1)$, zatem liczba $(2n+1)^2-1$ też jest podzielna przez 8.

Przykład 32. również ilustruje w pełni poprawne rozumowanie.

Przykład 32.

$(2n+1)^2-1=4n^2+4n+1-1=4n^2+4n=4n(n+1)$

(n+1) jest kolejną liczbą naturalną, występującą po n, co świadczy, że ich iloczyn będzie parzysty. c.n.d.

Inaczej natomiast jest w rozwiązaniu zamieszczonym poniżej (Przykład 33.), w którym zdający nie podał żadnego argumentu, świadczącego o tym, że liczba postaci $4n(n+1)$ jest podzielna przez 8. Może to świadczyć o tym, że łatwo wynikająca z postaci iloczynu dwóch kolejnych liczb naturalnych parzystość liczby nie jest naturalna dla zdających w jej stosowaniu.

Przykład 33.

$(2n+1)(2n+1) = 4n^2+2n+2n+1 = 4n^2+4n+1$

$(2n+1)^2-1 = 4n^2+4n = 4n(n+1)$

$n \geq 1$ dla każdej liczby naturalnej ~~n~~ liczba $4n(n+1)$ jest podzielna przez 8

Niektórzy zdający mocno koncentrowali się na tym, aby pokazać, że podzielność danej liczby przez 8 wymaga przedstawienia tej liczby w postaci iloczynu czynników, z których jeden jest dokładnie równy 8. Zdający w przykładzie poniżej (Przykład 34.) zrobił to poprawnie, omijając dogodną do wnioskowania postać $4n(n+1)$.

Przykład 34.

$(2n+1)^2-1 = 4n^2+4n+1-1 = 4(n^2+n) = 4\cdot n\cdot(n+1) = 8\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

Zauważmy, że ponieważ liczba n jest liczbą naturalną większą bądź równą 1 to liczby n i $n+1$ są kolejnymi liczbami naturalnymi, ~~[illegible]~~ więc 2 jest czynnikiem jednej z nich. Dlatego liczba $\frac{n(n+1)}{2}$ jest liczbą naturalną. Ponieważ $\frac{n(n+1)}{2}$ jest liczbą naturalną to $8\cdot\frac{n(n+1)}{2}$ jest liczbą podzielną przez 8.

W rozwiązaniu zamieszczonym poniżej (Przykład 35.) było już nieco gorzej. Zdający także ominął wyrażenie $4n(n+1)$ i wyłączył czynnik równy 8 przed nawias. Zapisany komentarz zdającego w odniesieniu do liczby n^2+n wydaje się być dość wątpliwy, dlatego że ta postać wymaga innego sposobu uzasadniania.

Przykład 35.

$(2n+1)^2-1=4n^2+4n+1-1=4n(n+1)=8\left(\frac{n^2+n}{2}\right)$

Odp.: n^2+n będzie zawsze liczbą parzystą, dlatego dla $n\geq 1$ podzielone przez 2 zawsze daje liczbę naturalną. Każda liczba naturalna pomnożona przez 8 będzie również podzielna przez 8. Dlatego 8 pomnożone przez $\frac{n^2+n}{2}$, jest liczbą podzielną przez 8.

I jeszcze jedno podobne rozwiązanie (Przykład 36.). Zdający nie zwrócił uwagi na błąd popełniony przy stosowaniu wzoru na kwadrat sumy dwóch wyrażeń.

Przykład 36.

$(2n+1)^2-1 = 4n^2+2n+1-1 = 4n^2+2n$

$4n^2+2n = 8\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{4}n\right)$

Jeśli 8 znajduje się przed nawiasem oznacza to iż dane wyrażenie na pewno jest podzielne przez 8.

$\frac{8\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{4}n\right)}{8} = \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{4}n$ $\square$

Inny sposób uzasadnienia prawdziwości tego twierdzenia polegał na przekształceniu liczby $(2n+1)^2-1$ do postaci $4(n^2+n)$. Zdający musiał tym razem uzasadnić, że liczba n^2+n jest parzysta, ale bez przekształcania liczby do postaci $n(n+1)$. Wymagało to rozważenia dwóch przypadków: dla n będącego liczbą parzystą oraz dla n będącego liczbą nieparzystą. Rozwiązanie przedstawione w Przykładzie 37. ilustruje taką właśnie sytuację.

Przykład 37.

$(2n+1)^2-1 = 4n^2+4n+1-1 = 4n^2+4n = 4(n^2+n)$

1°) Jeśli n jest liczbą parzystą, to n^2+n również jest liczbą parzystą ~~więc~~ czyli podzielną przez 2 zatem $4(n^2+n)$ to iloczyn liczby podzielnej przez 4 i liczby podzielnej przez 2 więc jest podzielny przez 8

2°) Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to liczba n^2+n jest parzysta (jest sumą dwóch liczb nieparzystych) więc jest podzielna przez 2 więc liczba $4(n^2+n)$ jest podzielna przez 8.

Zatem liczba $(2n+1)^2-1$ jest podzielna przez 8 dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$.

Zauważmy teraz, że liczbę $(2n+1)^2-1$ można było zapisać w postaci iloczynu dwóch kolejnych liczb parzystych: $(2n+1)^2-1 = 4n^2+4n = 2n(2n+2)$. Wystarczyło w takiej sytuacji zauważyć, że wśród dwóch kolejnych liczb parzystych jedna jest liczbą podzielną przez 4. Poprawną realizację dowodu takim sposobem przedstawia Przykład 38. Dodajmy od razu, że niewielu zdających podczas przekształcania podanej liczby w ogóle zauważało iloczyn dwóch kolejnych liczb parzystych i swoje przekształcenia kończyli inną postacią danej liczby.

Przykład 38.

$(2n+1)^2-1 = (2n)\cdot(2n+2)$

~~to jest~~ $2n$, $2n+2$ to dwie kolejne liczby parzyste.

Zachodzi zatem $2 \mid 2n$ i $2 \mid 2n+2$.

Ponadto wiadomo, wynika że $4 \mid 2n$ lub $4 \mid 2n+2$

Gdy $4 \mid 2n$ to alternatywa trywialnie zachodzi.

Gdy $4 \nmid 2n$ to $2n \equiv 2 \pmod 4 \Rightarrow 2n+2 \equiv 0 \pmod 4$

zatem $4 \mid 2n+2$, alternatywa zachodzi.

Podsumowując: $4 \cdot 2 = 8$, stąd dla każdego naturalnego $n \geq 1$

$8 \mid (2n+1)^2-1 = 2n\cdot(2n+2)$, co kończy dowód.

Pokazane powyżej sposoby uzasadnienia podzielności podanej liczby przez 8 mają wspólną cechę. Uzasadnienia mogą być prowadzone bez wprowadzenia do rozwiązań nowych zmiennych, nawet w sytuacji, w której zdającemu przychodziło rozpatrywanie dwóch przypadków (n parzystego oraz n nieparzystego). Zdający w poniższym rozwiązaniu (Przykład 39.) tak właśnie postąpił.

Przykład 39.

$(2n+1)^2-1 = 4n^2+4n+1-1 = 4n^2+4n = 4(n^2+n)$ $\quad n \in N$

$(n^2+n) \Rightarrow$ ta liczba będzie zawsze liczbą parzystą, gdyż $n \geq 1$, $n \in N$ i:

I gdy n jest nieparzyste to n^2 jest też nieparzyste, a co za tym idzie n^2+n, czyli suma dwóch nieparzystych będzie liczbą parzystą np. $9+3=12$

II gdy n jest parzyste to n^2 jest również parzyste, a co za tym idzie n^2+n jest również parzyste jako suma dwóch liczb parzystych np. $16+4=20$

Skoro, więc (n^2+n) będzie zawsze parzyste dla dowolnego wyboru czynników to będzie podzielne przez 2. W związku z tym liczba $4(n^2+n)$ będzie liczbą podzielną przez 8. $8\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\right)$

$\downarrow$

liczba całkowita

Nietrudno się domyślić, że nie zawsze zdający tak prowadzili rozumowania.
W zamieszczonym poniżej rozwiązaniu (Przykład 40.) zdający nie zauważył dogodnej do wnioskowania postaci iloczynu dwóch kolejnych liczb naturalnych i rozpatrywał dwa przypadki: n nieparzystego oraz n parzystego. Co więcej, wprowadził do dowodu tego twierdzenia dodatkowe oznaczenia, $n = 2k + 1$ oraz $n = 2k$. Ten zdający zdawał sobie doskonale sprawę, że takie podstawienie wymaga dopisania dodatkowego założenia, opisującego zbiór, do którego należy liczba k. W tym przypadku to zbiór liczb naturalnych (dla $n = 2k + 1$) lub nawet zbiór liczb naturalnych dodatnich ($n = 2k$).

Przykład 40.

Zał: $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$

Teza: $(2n+1)^2 - 1 = 8p$, $p \in \mathbb{Z}$

Dowód:

$$(2n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1 = 4n^2 + 4n = 4n(n+1)$$

• dla n nieparzystego $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$

$$4n(n+1) = 4(2k+1)(2k+1+1) = 4(2k+1)(2k+2) =$$
$$= 8\underbrace{(2k+1)}_{\in \mathbb{N}}\underbrace{(k+1)}_{\in \mathbb{N}}$$

zatem dla n nieparzystego liczba $(2n+1)^2-1$ jest podzielna przez 8

• dla n parzystego $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}_+$

$$4n(n+1) = 4 \cdot 2k(2k+1) = 8\underbrace{k}_{\in \mathbb{N}_+}\underbrace{(2k+1)}_{\in \mathbb{N}}$$

zatem dla n parzystego liczba $(2n+1)^2-1$ jest podzielna przez 8

Zatem dla każdego $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ liczba $(2n+1)^2 - 1$ jest podzielna przez 8 ■

Ustalone zasady oceniania zawierały jednoznaczny zapis i nie przewidywały przyznawania maksymalnej punktacji za rozwiązania, w których brakowało odpowiedniego opisu zbioru liczb, do którego należy nowa zmienna stosowana w dowodzie.

W przypadku zadania na dowodzenie pojawiały się rozwiązania „na skróty”. Zdający mieli przed oczyma tezę twierdzenia i czasem zbyt łatwo gubili się w ocenie poprawności zapisów swoich uzasadnień. W poniższym rozwiązaniu (Przykład 41.) zastanawiać może łatwość, z jaką przyszło zdającemu sformułowanie „cechy podzielności” przez 8. Być może ten zdający oraz wielu innych zbyt szybko próbowali kopiować cechę podzielności przez 6. W chwili, w której zapisywali tę błędną własność, prawdopodobnie nie zastanawiali się nad kontrprzykładem, który obala tę „własność”, np. nad liczbą 20.

Przykład 41.

$(2n+1)^2-1=$

$=4n^2+4n+1-1=$

$=4n^2+4n$

liczba jest podzielna przez 8, kiedy dzieli się przez 2 i 4

① $4n^2+4n=4(n^2+n)$ => liczba jest podzielna przez 4

② $4n^2+4n=2(2n^2+2n)$ => liczba jest podzielna przez 2

Liczba $4n^2+4n$ jest podzielna przez 2 i 4, więc jest też podzielna przez 8 co kończy dowód.

W zadaniach na dowodzenie zwykle mamy do czynienia z pewną liczbą prac, w których zdający jedynie sprawdzają, że twierdzenie jest prawdziwe dla wybranych wartości zmiennych. Oto jedno z takich rozwiązań (Przykład 42.). Naturalnie w zasadach oceniania majowego arkusza została zapisana uwaga o przyznawaniu zera punktów za takie rozwiązania.

Przykład 42.

$(2n+1)^2-1$

$(2+1)^2-1=8$

$3^2-1=8$

$9-1=8$

$(2\cdot2+1)^2-1 \vdots 8$

$(4+1)^2-1 \vdots 8$

$5^2-1 \vdots 8$

$25-1 \vdots 8$

$\frac{24}{8}=3$

Odp. Dla każdej liczby naturalnej liczba $(2n+1)^2-1$ jest liczbą parzystą nie mniejszą niż 8 więc tym samym jest przez nią podzielna

$(2\cdot3+1)^2-1$

$(6+1)^2-1$

7^2-1

$\frac{48}{8}=6$

Na zakończenie tej części chcemy przedstawić dwa nietypowe rozwiązania zdających. Pokazują one, że egzamin może być okazją do zaprezentowania sporych umiejętności matematycznych. Czas trwania egzaminu pozwala niektórym zdającym na prowadzenie długich rozważań.

Pierwsze rozwiązanie (Przykład 43.) pokazuje swobodę zdającego w posługiwaniu się językiem kongruencji. W końcowym fragmencie pojawia się drobna usterka, jednak nie ma to wpływu na maksymalną ocenę rozwiązania.

Przykład 43.

$(2n+1)^2-1 \mod 8 \stackrel{?}{=} 0, \quad n \in \mathbb{N};\ n \geq 1$

$4n^2 + 4n + 1 - 1 \mod 8 \stackrel{?}{=} 0$

$4n^2 + 4n \mod 8 \stackrel{?}{=} 0$

$4n^2 + 4n \mod 4 = 0, \quad n \in \mathbb{N};\ n \geq 1$

$\frac{4n^2+4n}{4} = n^2 + n$

$n^2 + n \mod 2 \stackrel{?}{=} 0, \quad n \in \mathbb{N};\ n \geq 1$

$n(n+1) \mod 2 = 0$, ponieważ każda parzysta naturalna liczba $n \geq 1$ pomnożona przez liczbę o 1 większą da liczbę parzystą, która będzie podzielna przez 2, a każda nieparzysta liczba naturalna $n \geq 1$ pomnożona przez liczbę o 1 większą, również da liczbę parzystą, która będzie podzielna przez 1

$[(2n+1)^2 - 1 \mod 2 = 0 \wedge (2n+1)^2 - 1 \mod 4 = 0] \Rightarrow (2n+1)^2 - 1 \mod 8 = 0$

Drugie rozwiązanie (Przykład 44.) zawiera zapisy nieoczywiste. Zdający założył na początku, że będzie w dowodzie rozważał liczbę k, podzielną przez 8. Przekształcił podaną liczbę do postaci $4k(k+1)$, otrzymując iloczyn będący wielokrotnością liczby 8. Następnie, mając świadomość tego, że przy dzieleniu liczby całkowitej przez 8 możemy otrzymać reszty równe kolejno: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$ zdający rozpatrywał każdą z siedmiu reszt i uzasadnił podzielność przez 8 otrzymanej liczby.

Przykład 44.

Z: $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}^+$; T: $(2n+1)^2 - 1$ podz. przez 8

reszty z dzielenia przez 8: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

k – liczba podz. przez 8

$(2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 1 + 4k - 1 = 4\underbrace{k}(k+1)$ podz. przez 8, $k \geq 8$

$\cancel{(2k+2)^2 - 1 = 4k^2 + 4}$

$\cancel{(2k+4)^2 - 1 = 4k^2 + 16 + 16k}$

- $(2(k-1)+1)^2 - 1 = 4k^2 - 4k + 1 - 1 = 4k(k-1)$
- $(2(k-2)+1)^2 - 1 = 4k^2 - 12k + 9 - 1 = 4k(k-3) + 8$
- $(2(k-3)+1)^2 - 1 = 4k^2 - 20k + 25 - 1 = 4k(k-5) + 8 \cdot 3$
- $(2(k-4)+1)^2 - 1 = 4k^2 - 28k + 48 = 4k(k-7) + 8 \cdot 6$
- $(2(k-5)+1)^2 - 1 = 4k^2 - 36k + 80 = 4k(k-9) + 8 \cdot 10$
- $(2(k-6)+1)^2 - 1 = 4k^2 - 44k + 120 = 4k(k-11) + 8 \cdot 15$
- $(2(k-7)+1)^2 - 1 = 4k^2 - 52k + 168 = 4k(k-13) + 8 \cdot 21$

$(k-7), (k-6), (k-5), (k-4), (k-3), (k-2), (k-1), k$; $k \geq 8$, k podz. przez 8

~~każde~~ wszystkie liczby ~~nieparz~~

~~Dowodem~~ wyniki z działania $(2n+1)^2 - 1$ dla powyższych ~~liczb~~ wartości n przyjmują postać:

$4k(\_\_\_) + 8 \cdot \_\_$

k podz. przez 8

Suma liczb podzielnych przez 8 jest również wielokrotnością 8.

cbdu.

Analiza jakościowa zadań – poziom rozszerzony

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najsłabiej

Na **poziomie rozszerzonym** nadal najwięcej trudności maturzyści mają z rozwiązywaniem zadań sprawdzających umiejętności z obszaru *Rozumowanie i argumentacja*, w szczególności przeprowadzaniem kilkuetapowego rozumowania wraz z podaniem argumentów uzasadniających poprawność jego prowadzenia. O prowadzeniu rozumowania świadczy fakt, że zdający wyjaśniania, dostrzega związki, zależności i prawidłowości, dostrzega podobieństwa między obiektami, zdarzeniami, pojęciami, wykorzystuje prawidłowości, uogólnia, uzasadnia, dobiera trafne argumenty, stosuje trafne obiekty matematyczne, reprezentacje i narzędzia matematyczne oraz zapisuje dowód.

Przeanalizujmy zatem poprawne sposoby rozwiązań oraz błędy, jakie wystąpiły w czterech zadaniach o najniższych wskaźnikach łatwości.

Najtrudniejszym zadaniem dla tegorocznych maturzystów było **zadanie 5**., o czym świadczy niski poziom wykonania tego zadania – 36%. Wymagało ono od zdających udowodnienia, że długość odcinka ND, zawartego w wysokości BD opuszczonej z wierzchołka kąta prostego trójkąta prostokątnego ABC o danym kącie ostrym $60°$, ma długość $\sqrt{3}+1$.

Zdający wybierali różne drogi rozumowania. Najczęściej maturzyści przeprowadzali dowód z wykorzystaniem twierdzenia sinusów. Obliczali długości odcinków: $|AD|=2$, $|AB|=4$ i $|BD|=2\sqrt{3}$ oraz miary kątów wewnętrznych trójkąta BNK: $30°$, $45°$, $105°$. W kolejnym kroku obliczali $\sin 105°$, stosując wzór na sinus sumy kątów. Następnie, stosując twierdzenie sinusów dla trójkąta BNK, zapisywali równość $\frac{|BK|}{\sin 105°}=\frac{|BN|}{\sin 45°}$. Stąd po przekształceniach otrzymywali $|BN|=\sqrt{3}-1$. Dalej zauważali, że $|ND|=|BD|-|BN|$ i po podstawieniu odpowiednich wartości otrzymywali tezę.

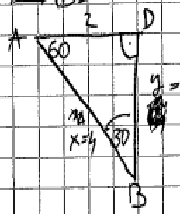
Liczna grupa zdających przeprowadziła pełne rozumowanie analogicznym sposobem, ale z wykorzystaniem twierdzenia sinusów dla trójkąta BLN.

Przykładem 1R. ilustrujemy pełny dowód przeprowadzony takim sposobem.

Przykład 1R.

$|KL| = \sqrt{2}$, bo ΔBLK jest charakterystyczny $(90°, 45°, 45°)$

ΔABD



$\sin 30° = \frac{1}{2} = \frac{2}{x}$

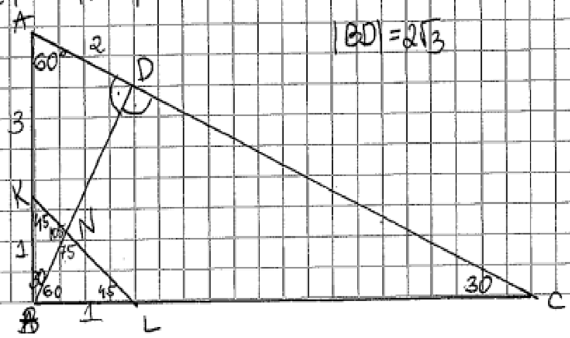
$x = 4$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{4}$

$2y = 4\sqrt{3}$

$y = 2\sqrt{3}$

Wykaż, że $|ND| = \sqrt{3}+1$



$|BD| = 2\sqrt{3}$

$|NB| \Rightarrow \quad \frac{|NB|}{\sin 45°} = \frac{|BL|}{\sin 75°}$

$\frac{|NB|}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sin 75°}$

$\sin 75° = \sin(30° + 45°) = \sin 30° \cdot \cos 45° + \cos 30° \cdot \sin 45° =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$\frac{|NB|}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} \Rightarrow \frac{2|NB|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

$2|NB|(\sqrt{2}+\sqrt{6}) = 4\sqrt{2}$

$|NB| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} =$

$= \frac{4-2\sqrt{12}}{2-6} = \frac{4-4\sqrt{3}}{-4} = -1+\sqrt{3}$

$= \sqrt{3}-1$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) \cdot |NB|$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|NB|\sqrt{2} + |NB|\sqrt{6}}{4}$

$2\sqrt{2} = |NB|\sqrt{2} + |NB|\sqrt{6}$

$2\sqrt{2} = |NB|(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

$|NB| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2-6} = \frac{4-2\sqrt{12}}{-4} = \frac{4-4\sqrt{3}}{-4} =$

$= \frac{4(1-\sqrt{3})}{-4} = \frac{\cancel{-4}(-1+\sqrt{3})}{\cancel{-4}} = \sqrt{3}-1$

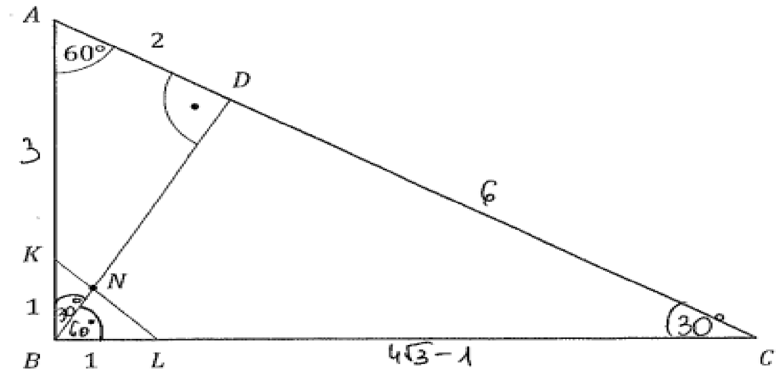
$|ND| = |BD| - |NB| = 2\sqrt{3} - (\sqrt{3}-1) = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 =$

$= \sqrt{3}+1 \qquad$ c.n.d

Drugi z najczęściej obieranych sposób dowodu polegał na wykorzystaniu twierdzenia o polach figur równoważnych. Maturzyści rozwiązujący zadanie tym sposobem obliczali długość odcinka BD, miarę kąta NBL oraz miarę kąta KBN. Następnie zauważali, że pole trójkąta KBL (równe $\frac{1}{2}$) jest sumą pól trójkątów BLN oraz KBN i zapisywali równość $\frac{1}{2}\cdot|BL|\cdot|BN|\cdot\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot|BN|\cdot|BK|\cdot\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$. Z tej równości wyliczali długość odcinka BN. Tezę otrzymywali po zauważeniu, że długość odcinka ND jest różnicą długości odcinków BD oraz BN.

Przykład 2R. ilustruje taki sposób rozwiązania.

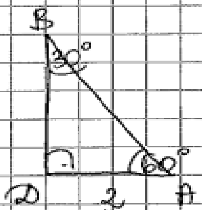
Przykład 2R.



Wykaż, że $|ND| = \sqrt{3} + 1$.

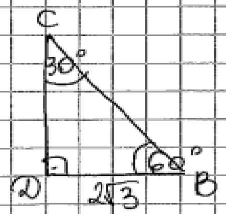
$|\sphericalangle BCA| = 30^\circ$ $(180^\circ - 90^\circ - 60^\circ)$

$|\sphericalangle ABD| = 30^\circ$ $(180^\circ - 90^\circ - 60^\circ)$



Δ charaktenystyczny $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

$|AD| = 2$ $|AB| = 4$ $|BD| = 2\sqrt{3}$



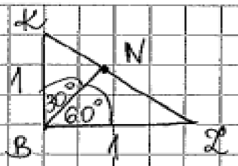
Δ charaktenystyczny $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

$|BD| = 2\sqrt{3}$ $|BC| = 4\sqrt{3}$ $|CD| = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 6$

$|BC| = 4\sqrt{3}$ $|LC| = 4\sqrt{3} - 1$

$|AB| = 4$ $|AK| = 4 - 1 = 3$

CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA



$P_{KBL} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$P_{BNL} = \frac{1}{2} \cdot |BN| \cdot 1 \cdot \sin 60°$

$P_{BNL} = |BN| \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

$P_{BNK} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |BN| \cdot \sin 30°$

$P_{BNK} = |BN| \cdot \frac{1}{4}$

$P_{BLK} = P_{BLN} + P_{BNK}$

$\frac{1}{2} = |BN| \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + |BN| \cdot \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} = |BN| \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} \right)$

$|BN| = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}+1} = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$

$|BN| = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{2} = (\sqrt{3}-1)$

$|BD| = 2\sqrt{3}$

$|ND| = |BD| - |BN| = 2\sqrt{3} - (\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}+1$

$|ND| = \sqrt{3}+1$ cnd.

Liczna grupa zdających w rozwiązaniu skorzystała z twierdzenia cosinusów. Maturzyści rozwiązujący zadanie tym sposobem dwukrotnie zastosowali twierdzenie cosinusów do trójkątów KBN oraz BLN i otrzymali równości

$$|BN|^2 = |BK|^2 + |KN|^2 - 2 \cdot |BK| \cdot |KN| \cdot \cos 45°$$

i

$$|BN|^2 = |BL|^2 + |LN|^2 - 2 \cdot |BL| \cdot |LN| \cdot \cos 45°$$

oraz

$$|KN|^2 = |BK|^2 + |BN|^2 - 2 \cdot |BK| \cdot |BN| \cdot \cos 30°$$

i

$$|LN|^2 = |BL|^2 + |BN|^2 - 2 \cdot |BL| \cdot |BN| \cdot \cos 60°$$

Po uwzględnieniu danych $|BK| = |BL| = 1$ i dodaniu stronami równań otrzymali równości

$$2 \cdot |BN|^2 = |LN|^2 + |KN|^2$$

oraz

$$|LN|^2 + |KN|^2 = 2 + 2 \cdot |BN|^2 - |BN| \cdot \sqrt{3} - |BN|.$$

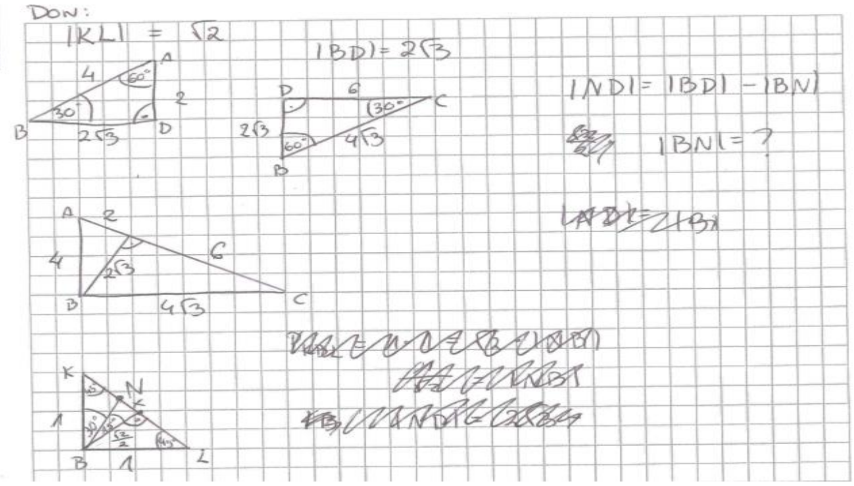
Następnie po przekształceniach otrzymali równanie z jedną niewiadomą

$$2 \cdot |BN|^2 = 2 + 2 \cdot |BN|^2 - |BN| \cdot \sqrt{3} - |BN|.$$

Z tego równania obliczali długość odcinka BN. Następnie zapisywali związek $|ND| = |BD| - |BN|$ i stąd otrzymywali tezę.

Przykładem 3R. ilustrujemy rozwiązanie sposobem z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów.

Przykład 3R.



$$\begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)^2 = |BN|^2 + 1^2 - 2\cdot|BN|\cdot\cos 30^\circ \\ \cancel{x^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + |BN|^2 + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}|BN|\cdot\cos 15^\circ} \\ |BN|^2 = \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2 - 2\cdot\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\cos 45^\circ \end{cases}$$

$$-\sqrt{3}|BN| + |BN|^2 = \frac{1}{2} - \sqrt{2}x + x^2 - 1$$

$$|BN|\left(|BN| - \sqrt{3}\right) = x^2 - \sqrt{2}x - \frac{1}{2}$$

$$|BN|^2 = x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{2} + 1 - \sqrt{2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$|BN|^2 = x^2 + \sqrt{2}x + \frac{3}{2} - \sqrt{2}x - 1$$

$$|BN|^2 = x^2 + \frac{1}{2}$$

$$|BN| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}} \cdot \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}} - \sqrt{3}\right) = x^2 - \sqrt{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\cancel{x^2} + \frac{1}{2} - \sqrt{3x^2 + \frac{3}{2}} = \cancel{x^2} - \sqrt{2}x - \frac{1}{2}$$

$$-\sqrt{3x^2 + \frac{3}{2}} = -\sqrt{2}x - 1 \quad |^2$$

$$3x^2 + \frac{3}{2} = 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1$$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Delta = 8 + 2 = 6 \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{6}$$

$$x_1 = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \quad \vee \quad x_2 = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

$$|BN| = \sqrt{\frac{8 - 4\sqrt{12} + 6}{4} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{14 - 8\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{16 - 8\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$$

$$|BN| = \sqrt{\frac{8 + 4\sqrt{12} + 6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \notin D$$

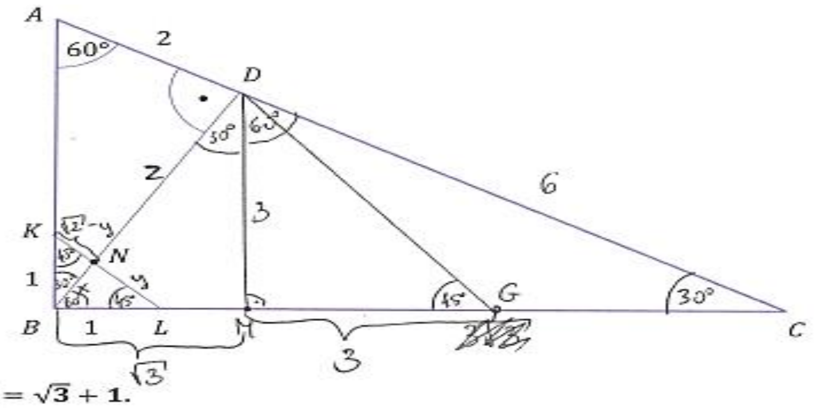
$$|ND| = 2\sqrt{3} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$$

Ten zdający, pomimo poprawnego rozumowania i poprawnych przekształceń, nie otrzymał tezy, a wystarczyło zauważyć, że $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} = \left|\sqrt{3}-1\right| = \sqrt{3}-1$ i stąd $|ND| = \sqrt{3}+1$.

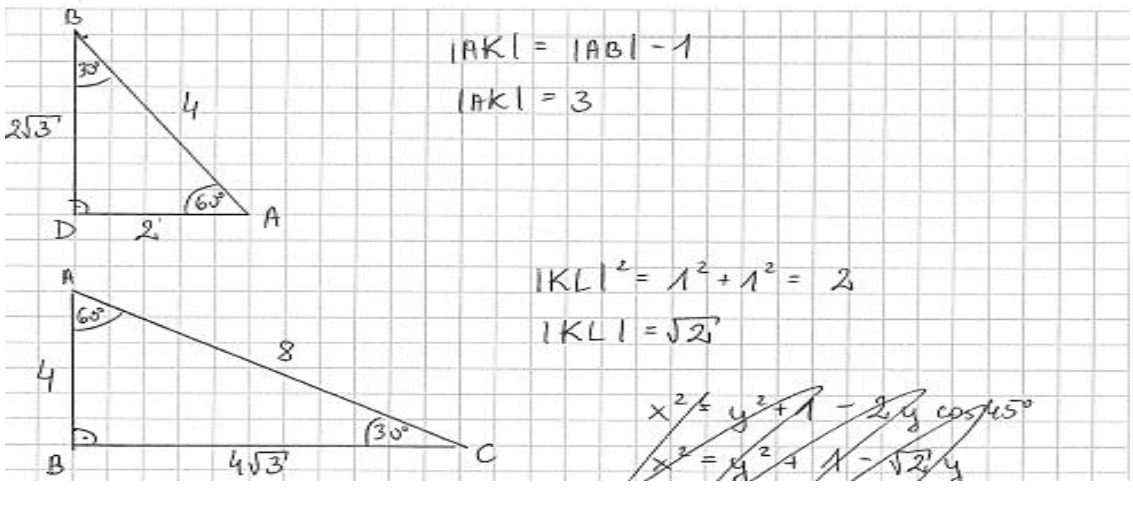
Należy podkreślić, że wśród maturzystów zdarzają się osoby poszukujące własnych sposobów rozwiązań, prowadzące nieschematyczne rozumowanie. Kolejnymi trzema przykładami ilustrujemy takie nieszablonowe rozwiązania, potwierdzające umiejętność stosowania trafnych obiektów matematycznych i ich reprezentacji, dobierania trafnych argumentów oraz zapisywania dowodu.

Niektórzy zdający dorysowali na rysunku prostą równoległą do odcinka KL przechodzącą przez D, co znacząco ułatwiło im przeprowadzenie pełnego dowodu – w rozwiązaniu skorzystali z podobieństwa trójkątów *BLN* i *BGD* (Przykład 4R.).

Przykład 4R.



Wykaż, że $|ND| = \sqrt{3} + 1$**.**



$|AK| = |AB| - 1$

$|AK| = 3$

$|KL|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$|KL| = \sqrt{2}$

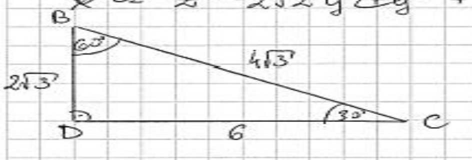
$\cancel{x^2 = y^2 + 1 - 2y\cos 45^\circ}$

$\cancel{x^2 = y^2 + 1 - \sqrt{2}y}$

z tw. cosinusów:

$a\sqrt{3} = 3$

$a = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$



$|MC| = 3\sqrt{3}$

$|LG| = \sqrt{3} - 1 + 3 = 2 + \sqrt{3}$

$\frac{|BL|}{|LG|} = \frac{|BN|}{|ND|}$

$x + z = 2\sqrt{3}$

$z = 2\sqrt{3} - x$

$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{x}{z}$

$2\sqrt{3} - x = 2x + \sqrt{3}x$

$2\sqrt{3} = 3x + \sqrt{3}x$

$x = \frac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{(3-\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{3} - 6}{9 - 3} = \sqrt{3} - 1$

$|ND| = z$

$|ND| = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1 = \sqrt{3} + 1$

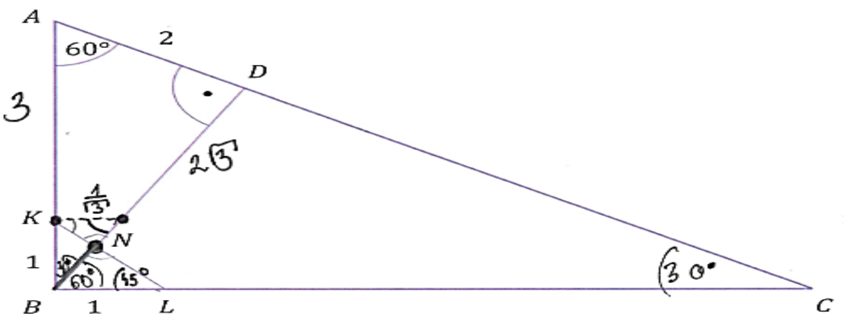
c.k.d.

Jeszcze inni zdający również dorysowali ułatwiający element na rysunku (ale inny niż w poprzednim sposobie). Ci maturzyści poprowadzili prostą równoległą do BC przechodzącą przez punkt K, obliczyli boki otrzymanego trójkąta prostokątnego o kątach ostrych $30°, 60°$, skorzystali z podobieństwa trójkątów i otrzymali tezę (Przykład 5R.).

Przykład 5R.

$k = \sqrt{3}$

$\frac{BN}{\frac{2}{\sqrt{3}} - BN} = \sqrt{3}$



Wykaż, że $|ND| = \sqrt{3} + 1$.

$BN = 2 - BN\sqrt{3}$

$BN(1+\sqrt{3}) = 2$

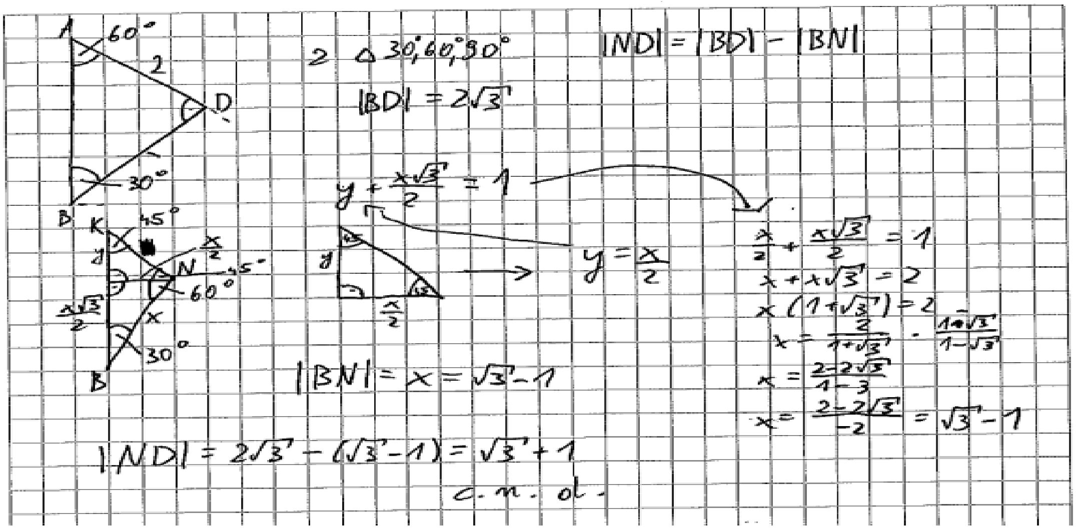
$2\sqrt{3} - \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3}) - 2}{1+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} + 6 - 2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}+1} =$

$= \frac{2(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1)}{3-1} = (\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1) =$

$= 3 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2 = \sqrt{3} + 1$

Wśród rozwiązań znalazły się i takie, w których zdający dorysowali odcinek równoległy do boku BC przechodzący przez punkt N i korzystali w dowodzeniu z własności trójkąta równobocznego (jego połowy) oraz równoramiennego trójkąta prostokątnego (Przykład 6R.)

Przykład 6R.



2 △ 30°, 60°, 90°

$|BD| = 2\sqrt{3}$

$|ND| = |BD| - |BN|$

$y + \frac{x\sqrt{3}}{2} = 1$

$y = \frac{x}{2}$

$\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{3}}{2} = 1$

$x + x\sqrt{3} = 2$

$x(1+\sqrt{3}) = 2$

$x = \frac{2}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

$x = \frac{2-2\sqrt{3}}{1-3}$

$x = \frac{2-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} - 1$

$|BN| = x = \sqrt{3} - 1$

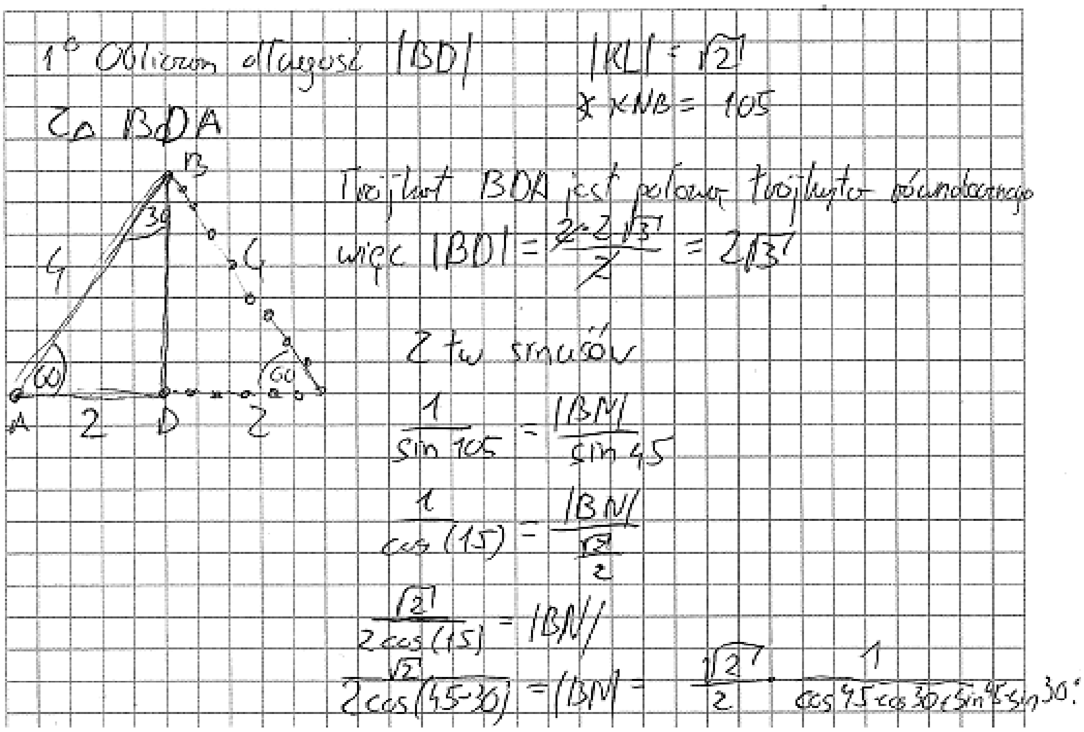
$|ND| = 2\sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} + 1$

c. n. d.

Niemała część zdających poprawnie rozpoczynała rozumowanie, a nawet zapisywała poprawne zależności, jednak wskutek błędów rachunkowych lub nieuwagi przy przepisywaniu, nie potrafiła doprowadzić rozumowania do końca.

Przykład 7R. ilustruje rozwiązanie, w którym zdający popełnił błąd w usuwaniu niewymierności z mianownika.

Przykład 7R.



1° Obliczam długość $|BD|$

Z △ BDA

$|KL| = \sqrt{2}$

$\sphericalangle KNB = 105$

Trójkąt BDA jest połową trójkąta równobocznego

więc $|BD| = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

Z tw sinusów

$\frac{1}{\sin 105} = \frac{|BN|}{\sin 45}$

$\frac{1}{\cos(15)} = \frac{|BN|}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\frac{\sqrt{2}}{2\cos(15)} = |BN|$

$\frac{\sqrt{2}}{2\cos(45-30)} = |BN| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\cos 45 \cos 30 + \sin 45 \sin 30}$

$$|BM| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \cancel{4}\,2}{\cancel{2} \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{6}-\sqrt{2})}{\cancel{8}\,4} = \frac{\sqrt{12}-2}{4}$$

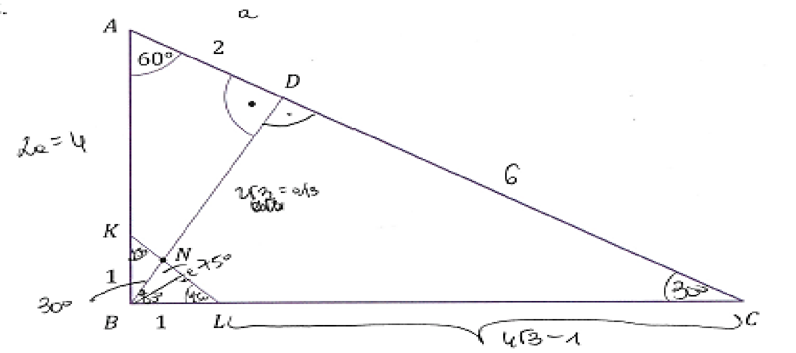
$$|ND| = |BD| - |BM| = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{12}-2}{4} = 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}-2}{4}$$

$$= \frac{8\sqrt{3}-2}{4} = 4\sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

Przykład 8R. ilustruje rozwiązanie, w którym zdający przy obliczaniu długości odcinka NL nieuważnie przepisał 2 zamiast $\sqrt{2}$ i w konsekwencji nie przeprowadził rozumowania do końca.

Przykład 8R.

$|AD| = 2.$



Wykaż, że $|ND| = \sqrt{3} + 1$.

Skoro $|\sphericalangle ABC| = 90°$ oraz $|\sphericalangle CAB| = 60°$, to $|\sphericalangle ACB| = 180° - 90° - 60° = 30°$
Skoro $|\sphericalangle ADB| = 90°$, $|\sphericalangle DAB| = 60°$, to $|\sphericalangle ABD| = 180° - 90° - 60° = 30°$

Zatem $\triangle ABC$ i $\triangle ABD$ to trójkąty szczególne o kątach $30°, 60°, 90°$, w których długości boków pozostają w stosunkach:

$1 : 2 : \sqrt{3}$

Zatem: $|AB| = 2 \cdot |AD| = 4$

$|BD| = |AD| \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$\triangle BCD$ też jest $\triangle$ szczególnym o kątach $30, 60, 90$

$|CD| = \sqrt{3} \cdot |BD| = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6$

$|BC| = 2 \cdot |BD| = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

Wyliczmy $\triangle KBL = \sqrt{1} = 1$

$|BE| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Z tw. sinusów:

$\frac{|NB|}{\sin 45°} = \frac{|NL|}{\sin 60°}$

$\frac{|NB|}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{|NL|}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\sqrt{2}\,|NL| = \sqrt{3}\,|NB|$

$\frac{|NL|}{|NB|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ $\qquad |NL| = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

$|KL| = \sqrt{2}$

$\frac{|KN|}{\sin 30°} = \frac{|NB|}{\sin 45°}$

$\frac{|KN|}{\frac{1}{2}} = \frac{|NB|}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\sqrt{2}\,|KN| = 2|NB|$

$\frac{|KN|}{|NB|} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ $\qquad |KN| = \frac{2}{\sqrt{2}}x$

$|NB| = x$

$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{2}{\sqrt{2}}x = \sqrt{2}$

$x\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$

Niekiedy tegoroczni maturzyści podstawiali niepoprawne wartości funkcji trygonometrycznych – jak zdający w Przykładzie 9R., który za sinus $60°$ w rozwiązaniu podstawił wartość $\frac{1}{2}$ – pomimo możliwości korzystania podczas egzaminu z *Wybranych wzorów matematycznych na egzamin maturalny z matematyki*, w których są zamieszczone wartości funkcji trygonometrycznych podstawowych kątów.

Przykład 9R.

$$\frac{|BN|}{\sin 45°} = \frac{|NL|}{\sin 60°} \qquad \frac{|BN|}{\sin 45°} = \frac{|KN|}{\sin 30°}$$

$$\cancel{\frac{2|BN|}{\sqrt{2}}} \qquad \frac{2(\sqrt{3} - KN)}{\sqrt{3}} = \frac{2|KN|}{1}$$

$$2\sqrt{3} - 2KN = 2\sqrt{3} \cdot KN$$

$$2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cdot KN + 2KN$$

$$2\sqrt{3} = (2\sqrt{3} + 2) \cdot KN$$

$$KN = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 2}$$

$$\frac{2BN}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+2}}{\frac{1}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+2}$$

$$2BN = \frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+2}$$

$$BN = \frac{4\sqrt{6}}{4\sqrt{3}+4}$$

$$ND = BD - BN$$

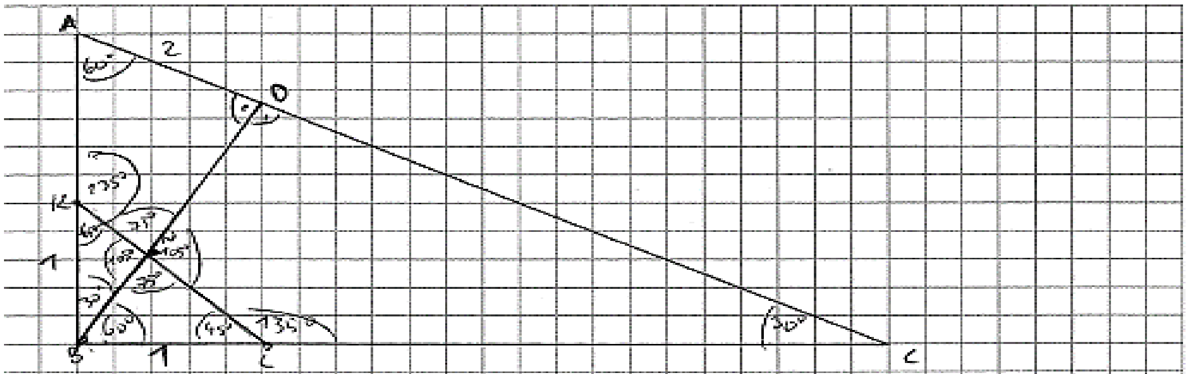
$$ND = 2\sqrt{3} - \cancel{\frac{4\sqrt{3}}{}} \; \frac{4\sqrt{6}}{4\sqrt{3}+4} = \frac{(2\sqrt{3})(4\sqrt{3}+4) - 4\sqrt{6}}{4\sqrt{3}+4}$$

$$ND = \frac{24 + 8\sqrt{3} - 4\sqrt{6}}{4\sqrt{3}+4} \cdot \frac{4\sqrt{3}-4}{4\sqrt{3}-4} = \cancel{\frac{96\sqrt{3} + 96 - 16\sqrt{18}}{48 - 16}}$$

Niektórzy zdający umieszczali trójkąt ABC w kartezjańskim układzie współrzędnych (x,y), przyjmując: $A=(0,4)$, $B=(0,0)$, $K=(0,1)$ oraz $L=(1,0)$. Następnie wyznaczali równania prostych KL, BD oraz AC. Korzystając z tych równań, obliczali współrzędne punktów N oraz D. Po zastosowaniu wzoru na odległość między dwoma punktami otrzymywali tezę.

Zdający w Przykładzie 10R. przyjął błędne współrzędne punktu C i, mimo dobrej idei dowodu, ostatecznie nie przeprowadził pełnego rozumowania.

Przykład 10R.



$\triangle ACB \sim \triangle ABD$ (KKK)

z własności połowy trójkąta równobocznego

$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AD|}$

$|AB| = \frac{1}{2}|AC|$

$|AC| = 2|AB|$

$2|AC| = |AB|^2$

$4|AB| = |AB|^2$

$|AB| = 4$

$|AC| = 8$

$\frac{10,5}{8}$

$|BD|^2 + 2^2 = 4^2$

$|BD|^2 = 12$

$|BD| = 2\sqrt{3}$

WPROWADŹMY PUNKTY W UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH

$B=(0,0)$ $C=(8,0)$ $A=(0,4)$ $L=(1,0)$ $K=(0,1)$

PROSTA q PRZECHODZĄCA PRZEZ PUNKTY A i C:

$y = -\frac{1}{2}x + 4$

PROSTA p PROSTOPADŁA DO PROSTEJ q I PRZECHODZĄCA PRZEZ PUNKT B

$y = 2x$

WYZNACZAMY PUNKT D

$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4 \\ y = 2x \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{5}{2}x = 4 \\ y = 2x \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{16}{5} \end{cases}$

$D = \left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$

PROSTA r PRZECHODZĄCA PRZEZ PUNKTY K i L:

$y = -x + 1$

WYZNACZAMY PUNKT N

$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = 2x \end{cases}$ $\begin{cases} 3x = 1 \\ y = 2x \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$

$N = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

DŁUGOŚĆ ODCINKA BN:

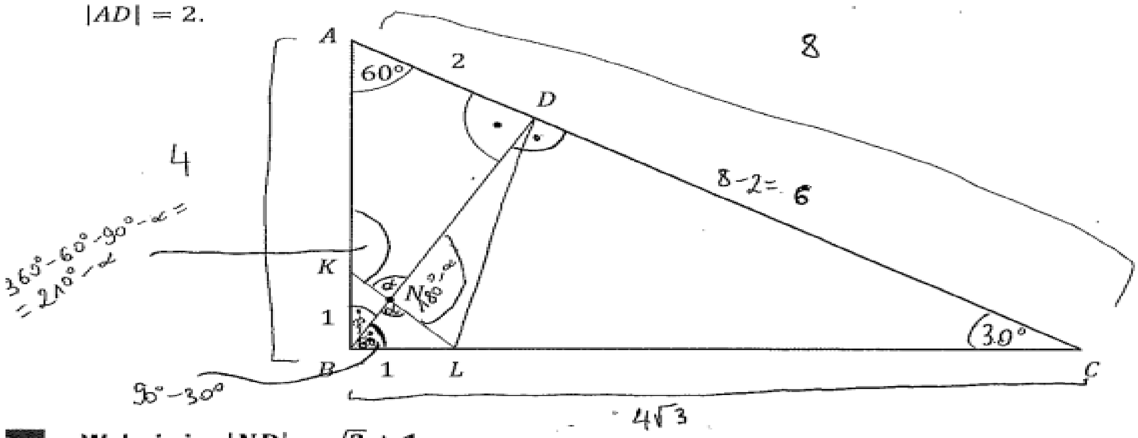
$\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$|ND| = |BD| - |BN| = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}$

Wśród tegorocznych maturzystów byli tacy, którzy poprawnie rozpoczynali rozumowanie, jednak w dalszej części rozwiązania po prostu kończyli rozwiązanie, ponieważ nie potrafili wykorzystać otrzymanych zależności (Przykład 11R).

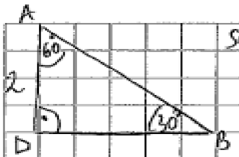
Przykład 11R.

$|AD| = 2.$



Wykaż, że $|ND| = \sqrt{3} + 1$**.**

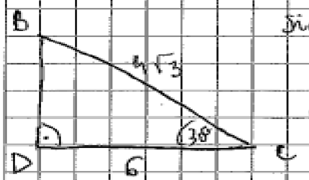
1



$\sin 30° = \frac{2}{|AB|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{|AB|} \Rightarrow |AB| = 4$

$\sin 30° = \frac{4}{|AC|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{|AC|} \Rightarrow |AC| = 8$

$\cos 30° = \frac{|BC|}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|BC|}{8} \Rightarrow 8\sqrt{3} = 2|BC| \Rightarrow |BC| = 4\sqrt{3}$



$\sin 30° = \frac{|BD|}{4\sqrt{3}}$ $\quad \frac{1}{2} = \frac{|BD|}{4\sqrt{3}} \Rightarrow 2|BD| = 4\sqrt{3}$

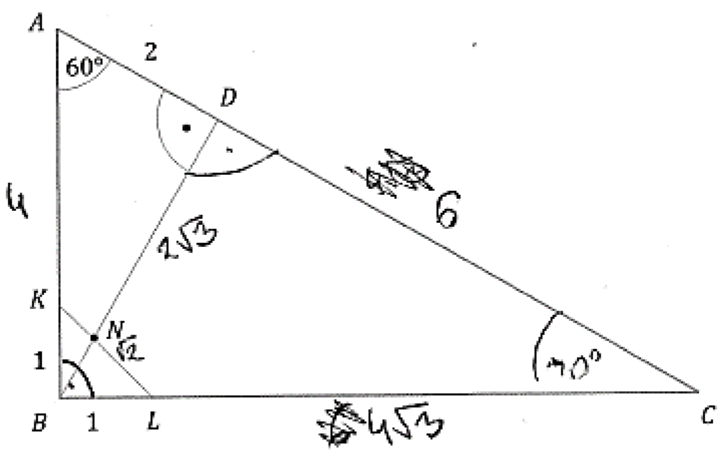
$|BD| = 2\sqrt{3}$

$\sphericalangle LND = 180° - \alpha \qquad \sphericalangle AKN = 360° - 60° - 90° - \alpha = 210° - \alpha$

$\sphericalangle NLC = 360° - 30° - 90° - (180° - \alpha) = 60° + \alpha$

Wśród zdających, którzy podjęli rozwiązanie tego zadania, byli też i tacy, którzy w trakcie prowadzonego rozumowania korzystali z tezy, którą mieli udowodnić, jak zdający w Przykładzie 12R.

Przykład 12R.



Wykaż, że $|ND| = \sqrt{3} + 1$.

ΔKBL:

$|KL| = \sqrt{2}$ z wł. Δ $90°, 45°, 45°$

$|ND| = |BD| - |BN|$

ΔABD:

z Δ $30°\ 60°\ 90°$

$|BD| = 2\sqrt{3}$

ΔABC:

z Δ $30°\ 60°\ 90°$

$|AC| = 8$

$|BC| = 4\sqrt{3}$

ΔBDC:

z Δ $30°\ 60°\ 90°$

$|DC| = 6$

$|BC| = 4\sqrt{3}$

$|ND| = \sqrt{3} + 1$

$|NB| = 2\sqrt{3} - (\sqrt{3} + 1) = \sqrt{3} - 1$

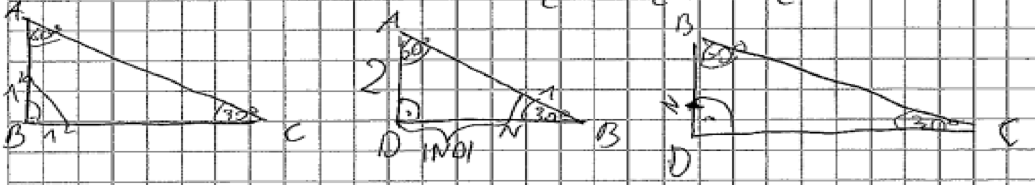
Wśród rozwiązań, niemało było takich, które świadczyły o braku pomysłu na przeprowadzenie dowodu. W Przykładzie 13R. zdający stwierdził podobieństwo trójkątów ABC i ABD oraz wykorzystał twierdzenie o wysokości opuszczonej z wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym, jednak żadne z nich nie miało zastosowania w udowodnieniu tezy.

Przykład 13R.

$|\sphericalangle ACB| = 30^\circ$, ponieważ $180^\circ - |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle CAB| = 30^\circ$

$|\sphericalangle ABD| = 30^\circ$, ponieważ $180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$

Dlatego trójkąty ABC i ABD są podobne na zasadzie kąt-kąt-kąt



trójkąty BDC, ABC i ABD są podobne na zasadzie ~~podstawie~~ kąt-kąt-kąt

każdy z tych trójkątów to trójkąt $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ czyli połowa trójkąta równobocznego

$|BD| = \sqrt{|CD| \cdot |DA|}$

$|BD| = \sqrt{|CD| \cdot 2}$

$|BD| = \frac{|CB| \cdot |BA|}{|CA|}$

$\frac{|CB| \cdot |BA|}{|CA|} = \sqrt{|CD| \cdot |DA|}$

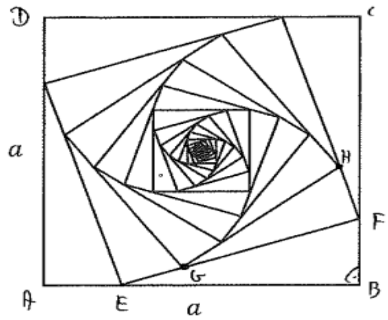
Po analizie rozwiązań zadania 5. nasuwa się spostrzeżenie, że wśród tegorocznych maturzystów byli zarówno zdający, którzy potrafili przeprowadzić pełne rozumowanie, czasami nawet w kreatywny sposób, ale również i tacy, którzy nie potrafią właściwie wykorzystać znanych im twierdzeń, albo rozważają szczególne przypadki, przyjmując nieuprawnione założenia o figurach geometrycznych. W swych rozwiązaniach powoływali się na twierdzenia, które przy ich metodzie rozwiązania nie miały zastosowania lub nie doprowadziły ich do pełnego uzasadnienia tezy. Przeszkodą w przeprowadzeniu pełnego rozumowania były też błędy rachunkowe, które uniemożliwiały udowodnienie tezy.

Drugim zadaniem (z grupy najtrudniejszych), które sprawiło najwięcej kłopotów tegorocznym maturzystom zdającym egzamin na poziomie rozszerzonym było **zadanie 10**. Poziom wykonania tego zadania to 39%. Było to zadanie z obszaru *Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji*, wymagające umiejętności dobierania i tworzenia modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. W zadaniu 10. maturzyści zmierzyli się z zagadnieniem zbieżnych szeregów geometrycznych i obliczania ich sumy. Zdający wykorzystywali definicję ciągu geometrycznego, podział proporcjonalny odcinka oraz stosowali twierdzenie o istnieniu granicy ciągu sum częściowych ciągu geometrycznego zbieżnego.

Aby obliczyć sumę obwodów wszystkich kwadratów otrzymanych w opisany w treści zadania sposób, zdający musieli poprawnie obliczyć długości odcinków, na jakie został podzielony bok pierwszego kwadratu, następnie zastosować twierdzenie Pitagorasa i obliczyć długość boku kolejnego kwadratu i ten algorytm stosować do obliczania długości boków kolejnych kwadratów. Dalej musieli zauważyć, że obwody kolejnych kwadratów tworzą nieskończony ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{\sqrt{10}}{4}$ i zauważyć, że ciąg obwodów jest zbieżny. W ostatnim etapie rozwiązania zdający musieli zastosować wzór na sumę szeregu geometrycznego i obliczyć sumę wszystkich obwodów.

Przykład 14R. ilustruje rozwiązanie, w którym zdający dokładnie opisał swoje rozumowanie przy tworzeniu modelu do przedstawionej sytuacji zadaniowej – wydzielił obiekty i relacje między nimi. Wyznaczył poprawne długości odcinków w zależności od długości boku pierwszego kwadratu – wykorzystał algorytm w tworzeniu kolejnych kwadratów, w każdym z nich poprawnie obliczył bok oraz obwód. Następnie stwierdził, że obliczony iloraz ciągu spełnia założenia twierdzenia o istnieniu sumy zbieżnego szeregu geometrycznego i poprawnie obliczył sumę wszystkich obwodów. Całe rozwiązanie świadczy o wysokim poziomie opanowania umiejętności konstruowania modelu matematycznego danego problemu oraz funkcjonalnego stosowania poznanych twierdzeń.

Przykład 14R.



Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu. Zapisz obliczenia.

Oznaczmy obwód K_1 jako L_1, obwód K_2 jako L_2 i tak dalej aż do K_n i L_n

$a > 0$

$L_1 = 4a$

skoro wierzchołek kwadratu K_2 dzieli każdy z boków kwadratu K_1 w stosunku $1:3$, to odcinki po podziale mają długości $\frac{a}{4}$ i $\frac{3a}{4}$

$|AE| = |BF| = \frac{a}{4}$ i $|EB| = |FC| = \frac{3a}{4}$

z tw. Pitagorasa dla $\triangle BEF$ obliczymy $|EF|$

$|BE|^2 + |BF|^2 = |EF|^2$

$\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{1a}{4}\right)^2 = |EF|^2$

$\frac{9a^2}{16} + \frac{a^2}{16} = |EF|^2$ $\quad |EF| > 0$

$\frac{10a^2}{16} = |EF|^2$

$\frac{\sqrt{10}a}{4} = |EF|$

Analogicznie dla kwadratu K_2 i K_3

skoro $|EF| = \frac{\sqrt{10}a}{4}$ to $|GF| = \frac{3\sqrt{10}a}{16}$ i $|EG| = \frac{\sqrt{10}a}{16} = |HF|$ itd

zatem z tw. Pitagorasa dla $\triangle GFH$

$|GF|^2 + |FH|^2 = |GH|^2$ $\quad |GH| > 0$

$\left(\frac{3\sqrt{10}a}{16}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10}a}{16}\right)^2 = |GH|^2$

$\frac{90a^2}{256} + \frac{10a^2}{256} = |GH|^2$ $\quad \frac{100a^2}{256} = |GH|^2$

$\frac{10a}{16} = |GH|$

Widzimy, że boki kwadratów K_1, K_2, K_3 itd tworzą ciąg geometryczny

$q|AB| = |EF|$ $\qquad q|EF| = |GH|$

$qa = \frac{\sqrt{10}}{4}a$ $\qquad q\frac{\sqrt{10}}{4}a = \frac{10a}{16}$

$q = \frac{\sqrt{10}}{4}$ ✓ $\qquad q = \frac{\sqrt{10}}{4}$ ✓

obwody także tworzą ciąg geometryczny

$L_2 = 4 \cdot \frac{\sqrt{10}}{4}a = \sqrt{10}a$ $\qquad L_1 q_1 = L_2$ $\qquad L_2 q_1 = L_3$

$L_3 = 4 \cdot \frac{10a}{16} = \frac{10}{4}a$ $\qquad 4a q_1 = \sqrt{10}a$ $\qquad \sqrt{10}a q_1 = \frac{10}{4}a$

$q_1 = \frac{\sqrt{10}}{4}$ $\qquad q_1 = \frac{\sqrt{10}}{4}$

iloraz tego ciągu to $\frac{\sqrt{10}}{4}$

$\frac{\sqrt{10}}{4} = q < 1$ i $q > -1$

zatem jest to ciąg zbieżny i możemy obliczyć sumę jego wszystkich wyrazów ze wzoru

$S = \frac{a_1}{1-q}$

w naszym przypadku

$S = \frac{L_1}{1-q_1}$

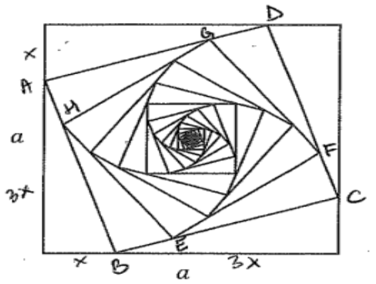
$S = \frac{4a}{1-\frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{4a}{\frac{4-\sqrt{10}}{4}} = \frac{16a}{4-\sqrt{10}} = \frac{16a(4+\sqrt{10})}{6} = \frac{64a + 16\sqrt{10}a}{6}$

$S = \frac{32a + 8\sqrt{10}a}{3}$

Suma wszystkich wyrazów tego ciągu wynosi $\frac{32a + 8\sqrt{10}a}{3}$

Niektórzy zdający, którzy poprawnie rozwiązali to zadanie, nie uzależniali od a długości odcinków, na jakie zostały podzielone boki kolejnych kwadratów. Poprawnie zinterpretowali stosunek $1:3$ podziału boku pierwszego kwadratu i zapisywali długości otrzymanych odcinków $x,\ 3x$ i konsekwentnie, z zachowaniem podziału kolejnych odcinków w takim stosunku, wyznaczyli sumę wszystkich obwodów w zależności od x. Takie rozwiązanie ilustruje Przykład 15R.

Przykład 15R.



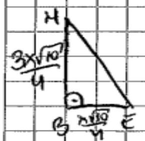
Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu. Zapisz obliczenia.

$L_1 = 4 \cdot 4x = 16x$ $\qquad a>0 \qquad x>0$

$|AB|^2 = 9x^2 + x^2 = 10x^2$

$|AB| = \sqrt{10x^2} = x\sqrt{10}$

$L_2 = 4x\sqrt{10}$



$\frac{x\sqrt{10}}{4} \cdot 3$

$|HE|^2 = \frac{90x^2}{16} + \frac{10x^2}{16}$

~~$|HE|^2 = \frac{90x^2}{16} + \frac{40x^2}{16} = \frac{130x^2}{16}$~~

~~$|HE| = \frac{x\sqrt{130}}{4}$~~

~~$L_3 = 4 \cdot \frac{x\sqrt{130}}{4}$~~

~~$L_3 = x\sqrt{130}$~~

$|HE|^2 = \frac{100x^2}{16}$

$|HE| = \frac{10x}{4}$

$L_3 = 10x$

$L_1 = 16x \qquad L_2 = 4x\sqrt{10} \qquad L_3 = 10x$

$q = \frac{L_3}{L_2} = \frac{10x}{4x\sqrt{10}} = \frac{10}{4\sqrt{10}} = \frac{5}{2\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{20} = \frac{\sqrt{10}}{4}$

$q = \frac{L_2}{L_1} = \frac{4x\sqrt{10}}{16x} = \frac{\sqrt{10}}{4}$

$|q| = \left|\frac{\sqrt{10}}{4}\right| < 1$

$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{16x}{1-\frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{16x}{\frac{4-\sqrt{10}}{4}} = \frac{64x}{4-\sqrt{10}}$

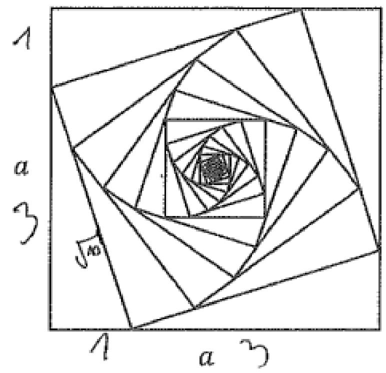
$S = \frac{64x}{4-\sqrt{10}} \cdot \frac{4+\sqrt{10}}{4+\sqrt{10}} = \frac{256x + 64\sqrt{10}\cdot x}{16-10} =$

$= \frac{256 + 64\sqrt{10}x}{6} = \frac{128 + 32\sqrt{10}\cdot x}{3}$

Część zdających poprawnie obliczyła długość boku drugiego kwadratu: $a_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}a$ oraz iloraz q ciągu: $q = \frac{\sqrt{10}}{4}$ i na tym kończyła rozwiązanie.

Wśród zdających byli tacy, którzy nie potrafili operować na wyrażeniach algebraicznych, przyjmowali konkretną liczbę jako długość boku pierwszego kwadratu i z tym założeniem rozwiązywali zadanie. Zdający w Przykładzie 16R. przyjął, że bok pierwszego kwadratu ma długość 4 i z tym założeniem obliczył $q = \frac{\sqrt{10}}{4}$, a następnie obliczył sumę wszystkich obwodów z przybliżeniem dziesiętnym liczby niewymiernej.

Przykład 16R.



Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu. Zapisz obliczenia.

k_1 ~~$a \cdot a = 4 \cdot 4 = 16 = P_1$~~ $4 \cdot 4 = 16 = Obw_1 = a_1$

k_2 z Pitagorasa $b = \sqrt{10}$

$4 \cdot \sqrt{10} = 4\sqrt{10} = Obw_2$

~~$\frac{P_2}{P_1} = q = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \Rightarrow q = \frac{5}{8}$~~

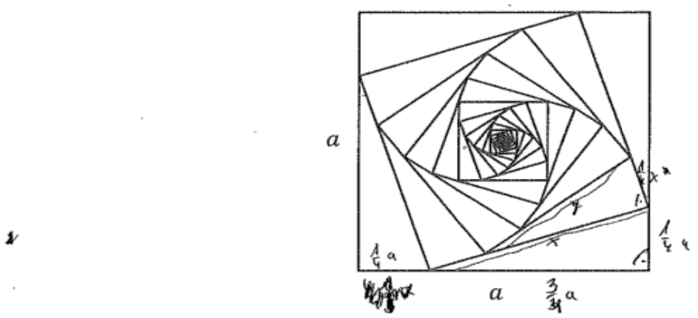
$\frac{Obw_2}{Obw_1} = \frac{4\sqrt{10}}{16} = \frac{12,649111}{16} = 0,7905693 = q$

$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{16}{0,2094306} = 76,397695$

Odp. Suma wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu jest równa 76,397695 [j]

Błędy rachunkowe były częstą przyczyną nieotrzymania poprawnej sumy lub kończenia rozwiązania przed jej obliczeniem. Przykładem 17R. ilustrujemy jedno z takich rozwiązań, w którym maturzysta poprawnie obliczył długość boku drugiego kwadratu: $a_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}a$ oraz iloraz ciągu: $q = \frac{\sqrt{10}}{4}$. Następnie popełnił błąd rachunkowy w mnożeniu $\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{10}}{4}a$ i zapisał iloczyn w postaci $\sqrt{10}a$. W konsekwencji tego błędu zdający zaniechał dalszego rozwiązania, ponieważ podczas zapisywania sumy obwodów kolejnych kwadratów zauważył, że kolejny wyraz ciągu obwodów $4 \cdot \frac{5\sqrt{106}}{16}a$ nie jest wyrazem ciągu geometrycznego.

Przykład 17R.



Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu. Zapisz obliczenia.

$\left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 = x^2$

$\frac{1}{16}a^2 + \frac{9}{16}a^2 = x^2$

$\frac{10}{16}a^2 = x^2$

$x = \frac{\sqrt{10}}{4}a$

$q = \frac{\sqrt{10}}{4}$

$S = \frac{a_1}{1-q}$

$4a + 4 \cdot \frac{\sqrt{10}}{4}a = 4a + \sqrt{10}a +$

$\left(\frac{1}{4}x\right)^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 = y^2$ $\quad \frac{1}{4}x = \sqrt{10}a \quad \frac{3}{4}x = \frac{3\sqrt{10}}{16}a$

$\left(\sqrt{10}a\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{10}}{16}a\right)^2 = y^2$

$\left(\frac{1}{4}x^2\right) + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 = y^2$

$\left(10a^2\right) + \left(\frac{90}{256}a^2\right) = y^2$

$\frac{2560a^2}{256} + \frac{90a^2}{256} = y^2$

$\frac{2650a^2}{256} = y^2$

$y = \frac{5\sqrt{106}}{16}a$

2650 | 5
530 | 5
106 | 106
1

Jednak największą trudnością w rozwiązaniu zadania 10. dla licznej grupy zdających było dokonanie poprawnej interpretacji podziału odcinka w danym stosunku $1:3$ i poprawnego podziału proporcjonalnego odcinka. Tegoroczni maturzyści najczęściej przyjmowali stosunek $1:2$ i w efekcie tego błędu zapisywali długości odcinków, na jakie został podzielony bok pierwszego kwadratu, jako $\frac{1}{3}a,\ \frac{2}{3}a$, konsekwentnie do popełnionego błędu otrzymywali iloraz $q=\frac{\sqrt{5}}{3}$ i rozwiązywali zadanie do końca. Przykład 18R. ilustruje rozwiązanie, w którym zdający, pomimo błędnego podziału proporcjonalnego, był świadomy konieczności sprawdzenia, czy otrzymany iloraz spełnia założenie $|q|<1$ twierdzenia o istnieniu sumy wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego.

Przykład 18R.

Obwody:

$k_1:\ 4a$

$k_2:\ 4\cdot\frac{a\sqrt{5}}{3}$

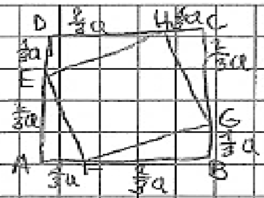
$q=\frac{4\cdot\frac{a\sqrt{5}}{3}}{4a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\in(-1,1)$

$b_1=4a$

$b_n=b_1\cdot q^{n-1},\ n\geq 2$

$b_n=4a\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{n-1}$

$S=\frac{4a}{1-\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{4a}{\frac{3-\sqrt{5}}{3}}=\frac{12a}{3-\sqrt{5}}=\frac{12a(3+\sqrt{5})}{4}=3a(3+\sqrt{5})=9a+3a\sqrt{5}$



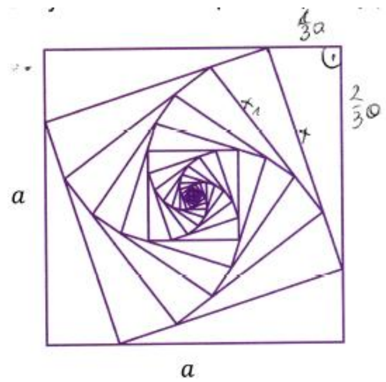
$|EH|=\sqrt{\frac{4}{9}a^2+\frac{1}{9}a^2}=\sqrt{\frac{5}{9}a^2}=\frac{a\sqrt{5}}{3}$

Zdarzały się również rozwiązania, w których zdający ze stosunku $1:3$ zapisywali odcinki o długościach $\frac{3}{4}a$ i $\frac{1}{3}a$ i nie korygowali otrzymanych ułamków mimo, że suma $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$ nie jest równa 1. Z takim błędem rozwiązywali zadanie do końca.

Niektórzy z tegorocznych maturzystów na podstawie stosunku $1:3$ podziału odcinka błędnie wnioskowali, że iloraz q ciągu obwodów jest równy $\frac{3}{4}$.

Nieliczna grupa maturzystów, nie tylko błędnie zinterpretowała stosunek podziału $1:3$, ale również zamiast ciągu obwodów wyznaczyła ciąg pól (Przykład 19R.)

Przykład 19R.



$K_1 = a \cdot a$

$K_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}a = \frac{5}{9}a$

$K_3 = \frac{5}{9}a \cdot \frac{5}{9}a = \frac{25}{81}a$

$K_n = a^2 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{(n-1)}$

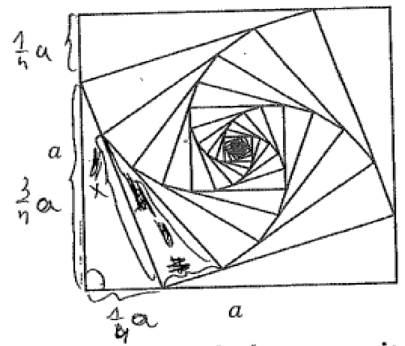
$S = \frac{a^2}{1-\frac{5}{9}} = \frac{a^2}{\frac{4}{9}} = \underline{\frac{9}{4}a^2}$

$x = \sqrt{\left(\frac{1}{3}a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}a^2 + \frac{4}{9}a^2} = \sqrt{\frac{5}{9}a^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}a$

$x_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}x = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}a = \frac{5}{9}a$

Zdarzały się również rozwiązania, w których zdający poprawnie obliczyli długość boku drugiego kwadratu, ale wskutek błędu przekształcenia wyrażenia algebraicznego otrzymywali iloraz q ciągu, który był liczbą spoza przedziału $(0,1)$, nie korygowali otrzymanego wyniku i obliczali sumę wszystkich wyrazów ciągu. Ci zdający nie byli świadomi założenia twierdzenia o istnieniu granicy ciągu sum częściowych. Przykładem 20R. ilustrujemy takie błędne bezrefleksyjnie rozwiązanie, w którym nawet otrzymana ujemna „suma obwodów” nie skłoniła zdającego do weryfikacji otrzymanego wyniku.

Przykład 20R.



Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu. Zapisz obliczenia.

1) z tw. Pitagorasa: $\left(\frac{3}{4}a\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a\right)^2 = x^2$

$\frac{9a^2}{16} + \frac{a^2}{16} = x^2$

$\frac{10a^2}{16} = x^2$

$x = \frac{\sqrt{10}\,a}{4}$

$Ob_{k_1} = 4a$

2) z – bok k_2

$x = \frac{3}{4}z$

$\frac{3}{4}z = \frac{\sqrt{10}\,a}{4}$

$z = \frac{\sqrt{10}\,a}{3}$

$Ob_{k_2} = \frac{4\sqrt{10}\,a}{3}$

3) $q = \frac{Ob_{k_2}}{Ob_{k_1}} = \frac{\frac{4\sqrt{10}a}{3}}{4a} = \frac{4\sqrt{10}a}{3}\cdot\frac{1}{4a} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

4) $S_n = \frac{Ob_{k_1}}{1-q} = \frac{4a}{1-\frac{\sqrt{10}}{3}} = \frac{4a\left(1+\frac{\sqrt{10}}{3}\right)}{1-\frac{10}{9}} = 4a\left(1+\frac{\sqrt{10}}{3}\right)\left(-\frac{1}{9}\right) =$

$= -\frac{1}{9}\cdot 4a + 4a\cdot\frac{\sqrt{10}}{3}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{4}{9}a - \frac{4\sqrt{10}}{27}\cdot a =$

$= \frac{-12a - 4\sqrt{10}\,a}{27} = \frac{-4a(3+\sqrt{10})}{27}$

Odp: Suma wyrazów tego ciągu wynosi $\frac{-4a(3+\sqrt{10})}{27}$

Jeszcze inni zdający, jak ten w Przykładzie 21R., obliczyli tylko sumę długości boków (po jednym z każdego kwadratu).

Przykład 21R.

$$S = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q \qquad a_1 = a \qquad x = \frac{a}{4} \qquad 3x = \frac{3a}{4}$$

$$\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = y^2$$

$$\frac{a^2}{16} + \frac{9a^2}{16} = y^2$$

$$\frac{10a^2}{16} = y^2$$

$$y = \frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{a^2}}{4} \qquad y = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{a\sqrt{10}}{4}}{a} = \frac{a\sqrt{10}}{4}\cdot\frac{1}{a} = \frac{\sqrt{10}}{4} < 1$$

$$S_n = \frac{a}{1-\frac{\sqrt{10}}{4}} \cdot \frac{1+\frac{\sqrt{10}}{4}}{1+\frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{a+a\sqrt{10}}{1-\frac{10}{16}} =$$

$$= \frac{a+a\sqrt{10}}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3}\cdot a\left(1+\sqrt{10}\right) = \frac{8a}{3}\left(1+\sqrt{10}\right)$$

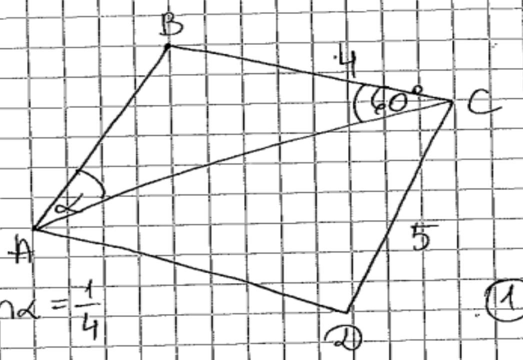
Na podstawie analizy rozwiązań zadania 10. stwierdzić można, że wcale niemała część zdających miała problem z weryfikacją poprawności stworzonego przez siebie matematycznego modelu sytuacji zadaniowej.

Kolejnym zadaniem, które sprawiło najwięcej kłopotów tegorocznym maturzystom zdającym egzamin na poziomie rozszerzonym było **zadanie 8.**, poziom wykonania tego zadania – 42%. Było to zadanie z obszaru *Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji*, wymagające umiejętności stosowania obiektów matematycznych i operowania nimi, interpretowania pojęć matematycznych. Zdający, aby rozwiązać to zadanie, musieli wykazać się umiejętnością zastosowania własności czworokątów opisanych na okręgu.

Aby obliczyć obwód czworokąta $ABCD$ opisanego na okręgu, można było skorzystać z twierdzenia sinusów w trójkącie ABC i stąd obliczyć długość boku AB. Następnie, korzystając z twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt, należało obliczyć długość boku AD oraz obwód czworokąta $ABCD$.

Przykładem 22R. Ilustrujemy takie rozwiązanie.

Przykład 22R.



$\sin\alpha = \frac{1}{4}$

z własności czworokąta opisanego na okręgu:

$|BC| + |AD| = |CD| + |AB|$

$(*)\ 4 + |AD| = 5 + |AB|$

(1) ΔABC:

z tw. sinusów:

$\frac{4}{\sin\alpha} = 2R$

$2R = \frac{4}{\frac{1}{4}} = 16$

$\frac{|AB|}{\sin 60°} = 2R$

$\frac{|AB|}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 16$

$|AB| = \frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

(2) z $(*)$:

$4 + |AD| = 5 + 8\sqrt{3}$

$|AD| = 1 + 8\sqrt{3}$

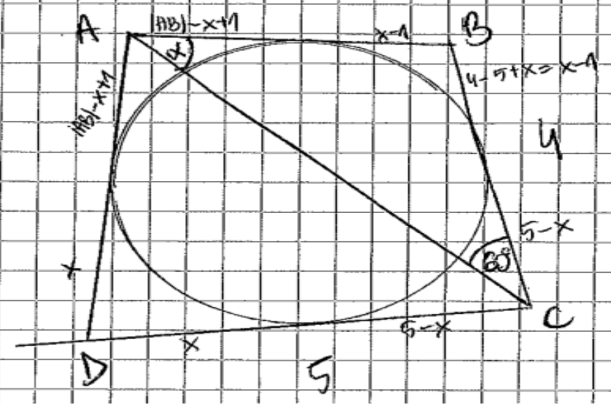
$Ob = |AB| + |CD| + |CB| + |AD|$

$Ob = 8\sqrt{3} + 4 + 5 + 1 + 8\sqrt{3} = 16\sqrt{3} + 10$

Inny sposób obliczenia długości boku AB bazował na zauważeniu, że pole P trójkąta ABC można zapisać na dwa sposoby: $P = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot |AC| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \frac{1}{4}$.

Poniżej zamieszczamy poprawne rozwiązanie zadania tym sposobem (Przykład 23R.)

Przykład 23R.



$\sin\alpha = \frac{1}{4}$

$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$

$\cancel{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

$\cancel{\frac{1}{16} + \cos^2\alpha = 1}$

$\cancel{\cos^2\alpha = \frac{15}{16}}$

$\cancel{\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}}$

$\cancel{\alpha \in (0°; 90°)}$

$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot |AC| \cdot \sin 60° = 2 \cdot |AC| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot |AC|$

$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \cdot |AB| \cdot |AC|$

$\sqrt{3} \cdot \cancel{|AC|} = \frac{1}{8} \cdot |AB| \cdot \cancel{|AC|}$

$\sqrt{3} = \frac{1}{8} \cdot |AB| \quad / \cdot 8$

$|AB| = 8\sqrt{3}$

$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$

$L = |AB| + |CD| + |AD| + |BC| = 2(|AB| + |CD|)$

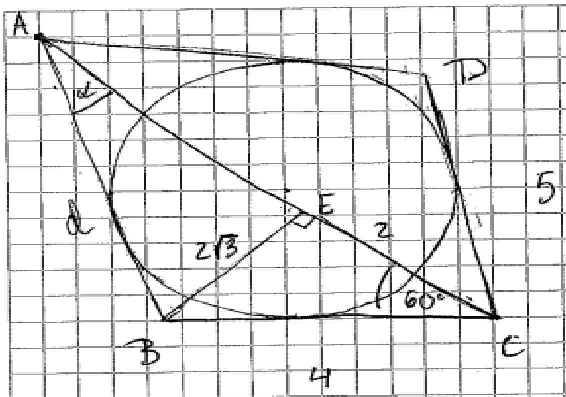
$L = 2 \cdot (8\sqrt{3} + 5)$

Odp.: Obwód wynosi ~~2(8√3+1)~~ $2(8\sqrt{3}+5)$.

Część zdających, którzy poprawnie rozwiązali to zadanie, poprowadzili wysokość BE trójkąta ABC i zauważyli, że trójkąt prostokątny BCE ma kąty ostre o miarach $30°$ i $60°$, więc jest „połową” trójkąta równobocznego o boku długości 4 i z własności takiego trójkąta obliczyli długość przyprostokątnej $|EB| = 2\sqrt{3}$. Następnie skorzystali z definicji sinusa w trójkącie prostokątnym ABE i obliczyli długość boku $|AB| = 8\sqrt{3}$. Zastosowali twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt i obliczyli obwód $Ob_{ABCD} = 16\sqrt{3} + 10$.

Przykład 24R. ilustruje rozwiązanie zadania wyżej omówionym sposobem.

Przykład 24R.

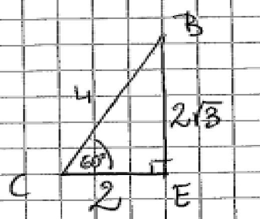


$\sin\alpha = \frac{1}{4}$

$CE \perp BE$

$|AB| = d$

1)



2) $\sin\alpha = \frac{|BE|}{d} = \frac{2\sqrt{3}}{d} = \frac{1}{4}$

$d = 8\sqrt{3}$

3) z warunków opisywalności czworokąta na okręgu

$|AD| + |BC| = |AB| + |CD|$

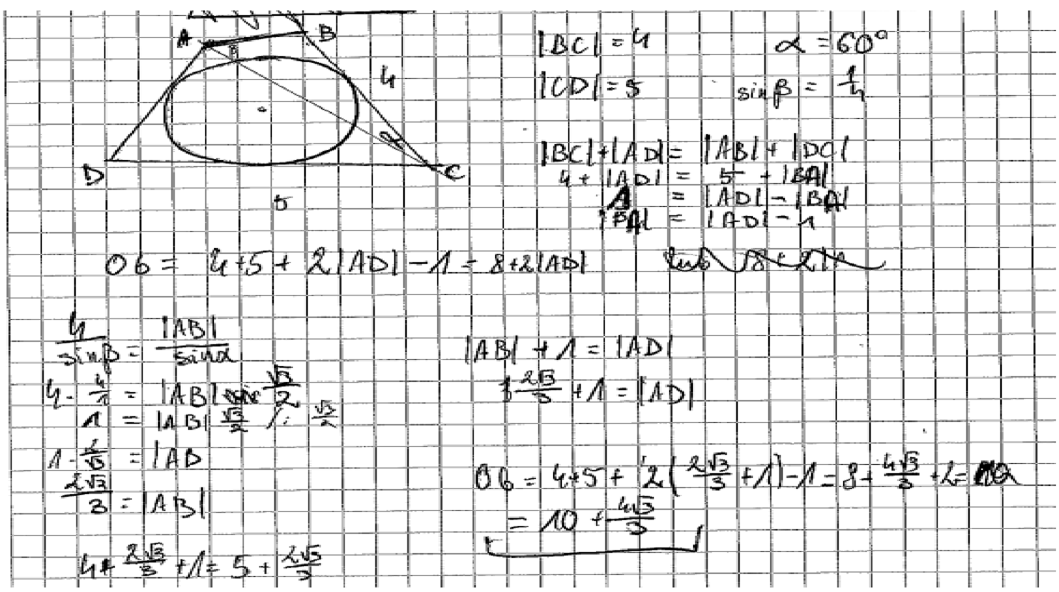
czyli c – obwód

$c = 2(|CD| + |AB|) = 2(5 + 8\sqrt{3}) = 10 + 16\sqrt{3}$

Odp.: obwód ABCD jest równy $10 + 16\sqrt{3}$

Liczna część zdających poprawnie rozpoczynała rozwiązanie i zapisywała poprawne zależności, jednak wskutek błędów rachunkowych nie otrzymywała poprawnego wyniku. Przykład 25R. ilustruje rozwiązanie, w którym zdający błędnie przekształcił ułamek $\frac{|AB|}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ oraz błędnie pomnożył $4 \cdot \frac{4}{1}$ i w efekcie otrzymał błędną długość boku AB, ale z tymi błędami konsekwentnie rozwiązał zadanie do końca.

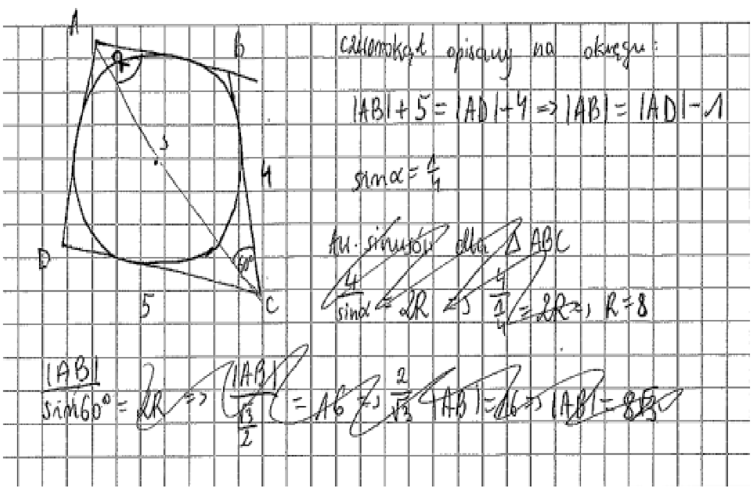
Przykład 25R.



Niemała grupa zdających poprawnie rozpoczynała rozwiązanie, ale nie potrafiła poprawnie zinterpretować i wykorzystać pozostałych informacji podanych w treści zadania i kończyła rozwiązanie.

Zdający, którego rozwiązanie prezentujemy w Przykładzie 26R., poprawnie zinterpretował treść zadania – zastosował twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt i zapisał zależność, z której wyznaczył $|AB| = |AD| - 1$. Następnie zakończył rozwiązanie, choć skreślenia wskazują, że zdający miał dobry pomysł na rozwiązanie tego zadania i próbował wykorzystać pozostałe informacje podane w treści zadania.

Przykład 26R.



Inni zdający próbowali rozwiązać zadanie z wykorzystaniem twierdzenia cosinusów, ale najczęściej nie potrafili rozwiązać układu równań stopnia drugiego. Zdający, którego rozwiązanie prezentujemy w Przykładzie 27R., podjął próbę rozwiązania i obliczył cosinus kąta, którego dany był sinus oraz skorzystał z twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i zapisał zależność $|AB| + 5 = 4 + |AD|$. Zastosował dwukrotnie twierdzenie cosinusów, jednak nie przekształcił otrzymanego układu równań do równania z jedną niewiadomą (długością boku AB) i zakończył rozwiązanie.

Przykład 27R.

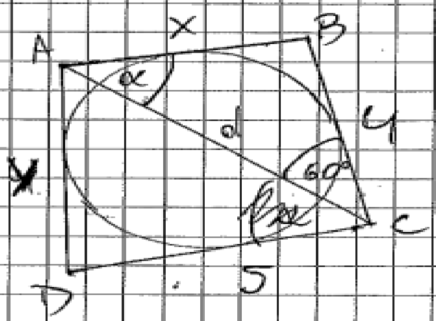
$\sin\alpha = \frac{1}{4}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{1}{16} + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = \frac{15}{16}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$



$x + 5 = y + 4$

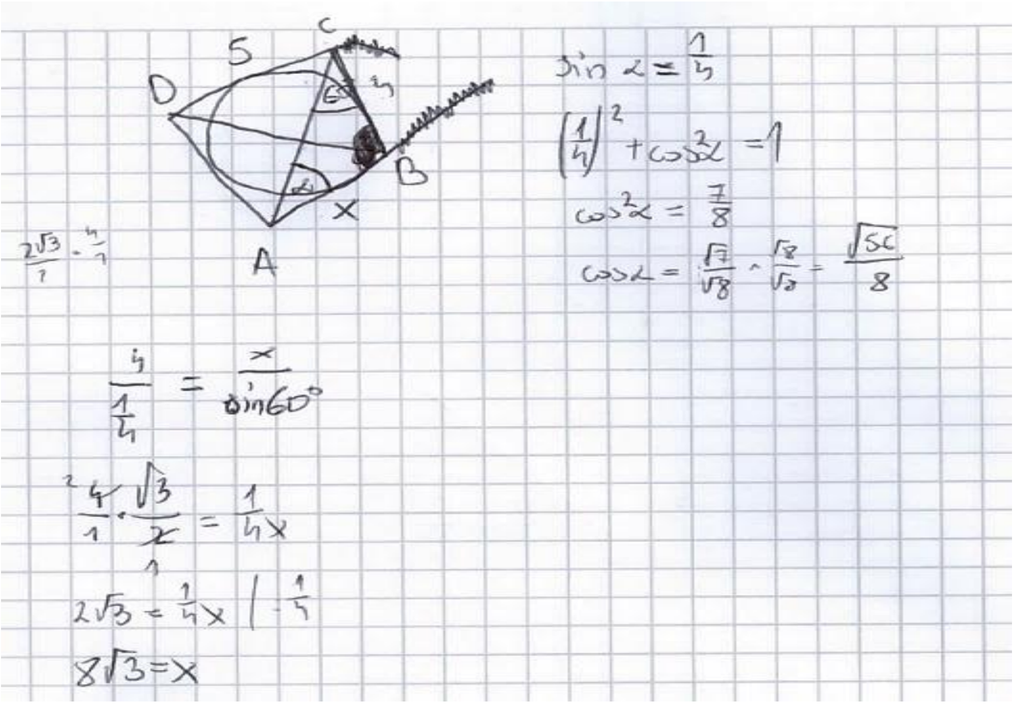
$y = x + 1$

$$\begin{cases} x^2 = 16 + d^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot d \\ (x+1)^2 = 25 + d^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot 5 \cdot d \end{cases}$$

$x^2 = d^2 - 4d + 16$

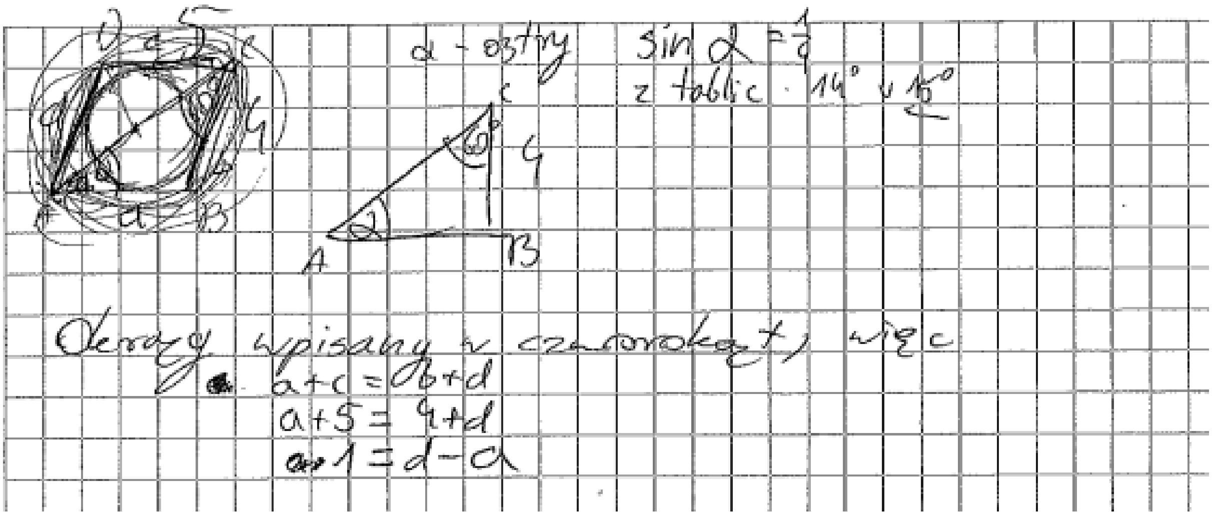
Przykład 28R. ilustruje rozwiązanie, w którym zdający zastosował twierdzenie sinusów i obliczył długość boku AB czworokąta, ale nie potrafił zastosować twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt.

Przykład 28R.



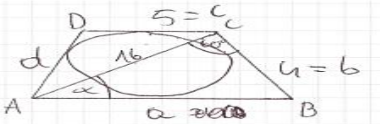
Z kolei zdający, którego rozwiązanie zaprezentowane jest w Przykładzie 29R. zastosował twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt, ale nie potrafił obliczyć długości boku AB czworokąta.

Przykład 29R.



Nieliczna grupa zdających błędnie zinterpretowała treść zadania i przyjmowała błędne założenia o niektórych obiektach matematycznych. Niektórzy spośród nich przyjmowali, że trójkąt ABC jest prostokątny (Przykład 30R.), inni zaś, że środek okręgu leży na przekątnej AC (Przykład 31R.) i na takim błędnym założeniu opierali całe swoje rozwiązanie.

Przykład 30R.



$\sin\alpha = \frac{1}{4}$ $\quad \sin\alpha = \frac{6}{|AC|}$

$\frac{4}{|AC|} = \frac{1}{4}$

$|AC| = 16$

$a + c = b + d \quad d = a + 1$

$5 + a = 4 + d$

$5 + a$

$a + c = 5 + 4\sqrt{13}$

$a^2 = 16^2 + 4^2 - 2\cdot 16\cdot 4\cdot \cos 60^\circ$

$a^2 = 16^2 + 4^2 - 16\cdot 4$

$a^2 = 256 + 16 - 64$

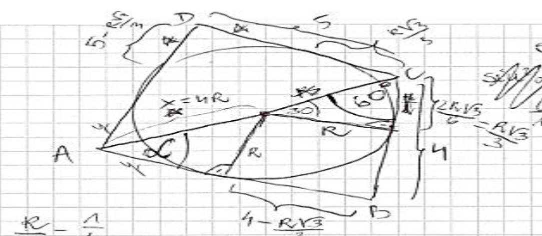
$a^2 = 272 - 64$

$a^2 = 208 \qquad a = \sqrt{208} \qquad a = 4\sqrt{13}$

$Obw = 5 + 4 + 4\sqrt{13} + 4\sqrt{13} + 1 =$

$= 10 + 8\sqrt{13}$

Przykład 31R.



$\sin\alpha = \frac{1}{4}$

$\frac{R}{x} = \frac{1}{4}$

$x = 4R$

$5 + |AB| = 4 + |AD|$

$Ob = |AD| + |AB| + 9$

$\frac{a\sqrt{3}}{2} = R$

$a\sqrt{3} = 2R \;/\cdot\sqrt{3}$

$a = \frac{2R}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

$16R^2 - R^2 = y^2$

$16 = y^2 \qquad y = 4$

$|AB| = y + \frac{4 - R\sqrt{3}}{3} = 4 + \frac{4 - R\sqrt{3}}{3}$

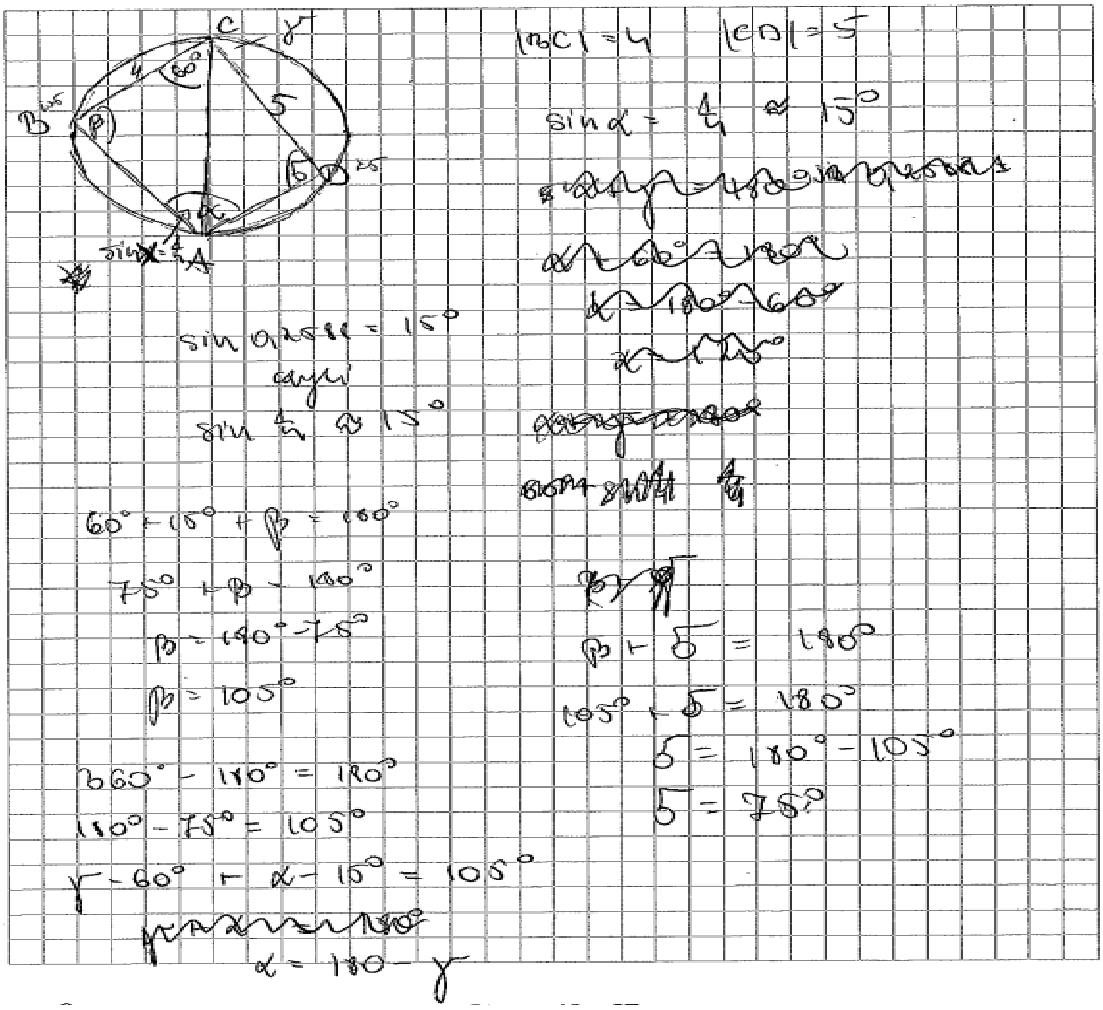
$|AD| = y + 5 - \frac{R\sqrt{3}}{3} = 4 + 5 - \frac{R\sqrt{3}}{3} = 9 - \frac{R\sqrt{3}}{3}$

$5 + 4 + \frac{4 - R\sqrt{3}}{3} = 4 + |AD|$

$|AC| = 4R + \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

Zdarzały się również i takie rozwiązania, w których zdający przyjął, że to okrąg jest opisany na czworokącie i próbował rozwiązać zadanie z wykorzystaniem rachunku miar kątów czworokąta (Przykład 32R.).

Przykład 32R.



Po analizie rozwiązań zadania 8. można sformułować wniosek, że zdający egzamin na poziomie rozszerzonym mieli trudności z poprawną analizą treści zadania, wyodrębnianiem zależności między obiektami matematycznymi i funkcjonalnym ich stosowaniem.

Podobnie stosunkowo niski poziom wykonania ma również **zadanie 13.** (42%) sprawdzające umiejętności z obszaru *Rozumowanie i argumentacja*, w którym maturzyści musieli wykazać się umiejętnością zastosowania i tworzenia strategii przy jego rozwiązywaniu. W poprawnym rozwiązaniu zadania wymagającego umiejętności stosowania i tworzenia strategii występują stałe elementy:

- analiza zadania (określenie relacji między wielkością poszukiwaną a danymi)
- ustalenie kolejnych kroków prowadzących do rozwiązania (ułożenie planu działania)
- realizacja przyjętej strategii i zweryfikowaniu wyniku.

Chodzi o to, aby zdający potrafił podzielić dany problem na kilka mniejszych problemów cząstkowych i nadał im taką strukturę, która pozwoli w wyniku rozwiązania kolejnych problemów cząstkowych, rozwiązać wyjściowy problem.

Przedmiotem rozważań w **zadaniu 13.** było obliczenie współrzędnych punktu C leżącego na okręgu o średnicy AB nad prostą AB, gdzie punkty A i B są punktami wspólnymi paraboli i prostej o podanych równaniach. Zadanie to stanowiło poważne wyzwanie dla wielu zdających. Poprawne rozwiązanie tego zadania wymagało umiejętności znajdowania punktów wspólnych prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej oraz stosowania równania okręgu.

Zdający, którzy poprawnie rozwiązali to zadanie, najczęściej: rozwiązywali układ równań, w którym jednym z równań było równanie prostej l, a drugim równanie paraboli i w ten sposób obliczali współrzędne punktów A i B, następnie obliczali współrzędne środka S odcinka AB. Kolejnym etapem było obliczenie długości odcinka AB i zapisanie równania okręgu o średnicy AB i środku S. Korzystali z własności kąta wpisanego opartego na półokręgu i zauważali, ze kąt ACB jest prosty. Wykorzystali podany w treści zadania tangens kąta ostrego CAB w trójkącie ABC i po zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa obliczali długość przyprostokątnej BC. Po rozwiązaniu układu równań, z których jednym było równanie okręgu o środku w punkcie B i promieniu BC, a drugim równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu $\frac{\sqrt{2}}{2}$, zdający dokonywali krytycznej oceny wyniku i stwierdzali, że jednym z rozwiązań jest odcięta punktu A, zatem szukanym punktem C jest punkt o współrzędnych $\left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)$. Ci zdający mieli świadomość warunków położenia punktu C prowadzących do rozwiązania problemu.

Przykładem 33R. zilustrowano takie poprawne rozwiązanie.

Przykład 33R.

wyliczamy punkty $A ; B$

$$\begin{cases} y = x-2 \\ y = 4x^2-7x+1 \end{cases}$$

$$4x^2-7x+1 = x-2$$

$$4x^2-8x+3=0$$

$$\cancel{(4x-3)(x- \quad)}$$

$$4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$$

$$x_A = \frac{1}{2} \qquad x_B = \frac{3}{2}$$

$$y_A = -\frac{3}{2} \qquad y_B = -\frac{1}{2}$$

$$\Delta = 64-4\cdot4\cdot3 = 64-48=16$$

$$\sqrt{\Delta}=4$$

$$x_{1/2} = \frac{8\pm4}{8}$$

$$x_1 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

AB średnicą okręgu

środek okręgu $O: \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

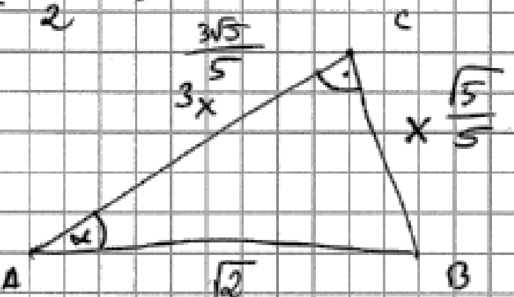
$O(1,-1)$

promień tego okręgu

$r = |OA| = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-1+\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

równanie tego okręgu

$(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2}$



$tg\alpha = \frac{1}{3}$

$\sphericalangle ACB = 90^\circ$

bo AB średnica

$tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$

~~równanie okręgu~~ wyliczmy boki Δ

$2 = x^2 + 9x^2$

$2 = 10x^2$

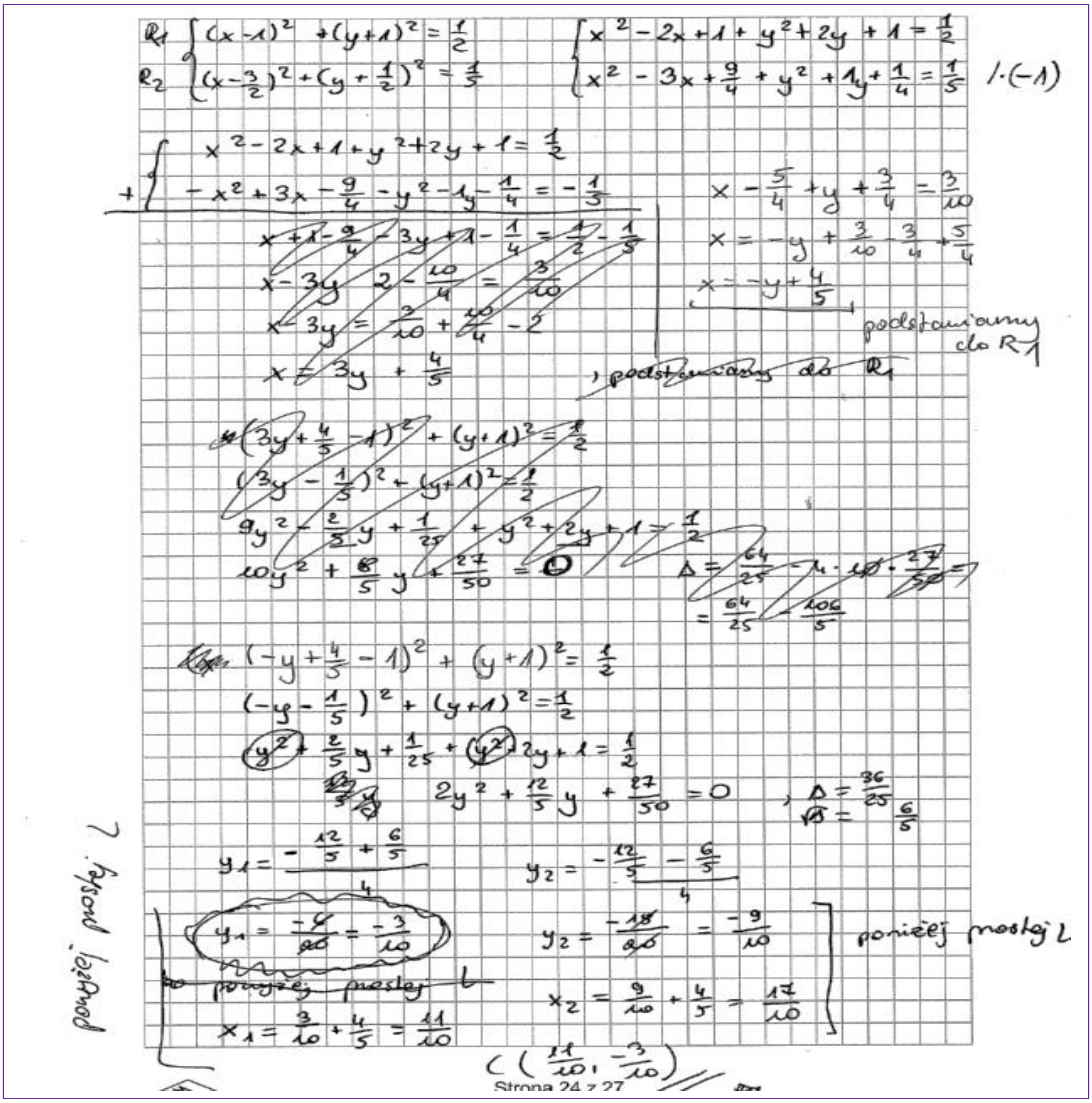
$x^2 = \frac{1}{5}$

$x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $\quad 3x = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

okrąg o środku w B i promieniu $\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{5}$

przecięcie okręgu O z zadania i okręgu o środku w B wyznaczy 2 punkty z czego ten wyżej jest punktem C



Inni zdający, jak ten z Przykładu 34R., zrealizowali strategię w początkowej fazie w analogiczny sposób jak w poprzednim przykładzie. W dalszym rozwiązaniu zauważyli, że kąt ACB jest prosty jako kąt wpisany oparty na średnicy okręgu. Skorzystali z definicji tangensa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym oraz twierdzenia Pitagorasa do obliczenia długości boków AC i BC trójkąta prostokątnego ABC: $|AC| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ i $|BC| = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Następnie wykorzystali obliczone długości przyprostokątnych trójkąta ABC oraz wzór na długość odcinka i zapisali równania z wykorzystaniem długości odcinków BC i AC. Z otrzymanego układu równań stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi wyznaczyli zależność liniową między rzędną i odciętą punktu C: $y = -x + \frac{4}{5}$. Po podstawieniu tej zależności do jednego z równań stopnia drugiego obliczyli współrzędne punktu C. Dokonali krytycznej oceny wyniku i stwierdzili, że jedno z rozwiązań nie spełnia warunków zadania, zatem szukanym punktem C jest punkt o współrzędnych $\left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)$.

Przykład 34R.

$\begin{cases} y = 4x^2 - 7x + 1 \\ y = x - 2 \end{cases}$

$4x^2 - 7x + 1 = x - 2$

$4x^2 - 8x + 3 = 0$

$A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

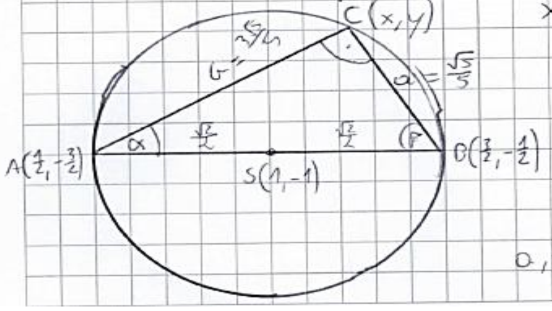
$B\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$\Delta = 64 - 48$

$\sqrt{\Delta} = 4$

$x_1 = \frac{8-4}{8} = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{8+4}{8} = \frac{3}{2}$



$x_S = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2} = 1$

$y_S = \frac{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{2} = -1$

$a, b > 0$

$\alpha \in (0, 90^\circ)$ $\sin\alpha, \cos\alpha > 0$

$tg\alpha = \frac{1}{3}$ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{3}$

$3\sin\alpha = \cos\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha + 9\sin^2\alpha = 1$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10} = \sin\beta$

$|AB| = 2R$

$2R = \sqrt{1^2 + 1^2}$

$R = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\alpha = \frac{a}{2R}$

$a = \frac{\sqrt{10}}{10} \cdot \sqrt{2}$

$a = \frac{\sqrt{20}}{10}$

$a = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin\beta = \frac{b}{2R}$

$b = \frac{\sqrt{10}}{10} \cdot 3 \cdot \sqrt{2}$

$b = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

$\begin{cases} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{5} \to |BC| \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{5} \to |AC| \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{1}{5} \\ x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 3y + \frac{9}{4} = \frac{9}{5} \end{cases}$

$x^2 - 3x + y^2 + y + \frac{10}{4} - \frac{1}{5} = x^2 - x + \frac{10}{4} + y^2 + 3y - \frac{9}{5}$

$-2x - 2y = -\frac{8}{5}$

$x + y = \frac{4}{5}$

$x = \frac{4}{5} - y$

$\left(\frac{16}{25} - \frac{8}{5}y + y^2\right) - 3\left(\frac{4}{5} - y\right) + \frac{10}{4} + y^2 + y = \frac{1}{5}$

$16 - 40y + 25y^2 - 60 + 75y + \cancel{...}\ 62{,}5 + 25y^2 + 25y = 5$

$\cancel{50y^2 + 60y + 13{,}5 = 0}$

$\cancel{100y^2 + 120y + 27 = 0}$

$50y^2 + 60y + 13{,}5 = 0$

$100y^2 + 120y + 27 = 0$

$\sqrt{\Delta} = 60$ $y_1 = \frac{-120-60}{200} = -\frac{9}{10}$

$y_2 = \frac{-120+60}{200} = -\frac{3}{10}$

$y_1 = -\frac{9}{10}$ $x_1 = \frac{17}{10}$

$y_2 = -\frac{3}{10}$ $x_2 = \frac{11}{10}$

$l: x - y - 2 = 0$

dla $x = \frac{17}{10}$ $y = -\frac{3}{10}$ Punkt $P_1\left(\frac{17}{10}, -\frac{9}{10}\right)$ leży pod prostą l odrzucamy

dla $x = \frac{11}{10}$ $y = -\frac{9}{10}$ Punkt $P_2\left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)$ leży nad prostą l – spełnia warunek zadania

~~Współrzędne punktu C~~ $\cancel{\left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)}$.

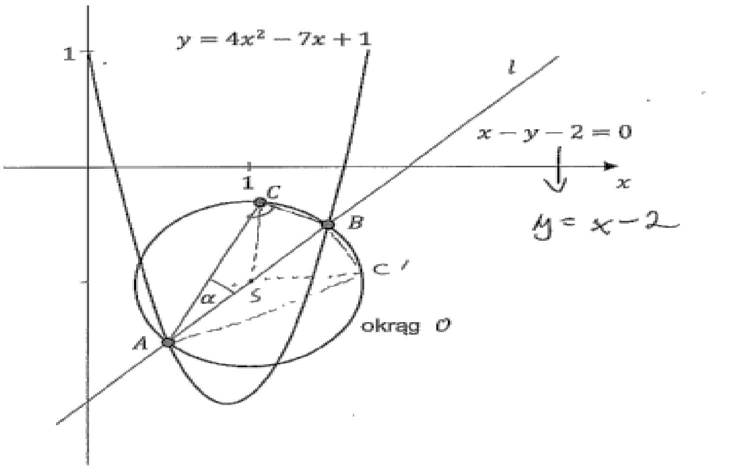
Odp: Punkt C ma współrzędne $\left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)$.

Niektórzy zdający po zrealizowaniu strategii w początkowej fazie w analogiczny sposób jak w poprzednich przykładach i obliczeniu promienia okręgu o środku S, korzystali z danego w treści zadania tangensa kąta α i obliczali wysokość trójkąta ASC opuszczoną z wierzchołka S, następnie korzystali z równoramienności trójkąta ASC i obliczali długość AC. Następnie z układu równań, wyznaczyli związek między współrzędnymi puntu C, by po podstawieniu do jednego z równań otrzymać współrzędne szukanego punktu C.

Wśród poprawnych rozwiązań były i takie, w których zdający zrealizowali strategię w początkowej fazie w analogiczny sposób jak w poprzednim przykładzie, ale następnie z układu równań (w którym jednym z równań było równanie okręgu o środku w punkcie S i promieniu SC, a drugim równanie okręgu o środku w punkcie B i promieniu BC) wyznaczyli związek między współrzędnymi puntu C. Dalej zapisali pole trójkąta ABC na dwa sposoby i z porównania pól obliczyli wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C. Następnie, wykorzystując wzór na odległość punktu od prostej, zapisywali równanie z wartością bezwzględną. Po rozwiązaniu równania dokonywali krytycznej oceny wyniku i stwierdzali, że jedno z rozwiązań nie spełnia warunków zadania, zatem szukanym punktem C jest punkt o współrzędnych $\left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)$.

Jedno z takich rozwiązań prezentujemy w Przykładzie 35R.

Przykład 35R.



Oblicz współrzędne punktu C. Zapisz obliczenia.

$|AB| = 2R$ $\qquad 4x^2 - 7x + 1 = x - 2$

Znajdźmy pkt. A i B:

$y = x - 2 = 4x^2 - 7x + 1 = y$

$4x^2 - 8x + 3 = 0$

$\Delta = 64 - 16 \cdot 3 = 16 \quad \sqrt{\Delta} = 4$

$x_{1,2} = \frac{8 \pm 4}{8}$ $\left< \begin{array}{l} \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = x_B \\ \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = x_A \end{array} \right.$ Z rysunku:

$y_B = x_B - 2 = \frac{3}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow B\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$y_A = x_A - 2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ ✓

$|AB| = 2R = \sqrt{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ✓

$2R = \sqrt{2} \; |^2$

$R = \frac{\sqrt{2}}{2} \; |^2 \Rightarrow R^2 = \frac{1}{2}$

$S\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow S(1, -1)$ ✓

Skoro AB to średnica okręgu to kąt wpisany oparty na średnicy AB ma miarę 90° $\Rightarrow \sphericalangle ACB = 90^\circ$

Równanie okręgu: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = \frac{1}{2}$ ✓

$tg\,\alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{1}{3} \Rightarrow |AC| = 3|BC|$

$y^2 + 2y + x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$

Tw. Pitagorasa: $|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$

$10|BC|^2 = 2$

$C(x_C, y_C)$

$|BC| = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$|AC| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

Rysunek: $x_C \approx 1$

I $|BC| = |BA|$:

$\sqrt{(x_C - 1)^2 + (y_C + 1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; |^2$

II $|BC|$: $\sqrt{\left(x_C - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y_C + \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \; |^2$

$= \frac{23}{10}$

$x_C^2 - 2x_C + 1 + y_C^2 + 2y_C + 1 = \frac{1}{2}$

$x_C^2 - 3x_C + \frac{9}{4} + y_C^2 + y_C + \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$

$x_C^2 - 2x_C + y_C^2 + 2y_C + \frac{3}{2} = 0$

$x_C^2 - 3x_C + y_C^2 + y_C + \frac{23}{10} = 0$

$800y_C^2 + 840y_C = 3380$

Strona 23 z 27

MMAP-R0_100

$x_C + y_C + \left(\frac{3}{2} - \frac{23}{10}\right) \quad \boxed{x_C = \frac{4}{5} - y_C} \quad \frac{3}{2} - \frac{23}{10} = \frac{15}{10} - \frac{23}{10} = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5}$ ✓

Porównanie pól Δ:

III $\frac{|BC| \cdot |AC|}{2} = \frac{d_{C,AB} \cdot |AB|}{2} \Rightarrow d_{C,AB} = \frac{|BC| \cdot |AC|}{|AB|} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}}$

$d_{C,AB} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$

$x - y - 2 = 0$

I $\wedge$ II:

$\boxed{x_C = \frac{4}{5} - y_C}$

$\frac{3\sqrt{2}}{10} = \frac{|x_C - y_C - 2|}{\sqrt{2}}$

$\frac{6}{10} = \frac{3}{5} = |x_C - y_C - 2|$

$x_C - y_C - 2 = \frac{3}{5} \;\vee\; x_C - y_C - 2 = -\frac{3}{5}$

$\begin{cases} x_C = \frac{13}{5} + y_C \\ x_C = \frac{4}{5} - y_C = \frac{8}{10} - y_C \end{cases}$

$x_C = y_C + \frac{10}{5} - \frac{3}{5}$

$\begin{cases} x_C = y_C + \frac{7}{5} \\ x_C = \frac{4}{5} - y_C \end{cases}$

$x \approx 1$

$40y_C = -58$

$y_C = -\frac{58}{40}$

$x_C = \frac{28}{40}$

$y_C + \frac{7}{5} = \frac{4}{5} - y_C$

$2y_C = -\frac{3}{5}$

$\begin{cases} y_C = -\frac{3}{10} \\ x_C = \frac{8}{10} - \left(-\frac{3}{10}\right) = \frac{11}{10} \end{cases}$

$\frac{4}{5} - y_C = \frac{13}{5} + y_C$

$2y_C = -\frac{9}{5}$

$\begin{cases} y_C = -\frac{9}{10} \\ x_C = \frac{17}{10} = 1{,}7 \end{cases}$

to by był płt.

Z rysunku zauważmy, że $x_C \approx 1$

A więc: $\boxed{C\left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)}$

Strona 24 z 27

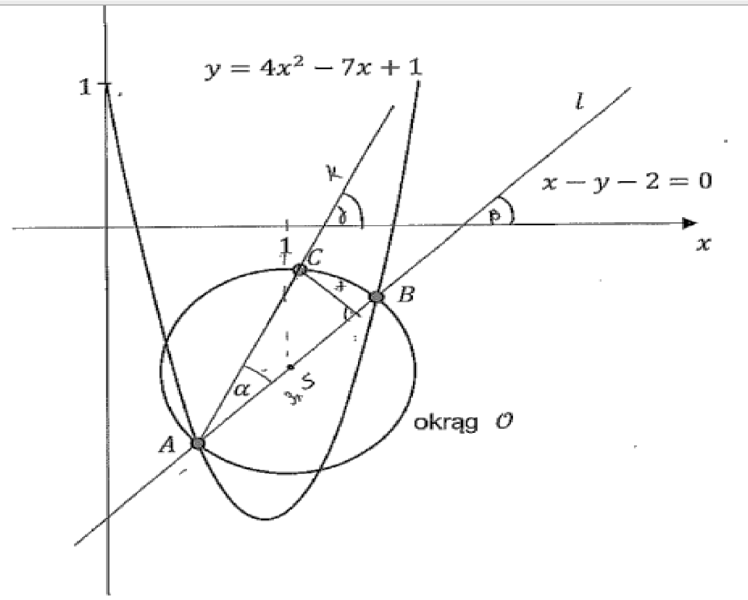
MMAP-R0_100

$x_C >> 1$

Inny sposób, często stosowany przez zdających, którzy poprawnie rozwiązali zadanie 13., polegał na rozwiązaniu układu równań, z których jednym jest równanie okręgu o środku w punkcie S, a drugim równanie prostej AC. Maturzyści obliczyli współrzędne punktów przecięcia paraboli z prostą l. Zauważyli, że skoro prosta l ma równanie kierunkowe $y = x - 2$, więc jest nachylona do osi Ox układu współrzędnych pod kątem $45°$, zatem prosta przechodząca przez punkty A i C jest nachylona do osi Ox układu pod kątem $\alpha + 45°$. Obliczyli $\mathrm{tg}(\alpha + 45°)$ i wyznaczyli równanie prostej AC: $y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}$. W kolejnym kroku obliczyli długość odcinka AB oraz współrzędne środka S okręgu i zapisali równanie okręgu. Następnie obliczyli współrzędne punktów przecięcia tego okręgu z prostą AC, dokonali krytycznej oceny wyniku i stwierdzili, że jedno z rozwiązań nie spełnia warunków zadania, zatem szukanym punktem C jest punkt o współrzędnych $\left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)$.

Jedno z rozwiązań takim sposobem prezentujemy w Przykładzie 36R.

Przykład 36R.



Oblicz współrzędne punktu C. Zapisz obliczenia.

Najpierw obliczymy ~~punkty~~ współrzędne punktu wspólnego prostej l i paraboli – punkty A i B

$\begin{cases} y = 4x^2 - 7x + 1 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ $\quad y = x - 2$

$x - 2 = 4x^2 - 7x + 1$

$4x^2 - 8x + 3 = 0$

$\Delta = 64 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 64 - 48 = 16 = 4^2$

$x_1 = \frac{8+4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ $\quad x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{1}{2}$

$y_1 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$ $\quad y_2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$

$B\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ $\quad A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

Oznaczmy jako S środek okręgu O

$|AS| = |SB| = R$

$S(x, x-2)$ punkt S leży na prostej l

$\overrightarrow{AS} = \left[\frac{3}{2} - x, -\frac{1}{2} - x + 2\right] = \left[\frac{3}{2} - x, \frac{3}{2} - x\right]$

$\overrightarrow{SB} = \left[x - \frac{1}{2}, x - 2 + \frac{3}{2}\right] = \left[x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\right]$

ale $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SB}$

stąd $\frac{3}{2} - x = x - \frac{1}{2}$

$2 = 2x \quad x = 1$

$S(1, -1)$

$|AS| = \sqrt{(\frac{1}{2}-1)^2+(-\frac{3}{2}+1)^2} = R$

$R = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Możemy stąd wyznaczyć równanie okręgu znając jego promień i środek S

$O: \quad (x-1)^2+(y+1)^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2$

$(x-1)^2+(y+1)^2 = \frac{1}{2}$

Punkt C leży na okręgu więc jego współrzędne spełniają równanie okręgu O.

Dla prostej l $\quad y = x-2$

$a = 1 = tg\beta$ zatem $\beta = 45^\circ$ $(\beta \in (0, 90))$

Nazwijmy prostą na której leżą punkty A i C jako k

skoro prosta k jest nachylona pod kątem α dla którego $tg\alpha = \frac{1}{3}$ do prostej l, a prosta l jest nachylona pod kątem 45° do osi OX, możemy obliczyć kąt nachylenia prostej k do osi OX

$\gamma = \alpha + \beta \qquad a_k = tg\gamma = tg(\alpha+\beta) \qquad tg\beta = tg45 = 1$

$a_k = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = \frac{\frac{1}{3}+1}{1-\frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2} = 2$

Punkt A leży na prostej k, więc znając jego współrzędne i a_k możemy obliczyć b_k

$k: \quad y = a_k x + b_k$

$-\frac{3}{2} = 2\cdot\frac{1}{2} + b_k$

$b_k = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2} \qquad k: 2x - \frac{5}{2} = y$

Punkt C spełnia równanie okręgu O i prostej k:

$\begin{cases} (x-1)^2+(y+1)^2 = \frac{1}{2} \\ 2x - \frac{5}{2} = y \end{cases}$

~~x_w paraboli = [illegible]~~

~~$f(x_w) =$ [illegible]~~

$(x-1)^2 + (2x - \frac{5}{2} + 1)^2 = \frac{1}{2}$

$x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 6x + \frac{9}{4} = \frac{1}{2}$

$1 + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} = \frac{4+9-2}{4} = \frac{11}{4}$

$5x^2 - 8x + \frac{11}{4} = 0 \quad / \cdot 4$

$20x^2 - 32x + 11 = 0$

$\Delta = 32^2 - 20\cdot 4\cdot 11 = 1024 - 880 = 144 = 12^2$

$x_1 = \frac{32+12}{40} = \frac{44}{40} = \frac{22}{20} = 1{,}1 \qquad x_2 = \frac{32-12}{40} = \frac{20}{40} = 0{,}5$

$y_1 = 2\cdot 1{,}1 - \frac{5}{2} = -0{,}3 \qquad y_2 = 2\cdot 0{,}5 - \frac{5}{2} = -1{,}5$

~~Widzimy że dla [illegible]~~ y_1 $\qquad$ Widzimy, że x_2 i y_2 to współrzędne A

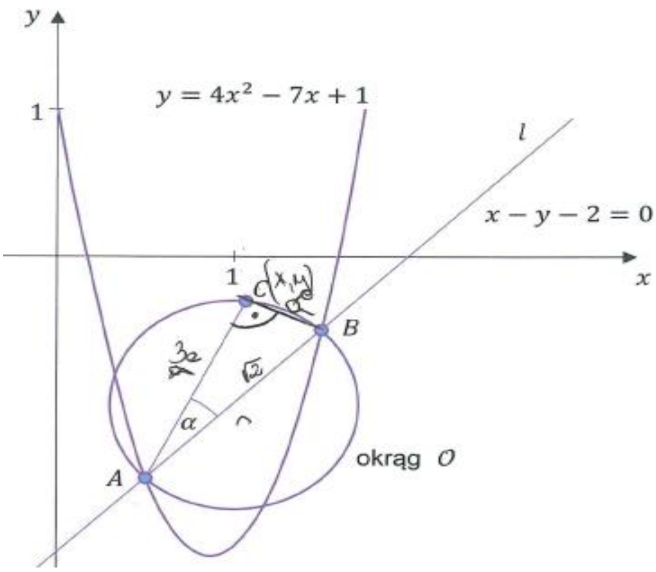
zatem punkt C ma współrzędne $C(1{,}1; -0{,}3)$

$x_C = 1{,}1 \qquad y_C = -0{,}3$

Część maturzystów rozwiązywała zadanie, korzystając z własności kąta wpisanego opartego na średnicy. Abiturienci obliczyli współrzędne punktów przecięcia paraboli z prostą l. Zauważyli, że skoro prosta l ma równanie kierunkowe $y = x - 2$, więc jest nachylona do osi Ox układu współrzędnych pod kątem $45°$, zatem prosta przechodząca przez punkty A i C jest nachylona do osi Ox układu pod kątem $\alpha + 45°$. Obliczyli $\mathrm{tg}(\alpha + 45°) = 2$, poprawnie korzystając ze wzoru na tangens sumy kątów i wyznaczyli równanie prostej AC: $y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}$. Skorzystali z własności kąta wpisanego opartego na średnicy AB i wnioskowali, że kąt ACB jest prosty. Wobec tego współczynnik kierunkowy prostej BC jest równy $a_{BC} = -\frac{1}{2}$ i prosta BC ma równanie $y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}$. Następnie z tego, że punkt $C = (x_C, y_C)$ leży na prostych AC i BC i z przyrównania y_C z obu równań obliczyli odciętą x_C i otrzymali $C = \left(\frac{11}{10}, -\frac{3}{10}\right)$.

Niemałej części maturzystów, którzy poprawnie zaplanowali sposób rozwiązania zadania, w osiągnięciu pełnego sukcesu przeszkodziły braki w podstawowych umiejętnościach. Części maturzystów, pomimo zrozumienia istoty zagadnienia, popełniony błąd rachunkowy uniemożliwiał otrzymanie poprawnych współrzędnych punktu C (Przykład 37R.).

Przykład 37R.



$x - 2 = y$

$x - 2 = 4x^2 - 7x + 1$

$4x^2 - 8x + 3 = 0$

$\Delta = 64 - 48 = 16 \quad \sqrt{\Delta} = 4$

$x = \frac{8-4}{8} = \frac{1}{2} \quad y = -1{,}5$

$x = \frac{8+4}{8} = \frac{3}{2} \quad y = -0{,}5$

$A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$B\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{3}$

$3a = 6$

$|BS| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$a^2 + 9a^2 = 2$ $\quad a>0$

$10a^2 = 2$

$a^2 = \frac{2}{10}$

$a = \sqrt{\frac{2}{10}}$

$\left(\frac{1}{2}-x\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}-y\right)^2$

$\sqrt{\frac{2}{10}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}-x\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}-y\right)^2}$

$\left(\sqrt{\frac{18}{10}}\right)^2 \quad \frac{18}{10} = \frac{1}{4} + x^2 - x + \frac{9}{4} + y^2 + 3y$

$\frac{2}{10} = \left(\frac{3}{2}-x\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}-y\right)^2$

$\frac{10}{4} - \frac{18}{10} + x^2 + y^2 - x + 3y$

$\frac{2}{10} = \frac{9}{4} + x^2 - 3x + \frac{1}{4} + y^2 + y$

$\frac{10}{4} + x^2 + y^2 = \frac{18}{10} + x - 3y$

$\frac{10}{4} - \frac{2}{10} + x^2 - 3x + y^2 + y = 0$

$\frac{10}{4} + x^2 + y^2 = \frac{2}{10} + 3x - y$

$\frac{18}{10} + x - 3y = \frac{2}{10} + 3x - y$

$\frac{16}{10} - 2x - 2y = 0 \quad | \cdot 10$

$16 - 20x - 20y = 0$ $\quad \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

$20y = 16 - 20x$

$y = \frac{4}{5} - x$

$y = \frac{4}{5} - x$

$\frac{10}{4} - \frac{2}{10} + x^2 - 3x + y^2 + y = 0$

$\frac{10}{4} - \frac{2}{10} + x^2 - 3x + \frac{16}{25} + x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{4}{5} - x = 0$

$\frac{28}{5}$

$2x^2 - 5\frac{3}{5}x + \frac{93}{25} = 0 \quad / \cdot 25$

$50x^2 - 140x + 93 = 0$

$\frac{10}{4} - \frac{2}{10} + \frac{8}{10} + \frac{16}{25} =$

$\Delta = 19600 - 18600 = 1000 = 10\sqrt{10}$ $\quad = \frac{10}{4} + \frac{6}{10} + \frac{16}{25} =$

$x = \frac{140 - 10\sqrt{10}}{100} = \frac{14-\sqrt{10}}{10}$ $\quad = \frac{5}{2} + \frac{3}{5} + \frac{16}{25} =$

$x = \frac{140 + 10\sqrt{10}}{100} = \frac{14+\sqrt{10}}{10}$ $\quad = \frac{5}{2} + \frac{15}{25} + \frac{16}{25} =$

$\frac{5}{2} + \frac{31}{25} = \frac{125+61}{50}$

$\frac{186}{50} = \frac{93}{25}$

$\begin{cases} x = \frac{14-\sqrt{10}}{10} \\ y = \frac{\sqrt{10}-6}{10} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \frac{14+\sqrt{10}}{10} \\ y = \frac{-6-\sqrt{10}}{10} \end{cases}$

$C: \left(\frac{14-\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}-6}{10}\right)$ lub $C\left(\frac{14+\sqrt{10}}{10}, \frac{-6-\sqrt{10}}{10}\right)$

Odp.

Część zdających popełniła błędy już na początku rozwiązania przy wyznaczaniu współrzędnych środka okręgu i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiązywała zadanie do końca. Niekiedy jednak popełnione błędy rachunkowe, popełnione już w początkowej fazie rozwiązania zadania, powodowały tak duże utrudnienie dla zdających, że nie potrafili oni pokonać kolejnych etapów rozwiązania.

Dość liczną grupę wśród tegorocznych maturzystów, których rozwiązanie świadczy o zrozumieniu rozważnego problemu i utworzeniu strategii prowadzącej do jego rozwiązania, stanowili zdający, którzy nie rozumieją związku współczynnika kierunkowego prostej z tangensem kąta nachylenia prostej do dodatniej półosi układu współrzędnych. Niektórzy spośród tych zdających błędnie przyjmowali, że współczynnik kierunkowy prostej AC jest równy $\frac{1}{3}$ i z tym błędem rozwiązywali zadnia do końca.

Wśród zdających, którzy w rozwiązaniu korzystali z równania prostej AC, byli i tacy, którzy co prawda słusznie zauważali, że nie jest ona nachylona do osi OX pod kątem α, którego tangens jest równy $\frac{1}{3}$, a jej kąt nachylenia jest sumą kąta α i kąta o mierze $45°$. Jednak przy obliczaniu współczynnika kierunkowego prostej AC błędnie obliczali tangens sumy kątów jako sumę tangensów.

Inni obliczyli długość średnicy AB i zauważyli, że trójkąt ABC jest prostokątny. Wykorzystali podany w treści zadania tangens kąta ostrego CAB w trójkącie ABC, po zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa obliczyli długości przyprostokątnych tego trójkąta, ale z powodu braku umiejętności tworzenia strategii rozwiązania zadania, nie potrafili wykorzystać otrzymanych wyników do dalszego rozwiązania. Jeszcze inni zapisali poprawne równanie okręgu, zapisali związek między przyprostokątnymi trójkąta ABC, ale nie potrafili rozwiązać układu równań stopnia drugiego.

Wcale niemała część maturzystów nie miała żadnego pomysłu na rozwiązanie postawionego problemu, potrafiła poprawnie obliczyć jedynie współrzędne punktów A i B oraz środka S okręgu i obliczyć promień okręgu. Pośród tej grupy rozwiązań, były i takie, które kończyły się po obliczeniu tylko współrzędnych punktów A i B, a nawet takie, w których zdający popełnił błąd już przy obliczaniu wyróżnika trójmianu kwadratowego i na tym zakończył rozwiązanie.

Przykładem 38R. ilustrujemy częste rozwiązania zdających, którzy poprawnie rozpoczynali rozwiązanie zadania. Nie potrafili jednak wykorzystać otrzymanych zależności w dalszej części rozwiązania z powodu braku całościowej koncepcji rozwiązania problemu.

Przykład 38R.

$$\begin{cases} x-y-2=0 \\ 4x^2-7x+1=y \end{cases} \qquad y=x-2$$

$$4x^2-7x+1=x-2$$

$$4x^2-8x+3=0$$

$$\Delta=64-4\cdot4\cdot3=16 \quad \sqrt{\Delta}=4$$

$$x_A=\frac{8-4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$x_B=\frac{8+4}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

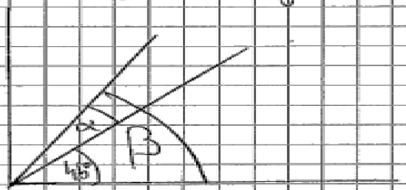
$$A\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right),\ B\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$x-y-2=0$$

$$y=x-2$$

$$a=1=\operatorname{tg}\alpha$$

prosta l jest nachylona do osi OX pod kątem 45°



$$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha+45^\circ)=\frac{\frac{1}{3}+1}{1-\frac{1}{3}\cdot1}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}=2$$

$$AC:\ y=2x+b \qquad AC:\ y=2x-\frac{5}{2}$$

$$-\frac{3}{2}=2\cdot\frac{1}{2}+b$$

$$-\frac{3}{2}=1+b$$

$$b=-\frac{5}{2}$$

$$|AB|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$r=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S=\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2},\frac{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{2}\right)=(1,-1)$$

środek okręgu

Większość maturzystów, którzy podjęli to zadanie, ale nie stworzyli strategii prowadzącej do rozwiązania problemu, kończyło rozwiązanie na zapisaniu równania okręgu o środku S, choć nie zawsze było one poprawne, gdyż zamiast promienia do równania okręgu podstawiali średnicę. Takie rozwiązanie ilustruje Przykład 39R.

Przykład 39R.

$l: \begin{cases} y = x - 2 \\ y = 4x^2 - 7x + 1 \end{cases}$

$y_A = \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{3}{2}$

$y_B = \frac{3}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{1}{2}$

$x - 2 = 4x^2 - 7x + 1 \quad / -x + 2$

$4x^2 - 8x + 3 = 0$

$\Delta = 64 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 64 - 16 \cdot 3 = 64 - 48 = 16$

$\sqrt{\Delta} = 4$

$x_1 = \frac{8-4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

$x_2 = \frac{8+4}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow B\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

$|AB| = r$

$|AB| = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$r = \sqrt{2}$

$S_{AB} = \left[\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right] = \left[\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2}; \frac{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2}\right] = \left[\frac{\frac{4}{2}}{2}; \frac{-\frac{4}{2}}{2}\right]$

$S_{AB} = O = [1; -1]$

środek okręgu

$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ równanie okręgu O

Z analizy rozwiązań zadania 13. wynika, że zdecydowana większość zdających, która podjęła się rozwiązania tego zadania, wykazała się umiejętnością obliczania współrzędnych punktów wspólnych prostej i paraboli o podanych równaniach oraz stosowania równania okręgu. Główną przyczynę niskich wyników, w przypadku tego zadania, stanowił brak całościowej koncepcji rozwiązania zadania, błędy w interpretacji treści tego zadania oraz brak funkcjonalnego opanowania związku współczynnika kierunkowego prostej z tangensem kąta nachylenia prostej do dodatniej półosi układu współrzędnych.

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najlepiej

Analiza wskaźników poziomu wykonania zadań występujących w zestawie egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym pozwala sformułować wniosek, iż wśród zadań występujących w zestawie egzaminacyjnym żadne z zadań nie było bardzo łatwe, tylko jedno zadanie były łatwe, pięć zadań było umiarkowanie trudnych, a pozostałe zadania były trudne dla tegorocznych maturzystów.

Spośród tegorocznych zadań najłatwiejsze były te, przy rozwiązywaniu których należało zastosować konkretne twierdzenia w typowych kontekstach.

Najłatwiejsze dla zdających były zadania wymagające prostego zastosowania wzorów. **Zadanie 12.1.** (poziom wykonania zadania – 78%), w którym zdający: stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu oraz stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi, nie przysporzyło trudności większości zdających egzamin na poziomie rozszerzonym.

Z kolei **zadanie 2.**, przy rozwiązywaniu którego należało wykazać się umiejętnością stosowania schematu Bernoullego, poprawnie rozwiązało 67% zdających. Taki sam wynik osiągnęli maturzyści w **zadaniu 4.**, w którym należało skorzystać ze wzorów: $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3+b^3 i a^3-b^3.

Poziom opanowania sprawdzanych umiejętności przez powyższe zadania pozwala stwierdzić, że liczna grupa zdających egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym opanowała następujące umiejętności podstawy programowej:

- stosowania wzoru na zamianę podstawy logarytmu oraz wzorów na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi
- budowania prostego modelu probabilistycznego przy obliczaniu prawdopodobieństwa z zastosowaniem schematu Bernoullego
- stosowania wzorów skróconego mnożenia do przeprowadzanie dowodów algebraicznych
- stosowania definicji pochodnej funkcji, podawania interpretacji geometrycznej pochodnej.

WNIOSKI I REKOMENDACJE

POZIOM PODSTAWOWY

1. Wyniki egzaminu maturalnego na poziomie podstawowym wskazują, że do zadań, w których zdający osiągnęli bardzo dobre rezultaty, należą przede wszystkim zadania jednoetapowe, osadzone w typowym kontekście.
2. Najlepsze wyniki maturzyści osiągnęli w zadaniach zamkniętych: dotyczących ciągów liczbowych – za obliczenie wyrazu ciągu z wykorzystaniem podanego wzoru na n- ty wyraz tego ciągu, za odczytywanie niektórych własności funkcji z podanego wykresu oraz za rozpoznanie poprawnych układów równań liniowych opisujących sytuację z treści zadania.
3. Wysoki był również odsetek zdających, którzy w zadaniach zamkniętych potrafili wykonać działania na logarytmach oraz rozpoznać wielokąt, będący podstawą ostrosłupa prawidłowego, na podstawie informacji o stosunku liczby wierzchołków i liczby krawędzi tego ostrosłupa.
4. Maturzyści lepiej poradzili sobie z zadaniami, w których należało posłużyć się definicją lub zastosować znany algorytm, niż z zadaniami, które wymagały zaplanowania strategii rozwiązania, zbadania własności podanego modelu lub uzasadnienia tezy twierdzenia.
5. Największe trudności (poziom wykonania – 43%) sprawiło zdającym zadanie wymagające przeprowadzenia rozumowania i dobrania trafnych argumentów na rzecz prawdziwości tezy twierdzenia. Stało się tak, mimo że w każdym z trzech arkuszy, opublikowanych w roku 2022, w marcu, wrześniu i grudniu na stronie internetowej Centralnej Komisji Egzaminacyjnej, zostało umieszczone zadanie na dowodzenie, którego tematem była podzielność w zbiorze liczb całkowitych.
6. Jedną z głównych przyczyn niepowodzeń na egzaminie maturalnym z matematyki jest brak odpowiedniej sprawności rachunkowej, słaba znajomość praw działań oraz własności działań w zbiorze liczb rzeczywistych, nieuwaga zdających skutkująca popełnianiem błędów w obliczeniach lub w przekształceniach algebraicznych, często nieskomplikowanych lub też brak refleksji nad sensownością otrzymanego wyniku liczbowego. Warto byłoby kształtować świadomość, że sprawdzanie poprawności oraz realności otrzymanych wyników jest częścią rozwiązania zadania.
7. Szczególną uwagę w nauczaniu matematyki warto poświęcić rozważaniom zagadnień kilkuetapowym. Nie do przecenienia jest kształcenie umiejętności opracowywania, a potem przeprowadzania logicznego ciągu następujących po sobie działań.

POZIOM ROZSZERZONY

1. Na poziomie rozszerzonym dla zdających nie było zadań bardzo łatwych. Najlepsze wyniki zdający uzyskali w zadaniach sprawdzających umiejętność stosowania wzoru na zamianę podstawy logarytmu oraz wzorów na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi, budowania prostego modelu probabilistycznego przy obliczaniu prawdopodobieństwa z zastosowaniem schematu Bernoullego, stosowania wzorów skróconego mnożenia do przeprowadzanie dowodów algebraicznych oraz stosowania definicji pochodnej funkcji, podawania interpretacji geometrycznej pochodnej.

2. Maturzyści lepiej poradzili sobie z rozwiązaniem zadań, w których należy wykorzystać znany algorytm, niż z zadaniami wymagającymi zaplanowania strategii rozwiązania, modelowania matematycznego czy uzasadnieniem postawionej tezy.
3. Wyniki egzaminu maturalnego wyraźnie wskazują, że najwięcej trudności na egzaminie z matematyki sprawiają maturzystom zadania wymagające uzasadnienia prawdziwości tezy. Zadania wymagające przeprowadzenia rozumowania i przytoczenia poprawnej argumentacji są znacznie częściej od innych pomijane, a wśród tych zdających, którzy podejmują próbę ich rozwiązania, jest wielu wnioskujących o prawdziwości tezy na podstawie sprawdzenia poprawności dla kilku wybranych wartości.
4. Egzamin ujawnił niski poziom opanowania przez zdających umiejętności z zakresu planimetrii i geometrii na płaszczyźnie kartezjańskiej. Dotyczy to głównie zadań, w których należało stworzyć strategię rozwiązania, łącząc w spójną, logicznie uporządkowaną całość kilka pojedynczych umiejętności albo zbudować model matematyczny sytuacji zadaniowej.
5. Wpływ na wyniki egzaminu ma relatywnie niski poziom umiejętności rozumienia tekstu matematycznego. Świadczą o tym nieudane próby podjęcia rozwiązania zadań, gdzie już w początkowej fazie tworzenia strategii rozwiązania zdający przystępują do rozważania sytuacji odmiennych od wynikających z treści zadań. W trakcie procesu kształcenia nauczyciele powinni nadać duże znaczenie początkowej fazie rozwiązania zadania, tj. precyzyjnemu ustaleniu istoty rozwiązywanego problemu i rozumieniu opisanej sytuacji.
6. Na wynik egzaminu z matematyki na poziomie rozszerzonym znacząco wpływa brak sprawności rachunkowej oraz problemy z poprawnym wykonywaniem obliczeń rachunkowych.
7. Podczas lekcji należy pokazywać i wyjaśniać alternatywne ujęcia zagadnień, które umożliwiają poprawne i szybkie rozwiązanie problemu, oraz ćwiczyć z uczniami rozwiązywanie zadań różnymi sposobami, ukazując tym samym rozmaitość strategii rozwiązywania problemów matematycznych.