CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

OKRĘGOWA KOMISJA EGZAMINACYJNA W POZNANIU

Rodzaj dokumentu:	**Sprawozdanie za rok 2022** **województwo lubuskie**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy** **Poziom rozszerzony**
Termin egzaminu:	5 maja 2022 r. – poziom podstawowy 11 maja 2022 r. – poziom rozszerzony
Data publikacji dokumentu:	19 września 2022 r.

Opracowanie
Ewa Ludwikowska (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku)
Piotr Ludwikowski (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie)
Sebastian Felski (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Hubert Rauch (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Redakcja
dr Wioletta Kozak (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Opracowanie techniczne
Andrzej Kaptur (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Współpraca
Beata Dobrosielska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Agata Wiśniewska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Pracownie ds. Analiz Wyników Egzaminacyjnych okręgowych komisji egzaminacyjnych

Opracowanie dla województwa lubuskiego

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
Izabela Szafrańska
Anna Sperling

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. 22 536 65 00, fax 22 536 65 04
e-mail: sekretariat@cke.gov.pl
www.cke.gov.pl

Spis treści

Poziom podstawowy. Opis arkusza egzaminu maturalnego

W roku 2022 egzamin maturalny z matematyki był przeprowadzony na podstawie wymagań egzaminacyjnych określonych w załączniku nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji i Nauki z dnia 20 marca 2020 r.[1]

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie podstawowym składał się z 28 zadań zamkniętych wyboru wielokrotnego z jedną poprawną odpowiedzią oraz 7 zadań otwartych, w tym 6 krótkiej odpowiedzi i 1 rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności opisane w pięciu obszarach wymagań egzaminacyjnych określonych dla egzaminu maturalnego w roku szkolnym 2021/2022:

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji (pięć zadań zamkniętych).
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (piętnaście zadań zamkniętych i jedno zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi).
III. Modelowanie matematyczne (pięć zadań zamkniętych, dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi, jedno zadanie otwarte rozszerzonej odpowiedzi).
IV. Użycie i tworzenie strategii (trzy zadania zamknięte, dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi).
V. Rozumowanie i argumentacja (jedno zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi).

Zdający mogli korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych,* cyrkla, linijki oraz kalkulatora prostego. Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 45 punktów.

Poziom podstawowy. Dane dotyczące populacji zdających

TABELA 1. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZU STANDARDOWYM*

Liczba zdających		6035
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	3353
	z techników	2682
	ze szkół branżowych II stopnia	0
	ze szkół na wsi	125
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	1665
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	1229
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	3016
	ze szkół publicznych	5508
	ze szkół niepublicznych	527
	kobiety	3357
	mężczyźni	2678
	bez dysleksji rozwojowej	5503
	z dysleksją rozwojową	532

* Dane w tabeli dotyczą tegorocznych absolwentów.

[1] Załącznik nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 20 marca 2020 r. w sprawie szczególnych rozwiązań w okresie czasowego ograniczenia funkcjonowania jednostek systemu oświaty w związku z zapobieganiem, przeciwdziałaniem i zwalczaniem COVID-19 (Dz.U. poz. 493, z późn. zm.).

TABELA 2. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZACH DOSTOSOWANYCH

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	25
	słabowidzący	5
	niewidomi	0
	słabosłyszący	9
	niesłyszący	0
	z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym	3
	o których mowa w art. 2 ust. 1 ustawy[2] (obywatele Ukrainy)	2
	Ogółem	**44**

Poziom podstawowy. Przebieg egzaminu

TABELA 3. INFORMACJE DOTYCZĄCE PRZEBIEGU EGZAMINU

Termin egzaminu			5 maja 2022
Czas trwania egzaminu dla arkusza standardowego			170 minut
Liczba szkół			126
Liczba zespołów egzaminatorów			3
Liczba egzaminatorów			81
Liczba obserwatorów[3] (§ 8 ust. 1)			12
Liczba unieważnień[4]	w przypadku:		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	0
	art. 44zzv pkt 3	zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu	0
	art. 44zzw ust. 1	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego	0
	art. 44zzy ust. 10	niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)	0
Liczba wglądów[4] (art. 44zzz)			78

[2] Ustawa z dnia 12 marca 2022 r. o pomocy obywatelom Ukrainy w związku z konfliktem zbrojnym na terytorium tego państwa (Dz.U. z 2022 r. poz. 583).
[3] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 21 grudnia 2016 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu przeprowadzania egzaminu gimnazjalnego i egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2016 r. poz. 2223, ze zm.).
[4] Ustawa z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz.U. z 2021 r. poz. 1915, z późn. zm.).

Poziom podstawowy. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających

WYKRES 1. ROZKŁAD WYNIKÓW ZDAJĄCYCH

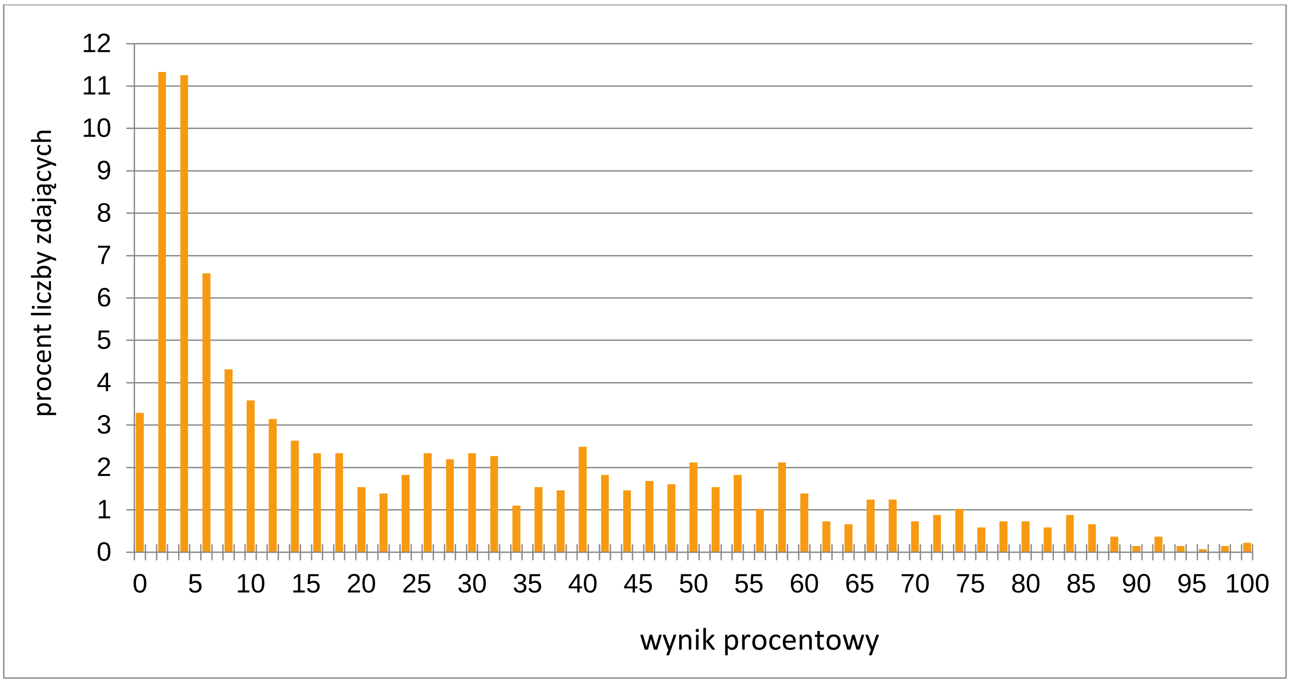


TABELA 4. WYNIKI ZDAJĄCYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)	Odsetek sukcesów (%)
ogółem	**6035**	**4**	**100**	**53**	**53**	**54**	**25**	**81**
w tym:								
z liceów ogólnokształcących	3353	4	100	60	100	60	25	84
z techników	2682	4	100	47	33	47	22	76
z branżowych szkół II stopnia	0	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

* Dane dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów. Parametry statystyczne są podane dla grup liczących 30 lub więcej zdających.

Poziom wykonania zadań

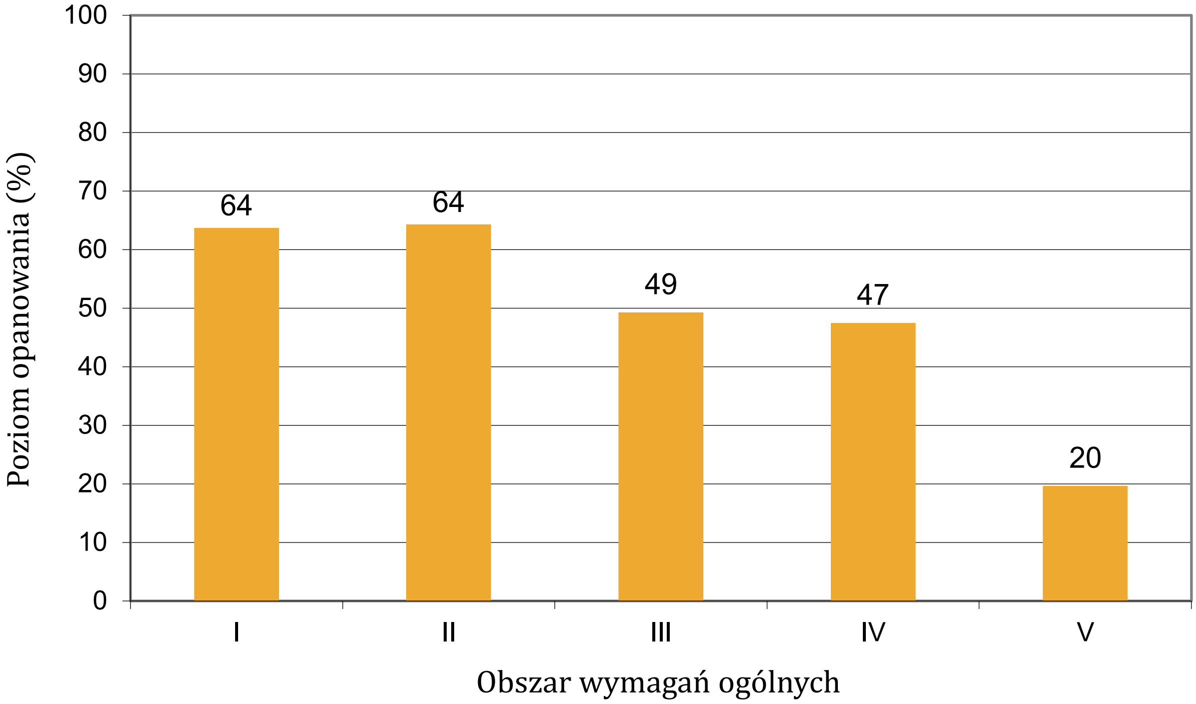
TABELA 5. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ

Wymagania egzaminacyjne 2022			
Nr zad.	**Wymagania ogólne**	**Wymagania szczegółowe** *Gdy wymaganie szczegółowe dotyczy treści z III etapu edukacyjnego – dopisano „G”.*	**Poziom wykonania zadania (%)**
1.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach.	**62**
2.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G1.6) oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych.	**70**
3.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu […] i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.	**66**
4.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 1.8) wykonuje obliczenia procentowe.	**58**
5.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.	**64**
6.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G7.6) rozwiązuje układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.	**62**
7.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 3.3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.	**62**
8.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 3.6) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań […].	**65**
9.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G8.3) odczytuje z wykresu funkcji: wartość funkcji dla danego argumentu […].	**59**
10.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.4) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$ […].	**41**
11.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość.	**63**

12.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje).	**72**
13.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 5.1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.	**82**
14.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu arytmetycznego.	**76**
15.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.4) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu geometrycznego.	**39**
16.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.3) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ […] oraz $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$.	**69**
17.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.	**67**
18.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: G10.6) oblicza pole koła, wycinka kołowego.	**67**
19.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G10.9) oblicza pola i obwody trójkątów […].	**85**
20.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.4) korzysta […] ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.	**72**
21.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty […].	**58**
22.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.2) bada […] prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych.	**78**
23.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.5) wyznacza współrzędne środka odcinka.	**66**
24.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.6) oblicza odległość dwóch punktów.	**46**
25.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G11.2) oblicza […] objętość graniastosłupa prostego […].	**70**
26.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: G11.2) oblicza pole powierzchni […] ostrosłupa.	**40**

27.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.	**46**
28.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G9.3) wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych.	**85**
29.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.	**68**
30.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.	**65**
31.	V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ […].	**20**
32.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 6.3) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi […]; 6.4) znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta.	**39**
33.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów.	**25**
34.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.2) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.	**69**
35.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 4.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o funkcji lub o jej wykresie.	**23**

WYKRES 2. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ W OBSZARZE WYMAGAŃ OGÓLNYCH



Poziom rozszerzony. Opis arkusza egzaminu maturalnego

W roku 2022 egzamin maturalny z matematyki był przeprowadzony na podstawie wymagań egzaminacyjnych określonych w załączniku nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji i Nauki z dnia 20 marca 2020 r.[5]

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie rozszerzonym zawierał 4 zadania zamknięte wielokrotnego wyboru, 11 zadań otwartych, w tym 7 zadań krótkiej i 4 zadania rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności opisane w pięciu obszarach wymagań ogólnych podstawy programowej z matematyki:

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji (jedno zadanie zamknięte).
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (trzy zadania zamknięte, jedno zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi).
III. Modelowanie matematyczne (jedno zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi i dwa zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi).
IV. Użycie i tworzenie strategii (trzy zadania otwarte krótkiej odpowiedzi i dwa zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi).
V. Rozumowanie i argumentacja (dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi).

Zdający mogli korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych,* cyrkla, linijki oraz kalkulatora prostego. Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 50 punktów.

Poziom rozszerzony. Dane dotyczące populacji zdających

TABELA 6. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZU STANDARDOWYM*

Liczba zdających		**1368**
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	830
	z techników	538
	ze szkół branżowych II stopnia	0
	ze szkół na wsi	7
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	275
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	294
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	792
	ze szkół publicznych	1281
	ze szkół niepublicznych	87
	kobiety	554
	mężczyźni	814
	bez dysleksji rozwojowej	1240
	z dysleksją rozwojową	128

* Dane w tabeli dotyczą tegorocznych absolwentów.

[5] Załącznik nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 20 marca 2020 r. w sprawie szczególnych rozwiązań w okresie czasowego ograniczenia funkcjonowania jednostek systemu oświaty w związku z zapobieganiem, przeciwdziałaniem i zwalczaniem COVID-19 (Dz.U. poz. 493, z późn. zm.).

TABELA 7. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZACH DOSTOSOWANYCH

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	4
	słabowidzący	0
	niewidomi	0
	słabosłyszący	2
	niesłyszący	0
	z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym	0
	Ogółem	**6**

Poziom rozszerzony. Przebieg egzaminu

TABELA 8. INFORMACJE DOTYCZĄCE PRZEBIEGU EGZAMINU

Termin egzaminu			11 maja 2022
Czas trwania egzaminu dla arkusza standardowego			180 minut
Liczba szkół			93
Liczba zespołów egzaminatorów			2
Liczba egzaminatorów			49
Liczba obserwatorów[6] (§ 8 ust. 1)			0
Liczba unieważnień[7]	w przypadku:		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	0
	art. 44zzv pkt 3	zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu	0
	art. 44zzw ust. 1	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego	0
	art. 44zzy ust. 10	niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)	0
Liczba wglądów[6] (art. 44zzz)			13

[6] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 21 grudnia 2016 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu przeprowadzania egzaminu gimnazjalnego i egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2016 r. poz. 2223, ze zm.).
[7] Ustawa z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz.U. z 2021 r. poz. 1915, z późn. zm.).

Poziom rozszerzony. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających

WYKRES 3. ROZKŁAD WYNIKÓW ZDAJĄCYCH

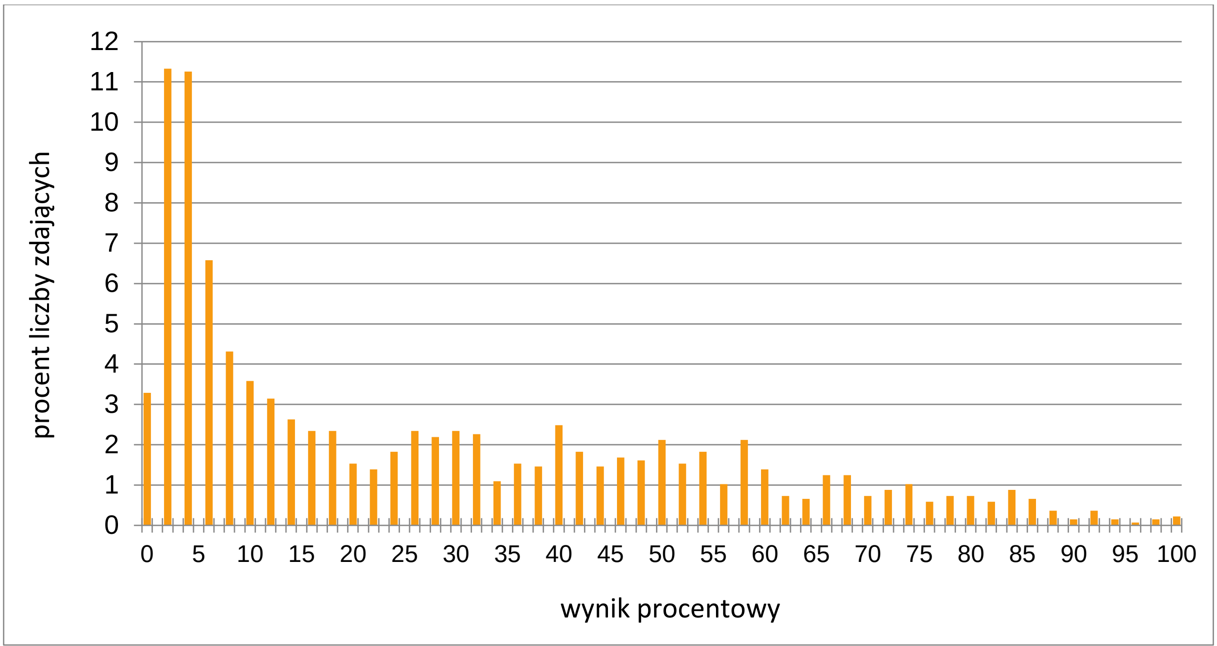


TABELA 9. WYNIKI ZDAJĄCYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
ogółem	**1368**	**0**	**100**	**18**	**2**	**27**	**25**
w tym:							
z liceów ogólnokształcących	830	0	100	34	2	37	25
z techników	538	0	94	6	4	13	16

* Dane dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów. Parametry statystyczne są podane dla grup liczących 30 lub więcej zdających.

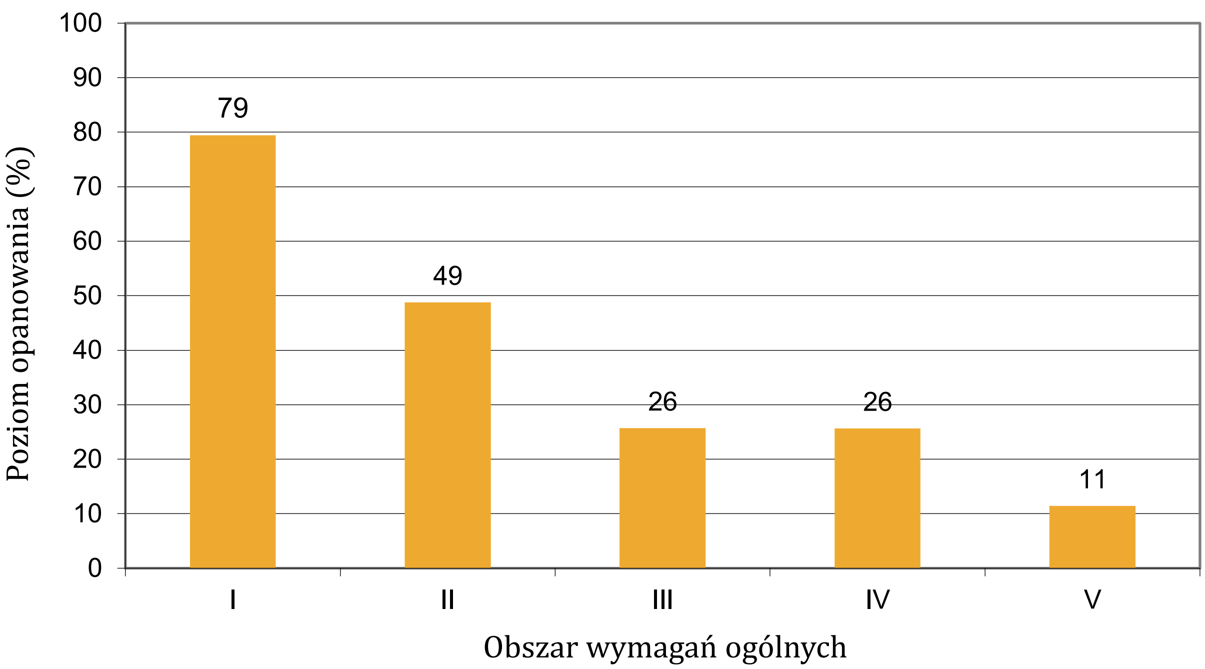
Poziom wykonania zadań

TABELA 10. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ

Wymagania egzaminacyjne 2022			
Nr zad.	**Wymagania ogólne**	**Wymagania szczegółowe**	**Poziom wykonania zadania (%)**
1.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R1.2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.	**69**
2.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R11.2) oblicza pochodne funkcji wymiernych.	**57**
3.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R6.5) stosuje wzory na sinus […] różnicy kątów […].	**23**
4.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: R10.3) korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.	**79**
5.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R5.1) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1/n$, $1/n^2$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.	**48**
6.	V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: R2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$.	**18**
7.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R3.8) rozwiązuje równania […] z wartością bezwzględną […].	**41**
8.	V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: R7.4) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.	**5**
9.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R3.4) stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$; R3.6) rozwiązuje łatwe nierówności wielomianowe.	**41**
10.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: P5.3) stosuje wzór na n–ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. R5.2) rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.	**26**
11.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R6.5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów; R6.6) rozwiązuje równania trygonometryczne […].	**23**

12.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: R3.1) stosuje wzory Viète'a; R3.2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.	**31**
13.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: P9.3) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów […] graniastosłupów. R7.4) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i cosinusów.	**15**
14.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: P8.3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; P8.6) oblicza odległość dwóch punktów. R8.1) oblicza odległość punktu od prostej; R8.4) oblicza współrzędne oraz długość wektora […].	**19**
15.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: R11.6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.	**22**

WYKRES 4. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ W OBSZARZE WYMAGAŃ OGÓLNYCH



Komentarz – na podstawie wyników zdających w kraju

Analiza jakościowa zadań – poziom podstawowy

Analiza wskaźników poziomu wykonania zadań z matury na poziomie podstawowym zamieszczonych w **Tabeli 5.** na stronach 7–9 pozwala sformułować wniosek, że maturzyści najlepiej opanowali umiejętności:

1. obliczania pól i obwodów trójkątów […]
2. wyznaczania średniej arytmetycznej i mediany zestawu danych
3. wyznaczania wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym
4. badania […] prostopadłości prostych na podstawie ich równań kierunkowych
5. stosowania wzoru na *n*-ty wyraz […] ciągu arytmetycznego.

Najłatwiejszym zadaniem w arkuszu na poziomie podstawowym (poziom wykonania – 85%) okazało się zadanie 19., w którym należało obliczyć pole trójkąta równobocznego o danej wysokości.

Taki sam poziom wykonania jak zadania 19. maturzyści osiągnęli w zadaniu 28. (85%). Należało w nim obliczyć liczbę niewiadomą x w zestawie sześciu liczb: $2x, 4, 6, 8, 11, 13$ przy danej jego średniej arytmetycznej. Zdający w większości nie mieli problemu z ustaleniem poprawnego równania i obliczeniem tej liczby.

Zauważyć trzeba, że obie wyżej wymienione umiejętności są wpisane jako wymagania szczegółowe podstawy programowej z matematyki dla gimnazjum.

Niewiele niższy poziom wykonania (82%) odnotowano w zadaniu 13., w którym maturzyści, mając dany wzór ogólny ciągu, mieli obliczyć wyraz siódmy tego ciągu. Większość zdających poprawnie obliczyła ten wyraz. Tylko nieliczni popełnili błąd przy skracaniu ułamka algebraicznego, ponieważ dzielili przez n tylko odjemną, albo tylko odjemnik z licznika ułamka.

W zadaniu 22. maturzyści musieli wykazać się umiejętnością badania prostopadłości prostych na podstawie ich równań kierunkowych. Zdający nie mieli problemu ze stosowaniem warunku prostopadłości prostych i większość zdających (78%) poprawnie wskazała parę prostych prostopadłych.

Z kolei zadanie 14. badało umiejętność stosowania wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego. Liczna grupa zdających (77%) obliczyła poprawnie różnicę ciągu arytmetycznego. Część zdających popełniała błędy rachunkowe przy obliczaniu różnicy wyrazów a_{10} i a_5 lub niepoprawnie zastosowała wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego i w konsekwencji otrzymała błędną wartość różnicy ciągu arytmetycznego a_n.

Nietrudno zauważyć, że tegoroczni abiturienci na poziomie podstawowym, analogicznie do lat ubiegłych, najlepiej opanowali umiejętności stosowania pojęć oraz korzystania z ich elementarnych własności w sytuacjach typowych. Zauważmy, że wymienione wyżej zadania, które zostały bezbłędnie rozwiązane przez około 80% i więcej zdających, są zadaniami jedno- lub dwuczynnościowymi. Zadania te nie mają szerszego kontekstu, ich rozwiązanie nie wymaga wykonania dodatkowych czynności, a – co może najważniejsze – umiejętności sprawdzane tymi zadaniami zostały precyzyjnie opisane i dotyczyły typowych sytuacji. Do rozwiązania zadań wystarczyło znać podstawowe pojęcia matematyczne i najważniejsze własności rozważanych obiektów, zrozumieć nieskomplikowany tekst matematyczny, zastosować właściwy algorytm i wykonać elementarne rachunki.

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najsłabiej

Na poziomie podstawowym można zauważyć, że nadal największe trudności sprawiają maturzystom zadania dotyczące złożonych umiejętności wykazywania zależności oraz analizy prostej sytuacji, dobierania do niej modelu matematycznego i krytycznej oceny trafności dobranego modelu. Trudne dla maturzystów okazały się: zadanie 31. (uzasadnienie prawdziwości nierówności) oraz zadanie 35. (wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o funkcji lub o jej wykresie). Były to zadania z obszarów *Rozumowanie i argumentacja* oraz *Modelowanie matematyczne*.

W zadaniu 31. zdający osiągnęli poziom wykonania 23%, zaś w zadaniu 35. – 28%. Prawdopodobną przyczyną takich wyników jest zarówno niski poziom opanowania umiejętności przeprowadzania i zapisania prostego rozumowania składającego się z kilku kroków, a w przypadku modelowania brak podstawowej wiedzy o własnościach funkcji kwadratowej i jej wykresie.

Przeanalizujmy zatem poprawne sposoby rozwiązań oraz najczęstsze błędy, jakie wystąpiły w dwóch zadaniach o najniższych wskaźnikach łatwości.

Najtrudniejsze było **zadanie 31.**, w którym należało uzasadnić prawdziwość nierówności $\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ dla każdych dwóch różnych liczb rzeczywistych a i b.

Rozumowanie matematyczne to umiejętność podawania matematycznych argumentów uzasadniających poprawność przeprowadzonej analizy. O prowadzeniu rozumowania świadczy fakt, że zdający wyjaśnia, dostrzega związki, zależności i prawidłowości, dostrzega podobieństwa między obiektami, zdarzeniami, pojęciami, wykorzystuje prawidłowości, uogólnia, uzasadnia, dobiera trafne argumenty, stosuje trafne obiekty matematyczne, reprezentacje i narzędzia matematyczne.

Aby wykazać, że $\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, należało równoważnie przekształcić nierówność do postaci umożliwiającej bezpośrednie sformułowanie wniosku i jego uzasadnienie. W rozwiązaniu zadania sposobem 1. należało najpierw zastosować wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy liczb oraz kwadrat ułamka

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

Następnie kolejno należało przekształcić równoważnie nierówność do postaci

$$2a^2+2b^2 > a^2+2ab+b^2$$

$$a^2-2ab+b^2 > 0$$

$$(a-b)^2 > 0$$

Na końcu, na mocy założenia $a \neq b$, wywnioskować, że $a-b \neq 0$, więc $(a-b)^2$ jest liczbą dodatnią jako kwadrat liczby rzeczywistej $a-b$ różnej od zera. Ponadto, ponieważ nierówność $(a-b)^2 > 0$ jest prawdziwa, więc nierówność $\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ również jest prawdziwa.

Najczęściej stosowanym przez zdających sposobem było równoważne przekształcanie tezy twierdzenia, mimo że wielu maturzystów tego w swoich rozwiązaniach nie zapisywało.

Pełne rozwiązanie, w którym zdający jest świadomy równoważności przekształceń, prezentujemy w Przykładzie 1.

Przykład 1.

zał: $a \in R$, $b \in R$
$b \neq a$

teza: $\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

dowód: przekształcam tezę równoważnie

$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{a^2+b^2+2ab}{4} \quad / \cdot 4$

$2a^2+2b^2 > a^2+b^2+2ab$

$a^2+b^2-2ab > 0$

$(a-b)^2 > 0$

zauważam, że $\bigwedge_{a,b \in R} (a-b)^2 \geq 0$ oraz z założenia $a \neq b$

zatem $a-b \neq 0$

zatem $(a-b)^2 \neq 0$

więc nierówność $(a-b)^2 > 0$ zawsze jest prawdziwa (dla $a \neq b$)

zatem teza jako nierówność równoważna również jest prawdziwa

c.b.d.

Poniżej poprawne rozwiązanie zdającego, który trafnie formułuje swoje uzasadnienie bez zapisu o równoważności przekształceń (Przykład 2.).

Przykład 2.

założenie: $b \neq a$

Teza: $\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

Dowód: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{a^2+b^2+2ab}{4}$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2+b^2+2ab}{4} > 0$$

$$\frac{2a^2+2b^2}{4} - \frac{a^2+b^2+2ab}{4} > 0 \quad / \cdot 4$$

$$2a^2 - a^2 + 2b^2 - b^2 - 2ab > 0$$

$$a^2 + b^2 - 2ab > 0$$

$$(a-b)^2 > 0$$

zawsze zachodzi nierówność: $(a-b)^2 \geq 0$

zatem jeżeli $a \neq b$, to $a-b \neq 0$ i $(a-b)^2 \neq 0$, więc $(a-b)^2 > 0$ c.k.d.

Zdający wykazał się umiejętnością przeprowadzania i zapisania prostego rozumowania składającego się z kilku kroków oraz podał poprawną argumentację, wykorzystując założenie.

W rozwiązaniu sposobem 1. można również było równoważnie przekształcić nierówność $\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ do postaci $a^2 + b^2 > 2ab$ i sformułować wniosek z powołaniem się na założenie $a \neq b$ (Przykład 3.).

Przykład 3.

Założenie: $a \in R$, $b \in R$, $b \neq a$

Teza: $\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

Badam nierówność $\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \quad / \cdot 4$$

$$2a^2+2b^2 > a^2+2ab+b^2$$

$$2a^2+2b^2-a^2-b^2 > 2ab$$

$a^2+b^2 > 2ab$ $\longrightarrow$ jest to ewidentna prawda, ponieważ suma kwadratów dwóch różnych liczb rzeczywistych zawsze będzie większa od ich iloczynu pomnożonego przez 2

#

Drugi sposób wykazania prawdziwości tezy polegał na przeprowadzeniu rozumowania od założenia do tezy. Z założenia $a \neq b$ należało wywnioskować, że różnica $a - b \neq 0$, więc $(a-b)^2$ jest liczbą dodatnią. Następnie należało zastosować wzór skróconego mnożenia i równoważnie przekształcić nierówność $(a-b)^2 > 0$ do postaci

$$a^2 + b^2 > 2ab$$

Dalej należało zauważyć, że tożsamość $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ można zapisać w równoważnej postaci

$$(a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab$$

i nierówność $a^2 + b^2 > 2ab$ zapisać kolejno w postaci

$$a^2 + b^2 > (a+b)^2 - (a^2 + b^2)$$

$$2(a^2 + b^2) > (a+b)^2$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} > \frac{(a+b)^2}{4}$$

oraz stwierdzić, że otrzymana nierówność jest równoważna nierówności

$$\frac{a^2 + b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

zapisanej w tezie twierdzenia.
Pełne rozwiązanie takim sposobem prezentujemy w Przykładzie 4.

Przykład 4.

$a \neq b$

$a - b \neq 0$

więc $(a-b)^2 \neq 0$

$(a-b)^2 > 0$

$(a^2 - 2ab + b^2) > 0 \quad /+2ab$

$a^2 + b^2 > 2ab$

$2ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2$

$a^2 + b^2 > (a+b)^2 - a^2 - b^2 \quad /+a^2+b^2$

$2a^2 + 2b^2 > (a+b)^2 \quad /:2$

$a^2 + b^2 > \frac{(a+b)^2}{2} \quad /:2$

$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{(a+b)^2}{4}$

$\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{(a+b)}{2}\right)^2$

c.k.d

Trzeci sposób rozwiązania polegał na zastosowaniu nierówności między średnimi.

Najpierw należało zauważyć, że ponieważ obie strony nierówności $\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ są nieujemne, więc przekształcając ją równoważnie, otrzymujemy nierówność

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \left|\frac{a+b}{2}\right|$$

czyli

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{|a+b|}{2}$$

Następnie należało wykazać prawdziwość otrzymanej nierówności dla każdych różnych liczb rzeczywistych a i b. Trzeba było zauważyć, że dla liczb rzeczywistych a i b liczby $|a|$ i $|b|$ są nieujemne, więc prawdziwa jest nierówność między średnią kwadratową i średnią arytmetyczną

$$\sqrt{\frac{|a|^2+|b|^2}{2}} \geq \frac{|a|+|b|}{2}$$

przy czym równość zachodzi tylko wtedy, gdy $|a| = |b|$.

Dalej należało skorzystać z własności wartości bezwzględnej i przeprowadzić następujące wnioskowanie:
ponieważ $x^2 = |x|^2$, $|x| + |y| \geq |x+y|$, $|x| \geq x$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x oraz y, więc

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{|a|^2+|b|^2}{2}} \geq \frac{|a|+|b|}{2} \geq \frac{|a+b|}{2} \geq \frac{a+b}{2}$$

Na koniec pozostało wykazać, że jeżeli $a \neq b$, to prawdziwa jest nierówność ostra

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{|a+b|}{2}$$

Gdy $|a| \neq |b|$, to prawdziwość nierówności ostrej wynika z nierówności między średnią kwadratową i średnią arytmetyczną. Równość $|a| = |b|$ oznacza, że liczby a i b są równe lub przeciwne. Jednak z założenia liczby a i b są różne. Jeżeli są przeciwne, czyli $a + b = 0$, to wtedy prawa strona tej nierówności jest równa zero, natomiast lewa strona jest dodatnia – zerem byłaby tylko wtedy, gdyby $a = b = 0$, co jest sprzeczne z założeniem $a \neq b$.

Niewielka liczba zdających podjęła próbę przeprowadzenia rozumowania nie wprost.

Podkreślić należy, że w zadaniach, w których istotą jest uzasadnienie tezy, maksymalną liczbę punktów można otrzymać tylko za rozwiązanie zawierające pełne uzasadnienie. Oznacza to w szczególności, że w zadaniu 31. dwa punkty za rozwiązanie były przyznawane jedynie tym zdającym, którzy przedstawili w pełni poprawne rozumowanie wykazywanej prawidłowości. Część zdających poprawnie rozpoczynała rozwiązywanie zadania, jednak albo nie potrafiła przedstawić pełnego rozumowania, pomijając istotne jego elementy, albo formułowała błędny wniosek, albo przekształciła nierówność równoważnie do postaci, z której można było wyprowadzić uzasadnienie z powołaniem się na założenie i nie formułowała wniosku, albo też nie kończyła rozumowania.

Część zdających, którzy potrafili przeprowadzić bezbłędne przekształcenia nierówności do postaci, z której można w łatwy sposób wnioskować o prawdziwości tezy, opatrzyła rozwiązanie niewłaściwym komentarzem. Istotna część takich niepoprawnych komentarzy wynikała w faktu, iż zdający nie uwzględniali założenia *dla każdych dwóch różnych liczb rzeczywistych a i b*. Prawdopodobnie zdający nieuważnie czytali treść zadania lub w ogóle nie zauważali tego założenia, bądź uznali je za nieistotne. Poniżej takie właśnie rozwiązania (Przykład 5. i Przykład 6.).

Przykład 5.

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \quad / \cdot 4$$

$$2(a^2+b^2) > a^2+2ab+b^2$$

$$2((a+b)^2-2ab) > a^2+2ab+b^2$$

$$2(a^2+\cancel{2ab}+b^2-\cancel{2ab}) > a^2+2ab+b^2$$

$$2a^2+2b^2 > a^2+2ab+b^2$$

$$a^2+b^2 > 2ab$$

~~c.k.d.~~

Suma kwadratów liczb jest zawsze większa od podwojonego iloczynu liczb.

c.k.d.

Przykład 6.

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad ; \quad b \neq a$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{(a+b)^2}{2^2}$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

$$\frac{2a^2+2b^2}{4} > \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \quad |\cdot 4$$

$$2a^2+2b^2 > a^2+2ab+b^2$$

$$2(a^2+b^2) > 2ab+(a^2+b^2) \quad \text{cnu.}$$

~~Należy po sprawdzić, czy 2ab jest mniejsze od a^2+b^2~~

Komentarz: 2ab jest mniejsze od a^2+b^2, zatem całe wyrażenie $2(a^2+b^2)$ jest większe od wyrażenia $2ab+(a^2+b^2)$.

Niektórzy zdający, mimo że w swoich rozwiązaniach zapisywali założenie $a \neq b$, przy formułowaniu wniosku o prawdziwości tezy nie przytaczali adekwatnych argumentów – nie uwzględnili założenia w formułowaniu uzasadnienia i zapisali niepoprawny wniosek o przyjmowaniu wartości nieujemnych przez kwadrat różnicy liczb rzeczywistych a i b (Przykład 7.). Takie rozwiązanie również nie pozwalało na przyznanie maksymalnej liczby punktów.

Przykład 7.

$b \neq a$

$a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \quad | \cdot 4$$

$$2a^2+2b^2 > a^2+2ab+b^2$$

$$a^2-2ab+b^2 > 0$$

$$(a-b)^2 > 0$$

~~kwadrat liczby dodatnie~~ każda liczba ~~gdy~~ rzeczywista podniesiona do kwadratu „da" liczbę nieujemną, zatem równanie jest prawdziwe

Wśród zdających, którzy podjęli rozwiązanie tego zadania, byli i tacy, którzy nie sprowadzali lewej strony nierówności do kwadratu różnicy liczb rzeczywistych a i b, ani do postaci $a^2 + b^2 > 2ab$, ale doprowadzali nierówność do innej postaci, na podstawie której można sformułować wniosek. Zdający, którego rozwiązanie prezentujemy w Przykładzie 8. w uzasadnieniu nie powołał się jednak na założenie, więc nie przeprowadził pełnego rozumowania.

Przykład 8.

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad ; \quad b \neq a$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{(a+b)^2}{2^2}$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

$$\frac{2a^2+2b^2}{4} > \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \quad | \cdot 4$$

$$2a^2+2b^2 > a^2+2ab+b^2$$

$$2(a^2+b^2) > 2ab+(a^2+b^2) \quad \text{cnu.}$$

~~Należy po sprawdzić, czy 2ab jest mniejsze od a^2+b^2~~

Komentarz: $2ab$ jest mniejsze od a^2+b^2, zatem całe wyrażenie $2(a^2+b^2)$ jest większe od wyrażenia $2ab+(a^2+b^2)$.

Część zdających przedstawiła niepełne rozwiązanie zadania, najczęściej przerywając rozumowanie na etapie przekształcenia nierówności, na podstawie której można już sformułować komentarz uzasadniający przyjmowanie wyłącznie dodatnich wartości przez wyrażenie $(a-b)^2$ przy założeniu $a \neq b$.

Niemała grupa zdających kończyła tok rozumowania na doprowadzeniu nierówności $\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ do postaci $(a-b)^2 > 0$ albo $a^2+b^2 > 2ab$ i nie formułowała wniosku (Przykład 9. i Przykład 10.). Za takie rozwiązania można było uzyskać tylko 1 punkt.

Przykład 9.

$a = R \qquad b = R$

$a \neq b$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \quad / \cdot 4$$

$$2a^2+2b^2 > a^2+2ab+b^2$$

$$a^2-2ab+b^2 > 0$$

$$(a-b)^2 > 0$$

C.N.D.

Przykład 10.

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \quad | \cdot 4$$

$$\cancel{4}\,\frac{a^2+b^2}{\cancel{2}} > a^2+2ab+b^2$$

$$2a^2+2b^2 > a^2+2ab+b^2$$

$$a^2+b^2 > 2ab$$

Niektórzy zdający nie potrafili przekształcić równoważnie danej nierówności do postaci, z której można w łatwy sposób wnioskować o prawdziwości tezy i zaczynali wnioskować z takiej postaci, z której nie da się tezy uzasadnić, czasami przyjmując założenia zgoła inne niż podane w treści zadania (Przykład 11.).

Przykład 11.

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad /$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{a^2+b\,2ab+b^2}{4} \quad /\cdot 2$$

$$a^2+b^2 \quad \frac{2a^2+4ab+2b^2}{4} \quad /\cdot 4$$

$$4(a^2+b)^2 > 2a^2+4ab+2b^2 \;/:4$$

$$(a+b)^2 > \frac{2}{4}a^2+2ab+\frac{2}{4}b^2$$

co kolwiek do kwad kwadratu jest większe od 0 przy założeniu $a>0$ i $b>0$.

Wśród rozwiązań, za które zdający nie otrzymywali żadnego punktu, były również takie, które zdający kończyli po poprawnym zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia (Przykład 12.). Świadczy to o braku koncepcji przeprowadzenia właściwego toku rozumowania.

Przykład 12.

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

Analizując rozwiązania błędne, zaprezentowane przez maturzystów, można było dostrzec takie, w których błąd powstawał już na etapie przekształcania nierówności.

Typowym dla tegorocznych maturzystów błędem było niepoprawne zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy i zapisywanie licznika wyrażenia po prawej stronie nierówności w postaci sumy kwadratów liczby a oraz liczby b (Przykład 13.) albo – oprócz błędnego zastosowania wzoru na kwadrat sumy – niepoprawne zastosowanie twierdzenia o potędze ułamka (Przykład 14.). W każdym z tych przypadków błąd popełniony przez zdających doprowadził do sytuacji, w której zrealizowali oni rozumowanie pomijające konieczność sprowadzenia lewej strony nierówności do sumy kwadratu różnicy liczb rzeczywistych a i b, co było istotą dowodu wyjściowego twierdzenia i wymagało przytoczenia odpowiedniego komentarza uzasadniającego prawdziwość nierówności. Powodowało to istotne uproszczenie problemu.

Przykład 13.

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{a^2+b^2}{4}$$

$$4a^2+4b^2 > 2a^2+2b^2$$

$$2a^2+2b^2$$

odp.: $b=2,\ b=-2$

Przykład 14.

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{a^2+b^2}{4} \quad /\cdot 2$$

$$a^2+b^2 > \frac{a^2+b^2}{2} \quad /\cdot 2$$

$$2a^2+2b^2 > a^2+b^2$$

$$a^2+b^2 > 0$$

Część zdających, którzy potrafili poprawnie zastosować wzór skróconego mnożenia, popełniała błędy w dalszych przekształceniach, które, podobnie jak w sytuacji błędnego zastosowania tego wzoru, prowadziły do istotnego uproszczenia problemu. Rozwiązania takie zilustrowane są w Przykładach 15. i 16.

Przykład 15.

zał.
$a, b \in R$
$b \neq a$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{(a+b)^2}{4} \quad / \cdot 2$$

$$\frac{a^2+b^2}{1} > \frac{(a+b)^2}{2}$$

$$2(a^2+b^2) > (a+b)^2$$

$$2a^2+2b^2 > a^2+2ab+b^2$$

$$2(a^2+b^2) > (a^2+b^2)+2ab$$

$$2 > 2ab$$

$$2ab < 2 \quad /:2$$

$$ab < 1$$

Przykład 16.

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{a^2+2ab+b^2}{2} \quad / \cdot 2$$

$$a^2+b^2 > a^2+2ab+b^2$$

$$a^2-a^2+2ab+b^2-b^2 > 0$$

$$2ab > 0 \quad /:2$$

$$ab > 0$$

Analiza rozwiązań, w których popełniono błędy przy przekształcaniu nierówności, prowadzi do wniosku, że ich autorzy rozumieją znaczenie założenia $a \neq b$, jednak błędne zastosowanie wzoru skróconego mnożenia (Przykład 17.) lub błędnie obliczona potęga ułamka (Przykład 18.) powodowały, że za takie rozwiązania zdający nie otrzymywali punktów.

Przykład 17.

$a \in R$ $\qquad$ $a - b \neq 0$

$b \in R \setminus a$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{a^2+b^2}{4} \qquad \cancel{a^2+b^2 < a}$$

$$\frac{r}{2} > \frac{r}{4} \iff r \neq 0$$

$$a-b \neq 0$$

$$a^2+b^2 \neq 0$$

Przykład 18.

$b \neq a$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad | \cdot 2$$

$$a^2+b^2 > (a+b)^2$$

$$a^2+b^2 > a^2+2ab+b^2$$

$$a^2+b^2-a^2-2ab-b^2 > 0$$

$$-2ab > 0$$

Odp. dla każdej liczby ~~wszystkie~~ dodatniej dla a i b nie będzie dodatni ~~[illegible]~~ wynik

$b \neq a$

c. n. u

Wśród rozwiązań zdających były również takie, w których także nie potrafili oni przekształcić równoważnie danej nierówności do postaci, z której można w łatwy sposób wnioskować o prawdziwości tezy. Nie uwzględniali danego założenia, ale podejmowali próbę uzasadnienia. Takie rozwiązania, choć błędne, świadczyć mogą o rozumieniu przez zdających istoty pełnego rozwiązania zadania typu „wykaż” i jego etapów. Takie rozwiązanie, w którym zdający jest świadomy, że końcowym elementem prowadzonego rozumowania jest sformułowanie wniosku o prawdziwości otrzymanej nierówności, ilustrujemy Przykładem 19.

Przykład 19.

$$\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > 0$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{(a+b)^2}{4}\right) > 0$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\right) > 0$$

$$\frac{2a^2+2b^2}{4} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} > 0$$

$$\frac{2a^2+2b^2-a^2-2ab-b^2}{4} > 0$$

$$\frac{2(a^2+b^2)-a^2-2ab-b^2}{4} > 0$$

$$\frac{2(a^2+b^2)-(a^2+2ab+b^2)}{4} > 0$$

$$\frac{2(a^2+b^2)-(a+b)^2}{4} > 0$$

każda liczba podniesiona do kwadratu jest większa od zera, więc

$2(a^2+b^2) > 0$ i $(a+b)^2 > 0$

a więc od liczby większej od 0 odejmujemy liczbę większą od 0 i dzielimy na liczbę większą od zera (4), więc wynik także musi być większy od 0.

Część zdających popełniała błąd już w początkowym etapie rozumowania, gdy należało ustalić zależności. Nierówność w wierszu drugim nie wynika z prawdziwej nierówności w wierszu pierwszym (Przykład 20.).

Przykład 20.

Gdy $b \neq a$, to $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2}$

Stąd $\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ $\blacksquare$

Zdarzały się również rozwiązania, w których zdający podejmowali próbę przekształcenia nierówności, jednak w końcowej fazie rozwiązania podstawiali konkretne liczby, które w ich mniemaniu miały świadczyć o prawdziwości tezy (Przykład 21.).

Przykład 21.

$b \neq a$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \frac{a^2+b^2}{2}$$

$a=2$
$b=4$

$$\frac{2^2+4^2}{2} > \frac{2^2+4^2}{\cancel{2}\,4} = \frac{4+16}{2} >$$

$$\frac{4+16}{\cancel{2}\,4} = 10 > \frac{10}{4}$$

$$10 > 2\frac{2}{4}$$

Odp: Jest spełniona w tym przypadku nierówności.

Wśród zdających, którzy podjęli rozwiązanie, była jeszcze grupa, która nie podjęła wysiłku przekształcenia nierówności i popełniła błąd polegający na sprawdzaniu poprawności nierówności jedynie dla konkretnych wartości liczb a i b (Przykład 22.). Takie próby rozwiązania są nadal zaskakujące, ponieważ co roku w zasadach oceniania rozwiązań zadań na stronie internetowej Centralnej Komisji Egzaminacyjnej zamieszczana jest uwaga o nieakceptowaniu rozwiązań, w których zdający sprawdza prawdziwość tezy jedynie dla wybranych wartości.

Przykład 22.

$$\frac{2^2+3^2}{2} > \left(\frac{2+3}{2}\right)^2$$

$$\frac{4+9}{2} > \frac{5}{2}$$

$$\frac{13}{2} > \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$6{,}5 > 6{,}25$$

odp: Dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b, takich że b ≠ a, spełniona jest dana nierówność ponieważ jakichkolwiek liczb nie ~~podstawię to~~ podstawimy to ta nierówność jest spełniona

Strona 18 z 25

EMAP-P0_100

Zadanie 35. było kolejnym, które sprawiło tegorocznym maturzystom najwięcej kłopotów. Poziom wykonania (28%) był o pięć punktów procentowych wyższy niż w przypadku omówionego powyżej zadania 31. Maturzyści zmierzyli się w nim z wyznaczeniem wzoru funkcji kwadratowej na podstawie informacji o jej wykresie, czyli dobraniem modelu matematycznego do opisanej sytuacji zadaniowej.

Modelowanie matematyczne to umiejętność opisywania w języku matematyki rzeczywistej sytuacji poprzez stworzenie/dobranie odpowiednich struktur i obiektów matematycznych wraz określeniem zależności/relacji między nimi. Stworzony model może mieć postać wzoru, równania, układu równań, funkcji, algorytmu, przestrzeni probabilistycznej itp., a ponadto powinien uwzględnić jedynie te aspekty rzeczywistej sytuacji, które wiążą się z postawionym problemem.

Aby poprawnie wyznaczyć wzór funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, należało zinterpretować informację, że wykres funkcji f ma z prostą o równaniu $y = 6$, która jest równoległa do osi Ox układu współrzędnych, dokładnie jeden punkt wspólny – czyli ta prosta jest styczna do wykresu funkcji f w wierzchołku paraboli będącej wykresem funkcji f oraz właściwie zinterpretować informację, że punkty $A = (-5, 0)$ i $B = (3, 0)$ należą do wykresu funkcji f, czyli, że liczby (-5) oraz 3 są miejscami zerowymi funkcji f. Zadanie to można było rozwiązać na wiele sposobów.

Znaczna część zdających, którzy poprawnie rozwiązali to zadanie sposobem 1., najpierw korzystała z własności funkcji kwadratowej i wnioskowała, że ponieważ parabola, która jest wykresem funkcji f, przecina oś Ox układu współrzędnych w punktach $A = (-5, 0)$ i $B = (3, 0)$, to pierwiastkami trójmianu są liczby $x_1 = -5$ oraz $x_2 = 3$. Zapisywała wzór funkcji f w postaci iloczynowej $f(x) = a(x + 5)(x - 3)$. Następnie, znając pierwiastki trójmianu, obliczała odciętą p wierzchołka tej paraboli

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-5 + 3}{2} = -1$$

Zdający ci poprawnie wnioskowali, że ponieważ parabola ma z prostą o równaniu $y = 6$ dokładnie jeden punkt wspólny, więc rzędna q wierzchołka tej paraboli jest równa 6. Zatem punkt $(-1, 6)$ należy do wykresu funkcji f. Maturzyści zapisywali równanie, które prowadziło do obliczenia współczynnika a we wzorze funkcji kwadratowej

$$6 = a(-1 + 5)(-1 - 3)$$

$$6 = -16a$$

$$a = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}$$

a następnie podstawiali otrzymaną wartość a do postaci iloczynowej i w końcu zapisywali funkcję kwadratową w postaci ogólnej

$$f(x) = -\frac{3}{8}(x + 5)(x - 3) = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$$

Z tej postaci odczytywali wartości współczynników b i c trójmianu: $b = -\frac{3}{4}$, $c = \frac{45}{8}$.
Takie pełne rozwiązanie prezentujemy w Przykładzie 23.

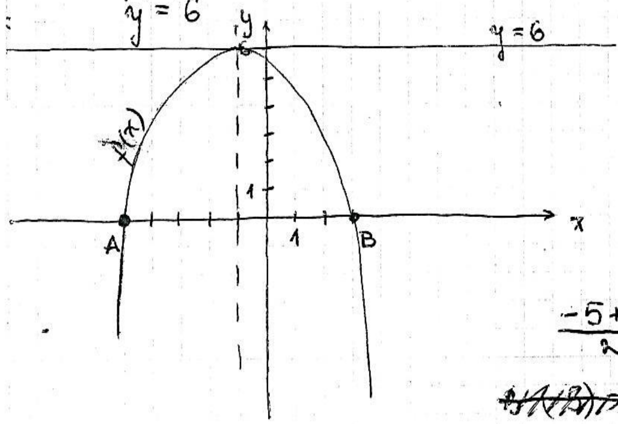
Przykład 23.

$f(x) = ax^2+bx+c$

$y = 6$

miejsce zerowe

szkic:



$\frac{-5+3}{2} = -1$

$\Rightarrow x = -1$

oś symetrii paraboli (największa/najmniejsza wartość)

$6 = a(-1+5)(-1-3)$

$6 = a \cdot 4 \cdot (-4)$

$6 = a \cdot (-16)$

$-\frac{6}{16} = a$

$-\frac{3}{8} = a$

$a < 0$

$f(x) = a(x+5)(x-3)$

$\cancel{f(x) = (ax+5a)(x-3)}$

$\cancel{f(x) = ax^2+5ax-3ax+15a}$

$f(-1) = 6$

$f(x) = -\frac{3}{8}(x+5)(x-3)$

$f(x) = -\frac{3}{8}(x^2+5x-3x-15)$

$f(x) = -\frac{3}{8}(x^2+2x-15)$

$f(x) = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + 5\frac{5}{8}$

$a = -\frac{3}{8}$ $b = \frac{3}{4}$ $c = 5\frac{5}{8}$

Przedstawione rozwiązanie zawiera błąd zdającego, który przy przepisywaniu współczynników, „zgubił” minus przy współczynniku b.

Liczna grupa zdających rozwiązała to zadanie sposobem 2. – najpierw poprawnie zinterpretowała informację, że parabola, która jest wykresem funkcji f, przecina oś Ox układu współrzędnych w punktach $A = (-5, 0)$ i $B = (3, 0)$, więc pierwiastkami trójmianu są liczby $x_1 = -5$ oraz $x_2 = 3$. Znając pierwiastki trójmianu, zdający obliczali odciętą p wierzchołka tej paraboli

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-5+3}{2} = -1$$

Następnie prawidłowo wnioskowali, że skoro parabola ma z prostą o równaniu $y = 6$ dokładnie jeden punkt wspólny, to rzędna q wierzchołka tej paraboli jest równa 6. Zapisali wzór funkcji f w postaci kanonicznej $f(x) = a(x+1)^2 + 6$.
Maturzyści ci skorzystali z informacji, że miejscem zerowym funkcji f jest liczba 3 (lub liczba 5), czyli $f(3) = 0$ (lub $f(5) = 0$) i zapisywali równanie, które prowadziło do obliczenia współczynnika a we wzorze funkcji kwadratowej

$$0 = a(3+1)^2 + 6$$

$$0 = 16a + 6$$

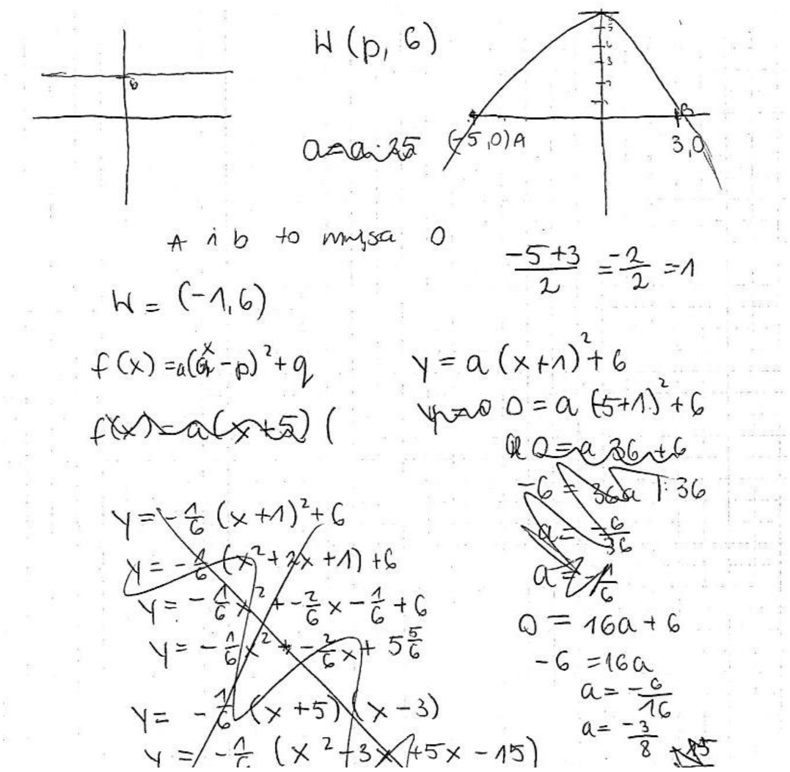
$$a = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}$$

Następnie podstawiali otrzymaną wartość a do postaci kanonicznej i w końcu zapisywali funkcję kwadratową w postaci ogólnej

$$f(x) = -\frac{3}{8}(x+1)^2 + 6 = -\frac{3}{8}(x^2 + 2x + 1) + 6 = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{45}{8},$$

z której odczytywali wartości współczynników trójmianu: $b = -\frac{3}{4}$, $c = \frac{45}{8}$ (Przykład 24.).

Przykład 24.



$y = -\frac{3}{8}(x+1)^2 + 6$

$y = -\frac{3}{8}(x^2 + 2x + 1) + 6$

$y = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{6}{8}x + -\frac{3}{8} + 6$

$y = -\frac{3}{8}x^2 - \cancel{\frac{6}{8}x}\, \frac{3}{4}x + 5\frac{5}{8}$

współczynniki

$a = -\frac{3}{8}$

$b = -\frac{3}{4}$

$c = 5\frac{5}{8}$

$$\boxed{\begin{aligned} &0 = -\frac{3}{8}\cdot 9 - \frac{3}{4}\cdot 3 + 5\frac{5}{8} \quad \text{sprawdzenie} \\ &0 = -\frac{27}{8} - \frac{9}{4} + 5\frac{5}{8} \\ &0 = -\frac{27}{8} - \frac{18}{8} + 5\frac{5}{8} \end{aligned}}$$

a

$0 = 0$

W powyższym przykładzie zdający dodatkowo zweryfikował poprawność otrzymanego modelu.

Duża grupa zdających, która poprawnie zinterpretowała obie informacje, rozwiązała zadanie sposobem 3. polegającym na zapisaniu i rozwiązaniu układu trzech równań z trzema niewiadomymi. Zdający zauważyli, że skoro punkty $A = (-5, 0)$ i $B = (3, 0)$ należą do wykresu funkcji f, to prawdziwe są zależności

$$a \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) + c = 0 \quad \text{i} \quad a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 0.$$

Ponadto zdający poprawnie obliczyli pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-5 + 3}{2} = -1$$

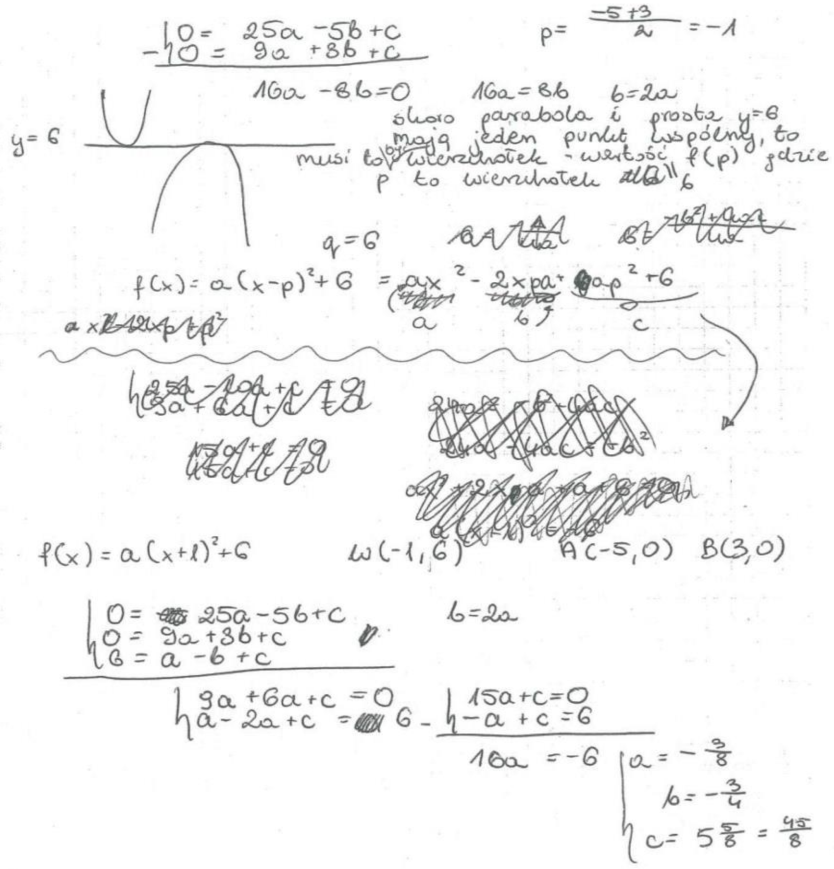
Następnie właściwie zinterpretowali informację, że parabola ma z prostą o równaniu $y = 6$ dokładnie jeden punkt wspólny, bowiem prawidłowo wnioskowali stąd, że rzędna q wierzchołka tej paraboli jest równa 6, zatem wierzchołek paraboli ma współrzędne $(-1, 6)$. Zapisywali trzecie równanie z trzema niewiadomymi

$$6 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$$

Ten układ równań rozwiązywali metodą podstawienia i otrzymywali rozwiązanie $\begin{cases} a = -\frac{3}{8} \\ b = -\frac{3}{4} \\ c = \frac{45}{8} \end{cases}$

Takie pełne rozwiązanie ilustrujemy Przykładem 25.

Przykład 25.



$\begin{cases} 0 = 25a - 5b + c \\ 0 = 9a + 3b + c \end{cases}$ $\quad p = \frac{-5+3}{2} = -1$

$16a - 8b = 0 \quad 16a = 8b \quad b = 2a$

skoro parabola i prosta $y=6$ mają jeden punkt wspólny, to musi to być wierzchołek - wartość $f(p)$ gdzie p to wierzchołek 6

$y = 6$

$q = 6$

$f(x) = a(x-p)^2 + 6 = \underbrace{ax^2}_{a} - \underbrace{2xpa}_{b} + \underbrace{ap^2 + 6}_{c}$

$f(x) = a(x+1)^2 + 6 \quad W(-1, 6) \quad A(-5, 0) \quad B(3, 0)$

$\begin{cases} 0 = 25a - 5b + c \\ 0 = 9a + 3b + c \\ 6 = a - b + c \end{cases}$ $\quad b = 2a$

$\begin{cases} 9a + 6a + c = 0 \\ a - 2a + c = 6 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 15a + c = 0 \\ -a + c = 6 \end{cases}$

$16a = -6 \quad \begin{cases} a = -\frac{3}{8} \\ b = -\frac{3}{4} \\ c = 5\frac{5}{8} = \frac{45}{8} \end{cases}$

Niektórzy zdający rozpoczynali rozwiązywanie zadania analogicznie do sposobu, jaki przedstawiliśmy w Przykładzie 25., ale zapisywali dwa równania

$$a \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) + c = 0 \quad \text{i} \quad a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 0$$

Następnie odejmowali je stronami

$$(25a - 5b + c) - (9a + 3b + c) = 0$$

$$16a - 8b = 0$$

i otrzymywali zależność

$$b = 2a$$

Zdający wnioskowali, że ponieważ parabola ma z prostą o równaniu $y = 6$ dokładnie jeden punkt wspólny, to rzędna q wierzchołka paraboli jest równa 6. Korzystali ze wzoru na rzędną wierzchołka paraboli i zapisywali zależność

$$6 = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

którą, po podstawieniu w miejsce b wyrażenia $2a$, przekształcali kolejno do postaci

$$6 = \frac{-((2a)^2 - 4ac)}{4a}$$

$$6 = \frac{4a(-a + c)}{4a}$$

$$6 = -a + c$$

i uzależnili współczynnik c od współczynnika a

$$c = 6 + a$$

Z uzyskanych wcześniej równań $a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 0$, $b = 2a$ i $c = 6 + a$, po odpowiednich podstawieniach, obliczyli współczynnik a:

$$a \cdot 3^2 + 2a \cdot 3 + 6 + a = 0$$

$$16a = -6$$

$$a = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}$$

A stąd obliczyli $b = 2a = 2 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{3}{4}$ oraz $c = 6 + a = 6 - \frac{3}{8} = \frac{45}{8}$ (Przykład 26.).

Przykład 26.

Ponieważ funkcja f ma tylko jeden punkt wspólny z prostą $y=6$ oznacza to, że wierzchołek paraboli ma drugą współrzędną $=6$

Z drugiej informacji wyciągamy wnioski, że $f(x) = a(x+5)(x-3)$

co oznacza, że $f(x) = ax^2 + 2ax - 15a$

wiemy, że $q = 6 = -\frac{\Delta}{4a}$ policzmy zatem deltę

$\Delta = b^2 - 4ac = 4a^2 - 4 \cdot (-15a) \cdot a = 64a^2$

Zatem $q = 6 = -\frac{64a^{\cancel{2}}}{\cancel{4a}}$ $\quad 6 = -16a \quad a = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}$ $\quad b = \frac{12}{16} = -\frac{3}{4}$ $\quad \cancel{c = \frac{90}{16} = 5\frac{6}{8}}$

$a = -\frac{3}{8}$, $b = -\frac{3}{4}$, $c = 5\frac{5}{8}$, Wśród zdających byli i tacy, którzy rozwiązali zadanie sposobem 4., w którym korzystali z twierdzenia o równości wielomianów oraz zarówno z postaci iloczynowej, jak i kanonicznej funkcji kwadratowej. Poprawnie zinterpretowali informację i wnioskowali, że ponieważ parabola, która jest wykresem funkcji f, przecina oś Ox układu współrzędnych w punktach $A=(-5,0)$ i $B=(3,0)$, więc pierwiastkami trójmianu są liczby $x_1=-5$ oraz $x_2=3$. Zapisywali wzór funkcji f w postaci iloczynowej

$$f(x)=a(x+5)(x-3)$$

i po rozwinięciu tego wzoru otrzymywali

$$f(x)=ax^2+2ax-15a$$

Analogicznie poprawnie wnioskowali, że skoro parabola ma z prostą o równaniu $y=6$ dokładnie jeden punkt wspólny, to rzędna q wierzchołka tej paraboli jest równa 6. Następnie zapisywali wzór funkcji f w postaci kanonicznej

$$f(x)=a(x-p)^2+6$$

i po rozwinięciu tego wzoru otrzymywali

$$f(x)=ax^2-2apx+ap^2+6$$

Dalej, korzystając z twierdzenia o równości wielomianów, otrzymywali układ równań

$$2a=-2ap \quad \text{oraz} \quad -15a=ap^2+6$$

Z pierwszego równania obliczyli $p=-1$, wstawili otrzymane p do drugiego równania i otrzymali

$$-15a=a+6$$

$$a=-\frac{6}{16}=-\frac{3}{8}$$

Na koniec podstawili otrzymane $a=-\frac{3}{8}$ do postaci ogólnej, np.

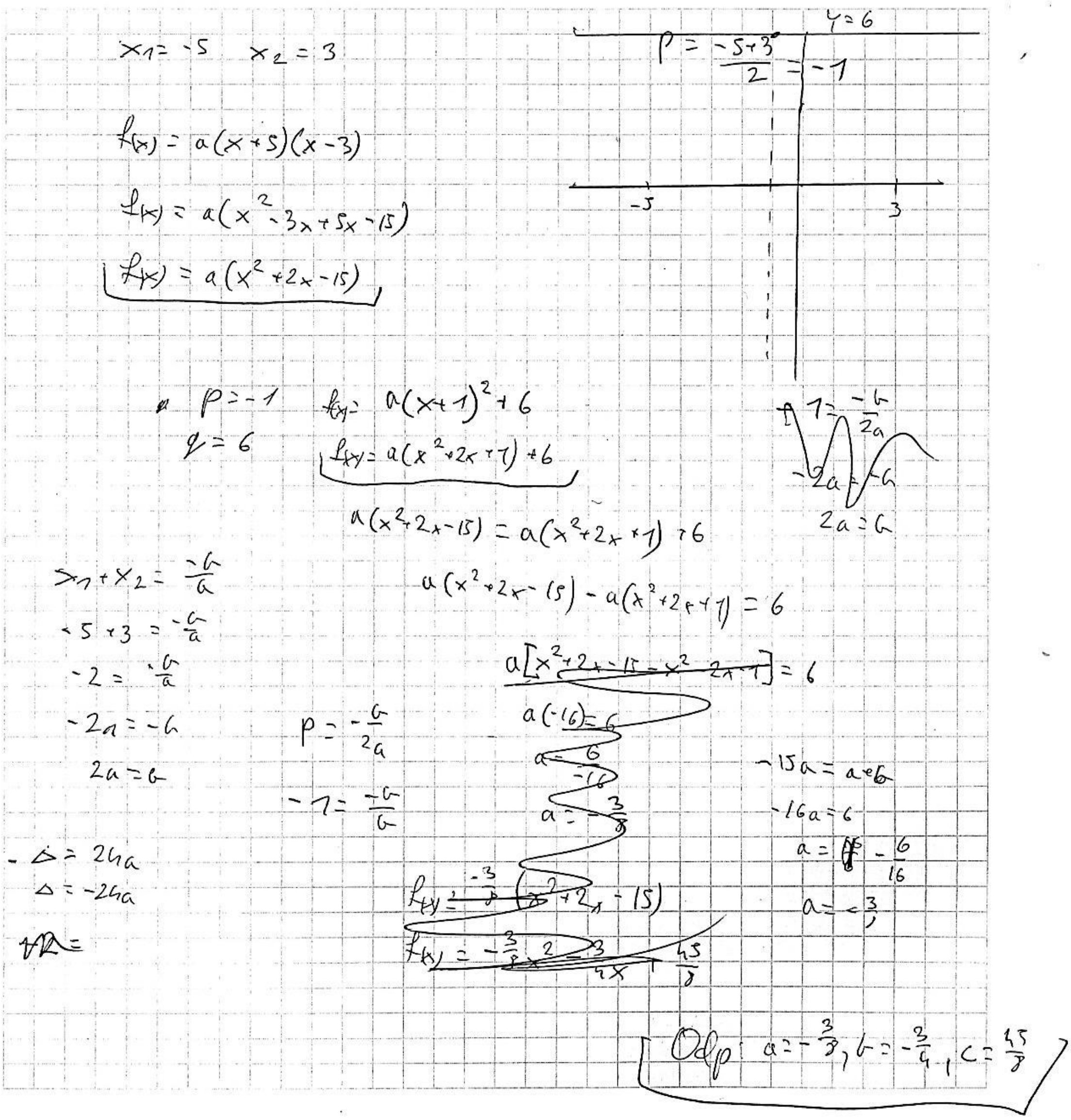
$$f(x)=-\frac{3}{8}x^2+2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)x-15\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)$$

$$f(x)=-\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{45}{8}$$

i stąd odczytywali wartości współczynników trójmianu: $a=-\frac{3}{8}$, $b=-\frac{3}{4}$, $c=\frac{45}{8}$.

Taki sposób rozwiązania zadania ilustruje Przykład 27.

Przykład 27.



Niektórzy zdający z informacji, że parabola, która jest wykresem funkcji f, przecina oś Ox układu współrzędnych w punktach $A = (-5, 0)$ i $B = (3, 0)$, wnioskowali, że pierwiastkami trójmianu są liczby $x_1 = -5$ oraz $x_2 = 3$, zapisując wzór funkcji f w postaci iloczynowej $f(x) = a(x + 5)(x - 3)$.

Następnie właściwie zinterpretowali informację, że skoro parabola ma z prostą o równaniu $y = 6$ dokładnie jeden punkt wspólny, to równanie $a(x + 5)(x - 3) = 6$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Zapisali zależność

$$ax^2 + 2ax - 15a - 6 = 0$$

i poprawny warunek na to, aby to równanie kwadratowe miało dokładnie jedno rozwiązanie, czyli $(2a)^2 - 4a(-15a - 6) = 0$. Dalej rozwiązywali otrzymane równanie z niewiadomą a:

$$64a^2 + 24a = 0$$

$$a = 0 \quad \text{lub} \quad a = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}$$

Odrzucali wartość $a = 0$, ponieważ nie spełniała warunków zadania, i zapisywali wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej

$$f(x) = -\frac{3}{8}(x+5)(x-3) = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$$

Stąd odczytywali wartości współczynników trójmianu: $a = -\frac{3}{8}$, $b = -\frac{3}{4}$, $c = \frac{45}{8}$.
Takie rozwiązanie sposobem 5. prezentujemy w Przykładzie 28.

Przykład 28.

$f(-5)=0$
$f(3)=0$
$f(-5)= a\cdot(-5)^2 + b\cdot(-5) + c = 0$
$25a - 5b + c = 0$
$f(3) = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = 0$
$9a + 3b + c = 0 \Rightarrow c = -9a - 3b$

$25a - 5b + (-9a - 3b) = 0$
$25a - 5b - 9a - 3b = 0$
$\cancel{16a - 8b = 0 \mid :8}$
$16a - 8b = 0 \mid :8$
$2a - b = 0 \Rightarrow b = 2a$
$f(x) = ax^2 + 2ax + (-9a - 3\cdot 2a) = ax^2 + 2ax - 9a - 6a$
$f(x) = y$
$\begin{cases} f(x) = ax^2 + 2ax - 15a \\ y = 6 \end{cases}$
$ax^2 + 2ax - 15a = 6$
$ax^2 + 2ax - 15a - 6 = 0$ 1 punkt wspólny $\Rightarrow \Delta = 0$
$\Delta = 4a^2 - 4\cdot a\cdot(-15a - 6) = 4a^2 - 4a(-15a - 6) =$
$= 4a^2 + 60a^2 + 24a$

$64a^2 + 24a = 0 \quad |:8$

$\cancel{8a^2 + 4a = 0 \quad |:4}$

$8a^2 + 3a = 0$

$a(8a+3) = 0$

$a = 0$ odrzucam, bo jest to funkcja kwadratowa, więc $a \neq 0$

$a = -\frac{3}{8}$

$b = 2a = 2^1 \cdot \left(-\frac{3}{8_4}\right) = -\frac{3}{4}$

$c = -9 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{8} + \frac{3}{4} =$

$= \frac{27}{8} + \frac{18}{8} = \frac{45}{8} = 5\frac{5}{8}$

Odp. $a = -\frac{3}{8}$, $b = -\frac{3}{4}$, $c = 5\frac{5}{8}$

Nieliczna grupa zdających w rozwiązaniu zadania, po właściwej interpretacji obu informacji o funkcji kwadratowej f i obliczeniu współczynnika a, skorzystała ze wzorów Viète'a do obliczenia współczynników b i c i poprawnie je obliczyła. Takie rozwiązanie sposobem 6. prezentujemy w Przykładzie 29.

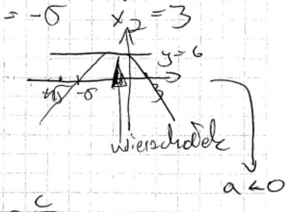
Przykład 29.

$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad y = 6 \qquad A = (-5, 0)$

$B = (3, 0)$

A i B to miejsca zerowe

$x_1 = -5 \qquad x_2 = 3$



$6 = a(-1+5)(-1-3)$

$6 = a \cdot (4) \cdot (-4)$

$6 = -16a$

$a = -\frac{6}{16}$

wzory Viète'a

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

$-5 + 3 = \frac{-b}{-\frac{6}{16}}$

$-2 \cdot \left(-\frac{6}{16}\right) = -b$

$\frac{12}{16} = -b$

$b = -\frac{3}{4}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$(-5) \cdot 3 = \frac{c}{-\frac{6}{16}}$

$-15 \cdot \left(-\frac{6}{16}\right) = c$

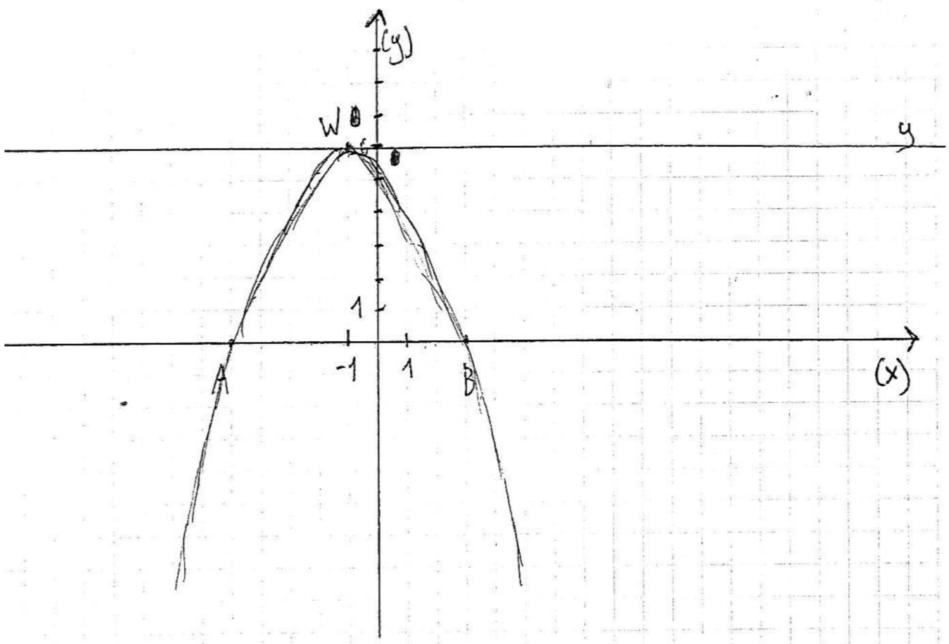
$\frac{90}{16} = c$

$$\boxed{\begin{cases} a = -\frac{6}{16} \\ b = -\frac{3}{4} \\ c = \frac{90}{16} \end{cases}}$$

odpowiedź

Wśród rozwiązań zdających były też i takie, w których łączyli oni różne metody, korzystali ze znanych sobie obiektów związanych z pojęciem funkcji kwadratowej i kończyli z sukcesem rozwiązanie zadania. Przykładem 30. ilustrujemy jedno z wielu takich rozwiązań. Ten zdający wyczerpująco wyjaśnił swój tok rozumowania, co świadczy o dobrej znajomości i rozumieniu pojęcia funkcji kwadratowej i obiektów z nią związanych.

Przykład 30.



Skoro funkcja kwadratowa f ma dokładnie 1 punkt wspól-
ny z prostą y to znaczy, że jej wierzchołek musi leżeć
na prostej y (bo inaczej byłyby 2 punkty wspólne), a ra-
miona paraboli skierowane będą ku dołowi.

$a < 0$

$W = (p, 6)$

Z ~~dla~~ wykresu można odczytać współrzędną p dla wierzchołka W
(ramiona paraboli przebiegają symetrycznie, więc ~~wsp~~ pierwsza współ-
rzędna wierzchołka W ~~wsp~~ musi być w równej odległości od punktów A i B)

$W = (-1, 6) \rightarrow$ można podstawić ~~p~~ współrzędne do ~~[illegible]~~ postaci kanonicznej

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

$$0 = a(3+1)^2 + 6$$

$$0 = \cancel{a} \; 16a + 6$$

$$-6 = 16a$$

$a = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8} \rightarrow$ na podstawie a i p można wyliczyć b

$$p = -\frac{b}{2a}$$

$$-1 = -\frac{b}{2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)} \quad / \cdot (-1)$$

$$1 = \frac{b}{2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)} = \frac{b}{-\frac{3}{4}} \quad / \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$-\frac{3}{4} = b$$

Żeby wyliczyć c, wystarczy podstawić a, b oraz współrzędne jednego z punktów należących do funkcji f do wykresu funkcji f.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$0 = -\frac{3}{8} \cdot 3^2 - \frac{3}{4} \cdot 3 + c$$

$$0 = -\frac{3}{8} \cdot 9 - \frac{3}{4} \cdot 3 + c$$

$$0 = -\frac{27}{8} - \frac{9}{4} + c$$

$$0 = -\frac{27}{8} - \frac{18}{8} + c$$

$$c = \frac{45}{8} = 5\frac{5}{8}$$

Odp. Wartości współczynników a, b i c to:

$a = -\frac{3}{8}$

$b = -\frac{3}{4}$

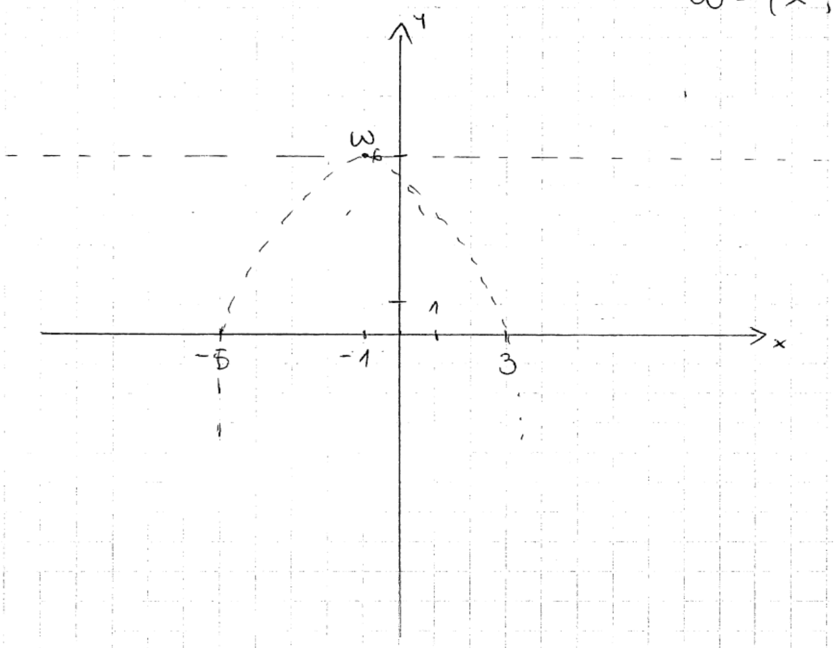
$c = 5\frac{5}{8}$

Zagadnienia wymagające przeprowadzenia modelowania w kilku etapach są istotnym wyzwaniem dla zdających. Nierzadko, pomimo bezbłędnego wykonania pierwszego etapu rozwiązania, zdający nie doprowadzali poprawnie modelowania do końca.
Jakie są zatem prawdopodobne przyczyny niskiego wyniku w zadaniu, które nie należało do zadań szczególnie opuszczanych, jak zadanie typu „wykaż, że”, a w podanych w treści zadania informacjach wyraźnie wskazano na wydzielone obiekty i relacje między nimi, z czego jasno wynikała droga postępowania? Oto możliwe odpowiedzi.

Niemałej części maturzystów, pomimo dobrej znajomości i rozumienia pojęcia funkcji kwadratowej, właściwej interpretacji obu informacji o funkcji kwadratowej i jej wykresie, zapisania poprawnej zależności między obiektami, np. poprawnego równania z niewiadomą a (lub układu równań z niewiadomymi a, b i c), popełniony błąd rachunkowy w jego rozwiązaniu uniemożliwiał otrzymanie poprawnego wzoru funkcji f.
Przykładami 31. i 32. ilustrujemy takie rozwiązania.

Przykład 31.

$W = (x; 6) \Rightarrow (-1; 6)$



$$\begin{cases} 6 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c \\ 0 = a\cdot(-5)^2 + b\cdot(-5) + c \\ 0 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 - a + b = c \\ 0 = 25a - 5b + c \\ 0 = 9a + 3b + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 = a\cancel{4} - b + c \\ 0 = 25a - 5b + c \\ 0 = 9a + 3b + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 - a + b = c \\ 0 = 25a - 5b + 6 - a + b \\ 0 = 9a + 3b + 6 - a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6-a+b=c \\ 0=24a-4b+6 \\ 0=8a+4b+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6-a+b=c \\ -6=24a-4b \\ -6=8a+4b \end{cases}$$

$$-12=32a \quad /:32$$

$$-\frac{12}{32}=a \qquad -\frac{6}{16}=a \qquad -\frac{3}{8}=a$$

$$-6=\overset{3}{\cancel{24}}\cdot\left(-\frac{3}{\cancel{8}}\right)-4b \qquad -6=-9-4b$$

$$3=-4b \quad /:-4 \qquad -\frac{3}{4}=b$$

$$6-\left(-\frac{3}{8}\right)+\frac{3}{4}=c \qquad \frac{48}{8}+\frac{3}{8}+\frac{6}{8}=c$$

$$\frac{57}{8}=c$$

Odp: $a=-\frac{3}{8}$; $b=-\frac{3}{4}$; $c=\frac{57}{8}$.

Ten maturzysta popełnił błąd rachunkowy w końcowej części rozwiązania – w obliczeniu współczynnika c i w konsekwencji zapisał niepoprawny wzór funkcji f.

Przykład 32.

$p = \cancel{x} \qquad q = 6$

jeżeli funkcja kwadratowa przecina prostą y tylko w jednym punkcie, jest to wierzchołek paraboli funkcji.

$A = (-5, 0) \qquad B = (3, 0)$

$-5 = x_1$
$3 = x_2$ miejsca zerowe funkcji: $W = (-1, 6)$

$p = \frac{-5+3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$p = \frac{-b}{2a}$

$y = a(x+5)(x-3)$

$6 = a(-1+5)(-1-3)$

$6 = a \cdot (-4) \cdot 4$

$6 = -16a$

$-\frac{3}{8} = a$

$p = \frac{-b}{2a}$

$-1 = -b \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)$

$-1 = -b : \left(-\frac{3}{8}\right)$

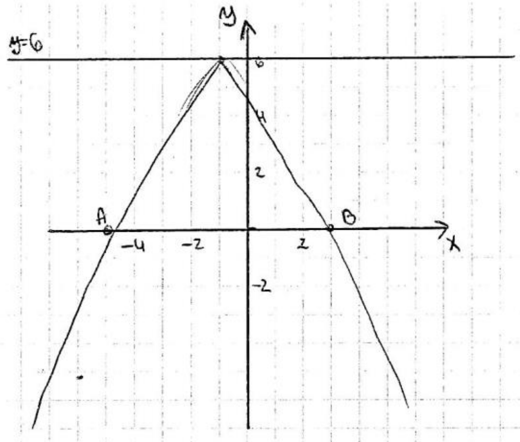
$-1 = \frac{8}{3} b$

$b = -\frac{3}{8}$

Ten zdający, mimo że zapisał poprawny wzór na b, w przekształceniu „zgubił” 2, a ponadto nie doprowadził rozwiązania do końca, ponieważ nie obliczył współczynnika c.

Część zdających popełniała błędy przy podstawianiu podczas rozwiązywania układów równań (Przykład 33.).

Przykład 33.



$f(x) = ax^2 + bx + c$

A i B to miejsca zerowe

$f(x) = a(x+5)(x-3) =$

$= a(x^2+2x-15) =$

$= ax^2+2ax-15a$

Skoro ma dokładnie jeden punkt wspólny to $a<0$ oraz wierzchołek musi mieć współrzędne $W=(x_1, 6)$.

$W = \left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$x_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2a}{2a} = -1$

$W = (-1, 6)$

$f(-1) = 6$

$6 = a\cdot(-1)^2 + 2a\cdot(-1) - 15\cdot(-1)$

$6 = a - 2a + 15$

$-9 = -a$

$a = 9$

$\Downarrow$

$b = 2a = 18$

$c = -15a = -135$

$f(x) = 9x^2 + 18x - 135$

$\begin{cases} a = 9 \\ b = 18 \\ c = -135 \end{cases}$

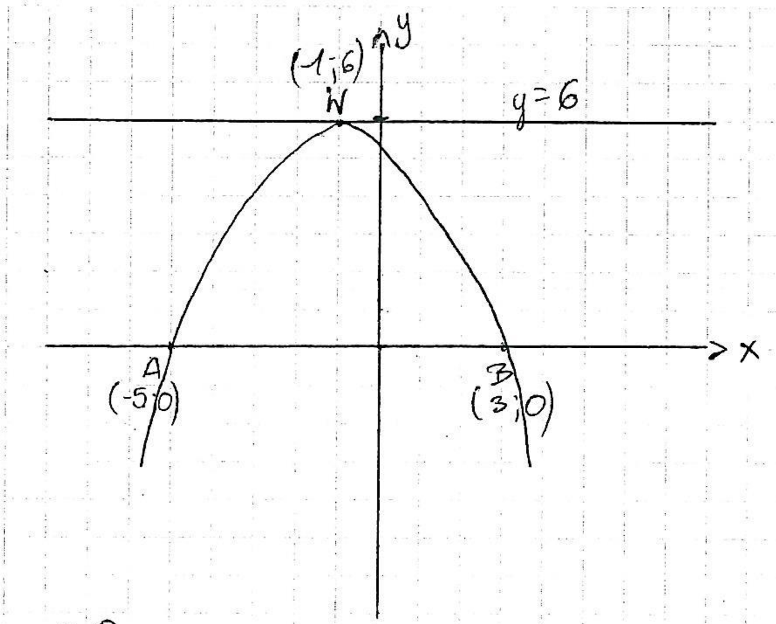
Rozwiązania licznej grupy zdających, spośród tych, którzy nie przeprowadzili modelowania do końca, świadczyć mogą, w mniejszym lub większym stopniu, o braku znajomości i rozumienia pojęcia funkcji i obiektów z nią związanych.

Niektórzy maturzyści w procesie konstrukcji modelu matematycznego danej sytuacji, przeprowadzali jej badanie, a następnie dokonywali wydzielenia obiektów i relacji między nimi, zapisywali dostrzeżone związki i zależności, ale nie potrafili ich odpowiednio połączyć, by osiągnąć choćby niewielki postęp na drodze do rozwiązania zadania.

Wśród nich byli zdający, którzy poprawnie zinterpretowali informację, że funkcja ma dwa miejsca zerowe, ale nie wywnioskowali z tego, że wzór funkcji można zapisać w postaci iloczynowej, co uniemożliwiło im uzyskanie nawet 1 punktu za takie rozwiązanie.

Z kolei zdający, którego rozwiązanie, jako reprezentację takich rozwiązań, prezentujemy w Przykładzie 34., potrafił właściwie zinterpretować informację o posiadaniu przez wykres funkcji kwadratowej f dokładnie jednego punktu wspólnego z prostą o równaniu $y = 6$, podał poprawne współrzędne wierzchołka paraboli, zapisał wzór funkcji w postaci kanonicznej oraz sprowadził ją do postaci ogólnej. Jednak, chociaż na rysunku zaznaczył punkty przecięcia wykresu z osią Ox, nie wykorzystał informacji, że $f(-5) = 0$ lub $f(3) = 0$, która umożliwiłaby obliczenie współczynnika a i w efekcie również pozostałych współczynników. Brak właściwej interpretacji współrzędnych punktu należącego do wykresu funkcji skutkował tym, że zdający zakończył rozwiązanie.

Przykład 34.



$a < 0$

$f(x) = a(x-p)^2 + q$

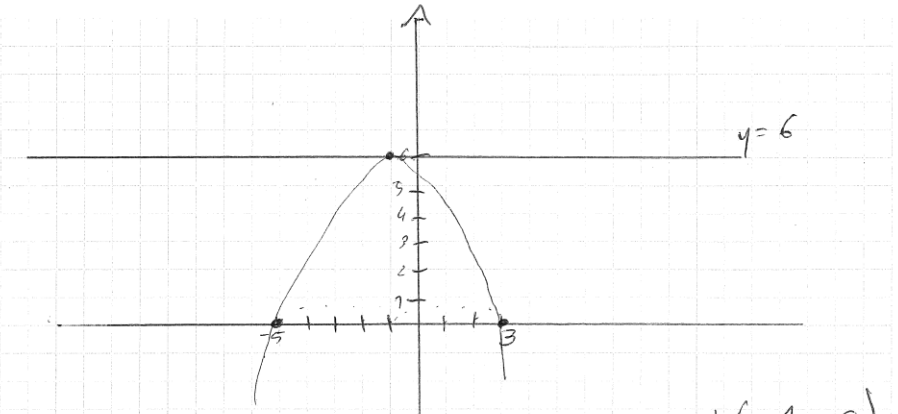
$f(x) = a(x+1)^2 + 6$

$f(x) = a(x^2 + 2x + 1) + 6$

$f(x)\ ax^2 + 2ax + a + 6$

Inni zdający nie potrafili skorygować własnego rozwiązania pomimo ewidentnej sprzeczności między otrzymanym wynikiem a treścią zadania. Takie rozwiązania ilustrujemy Przykładem 35., w którym zdający sporządził ilustrację graficzną adekwatną do właściwej interpretacji informacji o wykresie funkcji, a po obliczeniach nie zauważył sprzeczności, że dla otrzymanego współczynnika a, nie będzie spełniony warunek jedynego punktu wspólnego paraboli z prostą.

Przykład 35.



p= jest równe -1 bo prosta x=-1 jest osią symetrii funkcji f

$W(p,q) = W(-1,6)$

$f(x) = a(x-p)^2+q$

$0 = a(-5-1)+6$

$0 = -6a+6$

$-6 = -6a$

$a = 1$

więc skoro 2a = 6 -15a = c

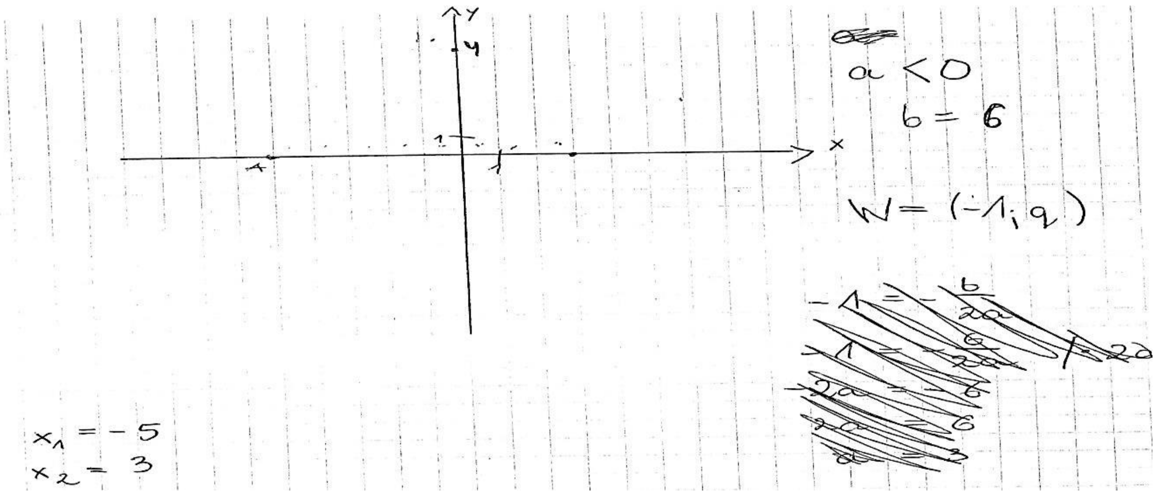
to ~~wzór funkcji jest następujący~~ współczynniki funkcji f:

$a=1 \quad b=2 \quad c=-15$

Część zdających z kolei poprawnie zinterpretowała informację, że ponieważ punkty A i B leżą na osi liczbowej, to miejscami zerowymi są liczby: -5 oraz 3 i zapisała wzór funkcji w postaci iloczynowej, jednak nie obliczyła ani odciętej wierzchołka paraboli, ani nie potrafiła właściwie zinterpretować informacji o tym, że ponieważ parabola ma z prostą o równaniu $y = 6$ dokładnie jeden punkt wspólny, to rzędna q wierzchołka tej paraboli jest równa 6 i zakończyła rozwiązanie.

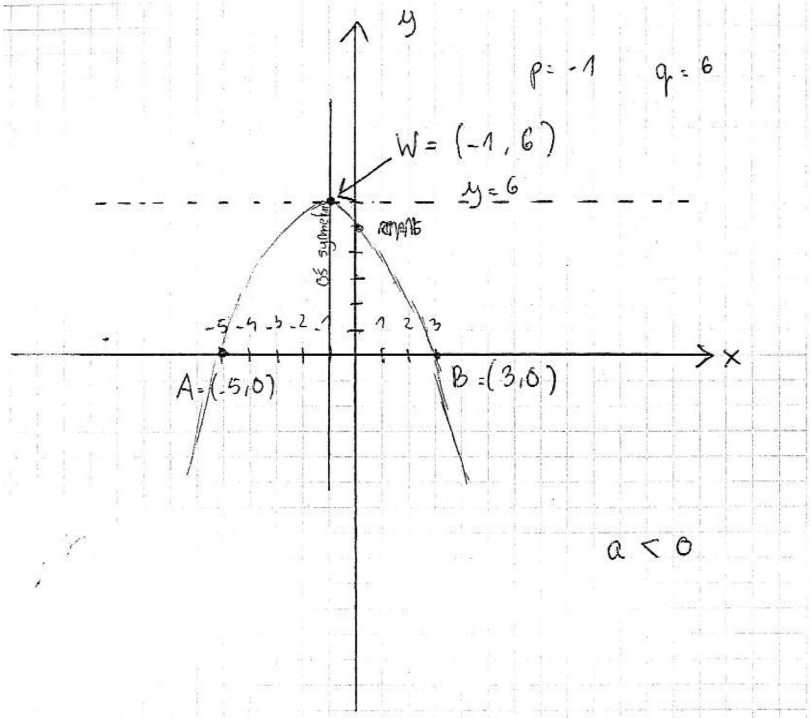
Niektórzy tylko poprawnie zinterpretowali położenie punktów A i B na osi liczbowej, podali odciętą wierzchołka paraboli i na tym kończyli rozwiązanie (Przykład 36.).

Przykład 36.



Wśród rozwiązań były również i takie, w których zdający poprawnie wyznaczyli współrzędne wierzchołka i na tym zakończyli rozwiązanie. Nie potrafili zinterpretować informacji, że punkty A i B leżą na osi liczbowej, więc miejscami zerowymi funkcji są liczby : -5 i 3 (Przykład 37.).

Przykład 37.



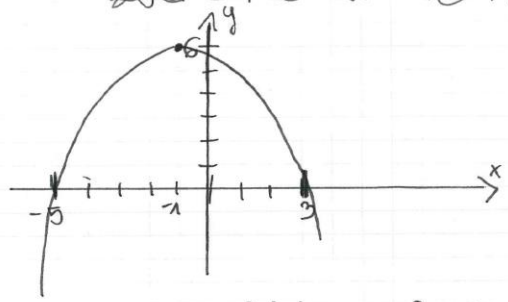
jeśli funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma dokładnie jeden wspólny punkt z prostą $y = 6$ to znaczy, że dzieli z tą prostą wierzchołek i współczynnik a jest ujemny

Zdarzały się również takie rozwiązania, w których zdający poprawnie wnioskowali, że funkcja ma dwa miejsca zerowe, zapisywali wzór funkcji w postaci iloczynowej, ale w dalszym rozwiązaniu nie wykorzystywali drugiej informacji o funkcji, której interpretacja była nieodzowna do obliczenia prawidłowego współczynnika a, ale przyjmowali konkretną liczbę za wartość współczynnika a, przekształcali wzór do postaci ogólnej i podawali otrzymane współczynniki jako odpowiedź. Jedno z takich rozwiązań prezentujemy w Przykładzie 38.

Przykład 38.

$W=(-1,6)$

$f(x)=\cancel{a}(x+5)(x-3)=x^2-3x+5x-15=x^2+2x-15$



Więc $f(x)=-x^2+2x-15$

Odp.: $a=-1$, $b=2$, $c=-15$

Wszystkie te przykłady niepełnych, ale prawidłowo rozpoczętych rozwiązań świadczyć mogą o braku ugruntowanej wiedzy o własnościach funkcji kwadratowej, co najprawdopodobniej przełożyło się na brak strategii rozwiązania zadania.

Wśród błędnych rozwiązań liczna grupa zdających popełniała błąd interpretacji informacji o funkcji f.

Największą trudność dla zdających stanowiło zinterpretowanie informacji danej w treści zadania, że wykres funkcji f ma z prostą o równaniu $y = 6$, która jest równoległa do osi Ox u kładu współrzędnych, dokładnie jeden punkt wspólny. Przykłady takiej błędnej interpretacji przedstawiamy poniżej.

Wprawdzie w przedstawionym poniżej rozwiązaniu wyznaczono poprawnie współrzędne wierzchołka paraboli, lecz potem zapisano niepoprawną wartość współczynnika c, który utożsamiano z rzędną wierzchołka (Przykład 39.).

Przykład 39.

należą do wykresu funkcji f. Oblicz wartości współczynników a, b oraz c.

W - wierzchołek paraboli

$p = -\frac{b}{2a}$

$\vec{v}$ w górę to 6
więc $c = 6$

wierzchołek paraboli jest styczny z prostą $y = 6$, więc
$q = 6$

$p = \frac{-5+3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$W = (-1; 6)$

ramiona skierowane są w dół, więc $a < 0$

~~f(x) = ...~~

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = a(x-p)^2 + q$

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

$f(x) = a(x+1)^2 + 6$

$f(x) = a(x+5)(x-3)$

$-1 = \frac{-b}{\frac{-6}{16}}$

$-b = (-1) \cdot \frac{-6}{16}$

$b = \frac{6}{16}$

$f(-1) = 6$

$\cancel{f(-1) = a(-1+1)^2 + 6 = 6}$

$f(-1) = a(-1+5)(-1-3)$

$f(-1) = a \cdot 4 \cdot (-4) = -16a$

$-16a = 6 \quad a = \frac{6}{-16}$

$a = \frac{6}{-16}$

$b = \frac{6}{16}$

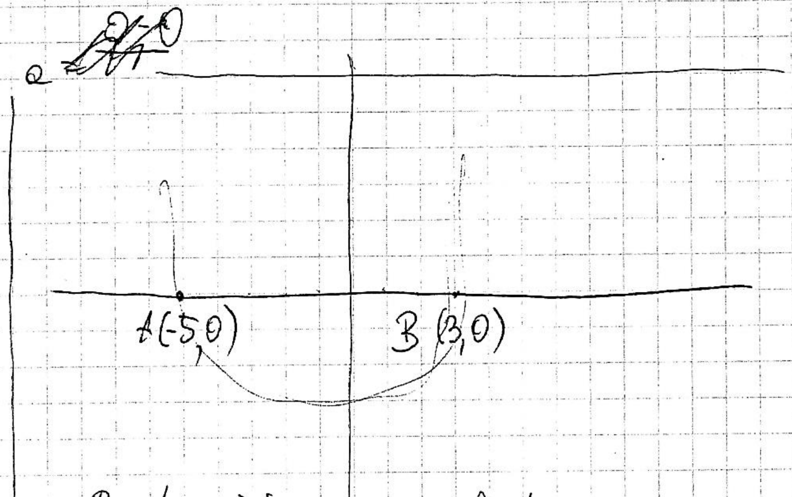
$c = 6$

Z kolei zdający, którego rozwiązanie reprezentuje wcale niemałą grupę zdających, poprawnie wnioskował, iż funkcja f ma dwa miejsca zerowe i zapisał wzór funkcji w postaci iloczynowej, ale z dalszego rozwiązania wynika, że błędnie interpretuje informację o tym, że wykres funkcji f ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą o równaniu $y = 6$. Zdający błędnie przyjął rzędną q wierzchołka paraboli za wartość współczynnika c i zapisał tę informację jako $P = (0, 6)$, co świadczy o braku znajomości podstawowych pojęć związanych z funkcją kwadratową (Przykład 40.).

Przykład 40.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$A(-5,0),\ B(3,0) \in f(x)$



A i B to miejsca zerowe funkcji

$f(x) = a(x+5)(x-3) = a(x^2 - 3x + 5x - 15) =$

$= ax^2 + 2ax - 15a = 0$

$P \in y = 6$

$P = (0,6)$

$\begin{cases} y = 6 \\ y = ax^2 + 2ax - 15 \end{cases}$

$6 =$

$6 = a \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot a - 15a$

$6 = -15a$

$a = \frac{6}{-15}$

$f(x) = \frac{-6}{15}(x+5)(x-3) =$

$= \frac{-6}{15}x^2 + 2\cdot\left(-\frac{6}{15}\right)x - 15\cdot\left(-\frac{6}{15}\right) =$

$= -\frac{6}{15}x^2 - \frac{12}{15}x + 6 = 0$

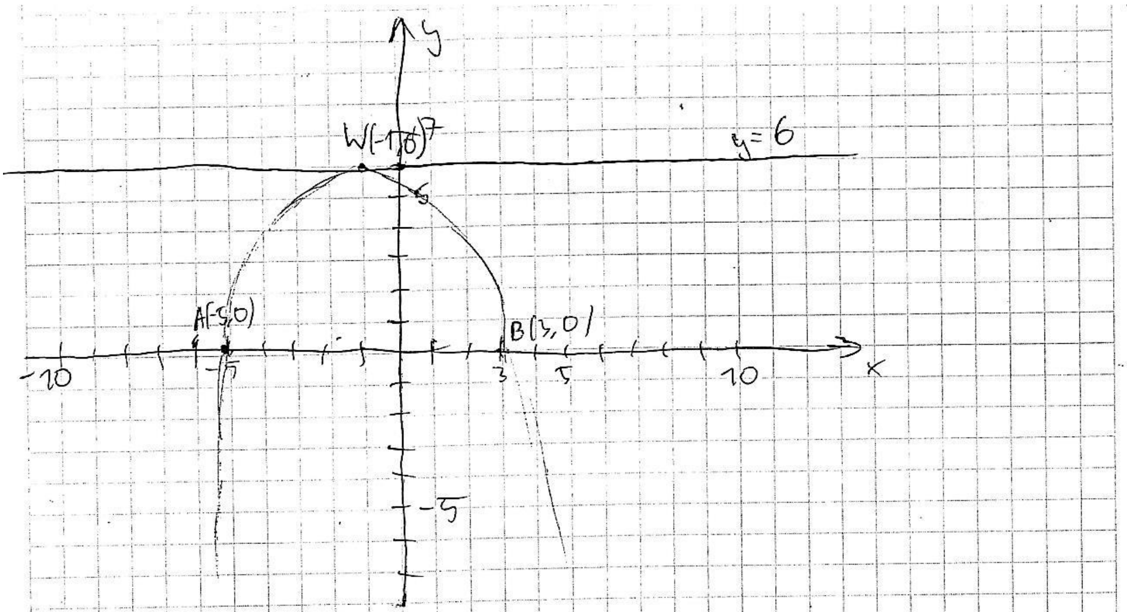
$a = -\frac{6}{15}$

$b = -\frac{12}{15}$

$c = 6$

Nieliczni zdający poprawnie rozpoczynali rozwiązanie zadania, jak zdający w Przykładzie 41., ale później popełniali błąd i mylili współczynnik a przy x^2 we wzorze funkcji kwadratowej ze współczynnikiem kierunkowym funkcji liniowej.

Przykład 41.



Skoro A(-5,0) i B (3,0) należą do wykresu funkcji f to -5 i 3 to miejsca zerowe tej funkcji $\Rightarrow \Delta > 0$. Funkcja kwadratowa to parabola, a skoro ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą y=6 to znaczy, że na tej prostej leży jej wierzchołek, a skoro ma miejsca zerowe w -5 i 3 to jej ramiona są skierowane w dół (a<0). ~~Wierz~~ Współrzędna x wierzchołka paraboli jest dokładnie pomiędzy miejscami zerowymi, $|AB| = 8$, $\frac{|AB|}{2} = 4$ czyli p = (-1), a q = 6 (leży na prostej y=6).

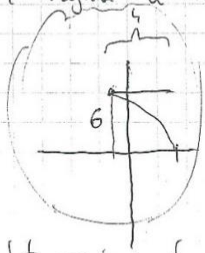
$p = -1$; $q = 6$ $\quad f(-5) = 0 \quad f(3) = 0$

$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x+1)^2 + 6$

Parabola z punktu $(-1, 6)$ obniża się do wysokości 0 po w odległości 4 więc a to $-\frac{6}{4}$

$a = -\frac{6}{4}$

$b = 6 - \frac{6}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$



$f(x)\ -\frac{6}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + c$

$-\frac{6}{4} \cdot (-1)^2 + \frac{9}{2} \cdot (-1) + c = 0$

6 to punkt przecięcia funkcji z osią y czyli)

$-\frac{6}{4} - \frac{9}{2} + c = 0$

$c - \frac{24}{4} = 0$

$c = 6$

$f(x) = -\frac{6}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 6$

$a = -\frac{6}{4}$

$b = \frac{9}{2}$

$c = 6$

Należy podkreślić, że na poziomie podstawowym niski poziom wykonania ma również **zadanie 33.** (29%), w którym maturzyści musieli wykazać się umiejętnością zastosowania strategii wynikającej wprost z treści zadania i wykorzystać cechy podobieństwa trójkątów oraz obliczyć miarę wskazanego kąta. Główną przyczynę niskich wyników w tym zadaniu stanowił brak całościowej koncepcji rozwiązania zadania, błędy w interpretacji treści zadania, nieuprawnione przyjmowanie szczególnych założeń (np. przyjmowanie konkretnych miar kątów trójkątów, przyjmowanie jako pewnik prostopadłości niektórych odcinków) oraz brak funkcjonalnego opanowania pojęcia podobieństwa trójkątów.

W poprawnym rozwiązaniu zadania wymagającego umiejętności stosowania i tworzenia strategii występują stałe elementy: analiza zadania (określenie relacji między wielkością poszukiwaną a danymi), ustalenie kolejnych kroków prowadzących do rozwiązania (ułożenie planu działania), realizacja przyjętej strategii i zweryfikowaniu wyniku. Chodzi o to, aby zdający potrafił podzielić dany problem na kilka mniejszych problemów cząstkowych i nadał im taką strukturę, która pozwoli mu, w wyniku rozwiązania kolejnych problemów cząstkowych, rozwiązać wyjściowy problem.

Analiza jakościowa zadań – poziom rozszerzony

Analiza wskaźników poziomu wykonania zadań egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym (Tabela 10.) pozwala sformułować wniosek, że dla tegorocznych maturzystów żadne z zadań egzaminacyjnych nie było bardzo łatwe, jedynie dwa zadania okazały się łatwe i dwa umiarkowanie trudne.

Najłatwiejszym zadaniem w arkuszu (poziom wykonania – 83%) okazało się zadanie 4., które sprawdzało umiejętność obliczania prawdopodobieństwa, korzystając z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

Kolejnym zadaniem łatwym dla abiturientów okazało się zadanie 1., w którym należało obliczyć wartość wyrażenia, stosując wzory na logarytm potęgi oraz na zamianę podstawy logarytmu. Dla tego zadania poziom wykonania to 73%.

Zadanie 2. zostało poprawnie rozwiązane przez 59% zdających, więc było umiarkowanie trudne. W zadaniu tym należało wykazać się umiejętnością obliczania pochodnej funkcji wymiernej.

Zbliżony poziom wykonania (52%) odnotowano dla zadania 5., w którym zdający musiał wykazać się umiejętnością obliczania granic ciągów oraz zastosować twierdzenie o działaniach na granicach ciągów. Poprawne uzupełnienie kratek w tym zadaniu kodowanym:

4	1	1

pozwalało przyznać zdającemu 2 punkty. Część zdających podawała błędną odpowiedź:

4	1	2

co spowodowane było przybliżeniem rozwinięcia dziesiętnego liczby $\frac{7}{17}$ i wpisywaniem w kratki cyfr przybliżenia (zamiast odpowiednich cyfr rozwinięcia).

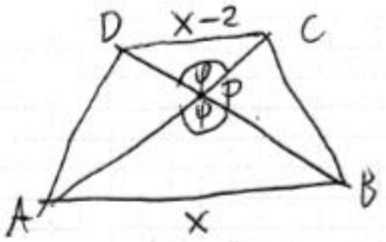
Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najsłabiej

Zadania z geometrii na wykazywanie od kilku już lat sprawiają zdającym największe problemy. Wyniki tegoroczne nie odbiegają od wyników z lat ubiegłych. Maturzystom najwięcej trudności przysporzyło zadanie 8. sprawdzające umiejętności z obszaru *Rozumowanie i argumentacja*. W tym zadaniu zdający miał wykazać prawdziwość związku między odpowiednimi odcinkami w trapezie. Poziom wykonania tego zadania to zaledwie 10%.

Wśród rozwiązań dominowały dwa sposoby.
Jeden z nich polegał na zauważeniu, że kąty APB i CPD mają równe miary, odpowiednim zastosowaniu twierdzenia sinusów do trójkątów ABP oraz CDP i wykorzystaniu związków między długościami podstaw trapezu oraz promieniami okręgów opisanych na wspomnianych trójkątach. To pozwalało na obliczenie sinusa kąta ostrego APB (lub CPD). Następnie należało obliczyć cosinus kąta ostrego APB (lub CPD) i odpowiednio

zastosować twierdzenie cosinusów do trójkąta CDP, co prowadziło do uzyskania tezy zadania (Przykład 1R.).

Przykład 1R.



Skoro ΔCPD ostrokątny to φ ostry
Niech $|AB|=x$, R – promień okręgu opisanego na ΔABP.
Z Tw sinusów w ΔAPB i ΔDPC

$$\frac{x}{\sin\varphi}=2R, \qquad \frac{x-2}{\sin\varphi}=2(R-3)$$

$$\sin\varphi=\frac{x}{2R}. \qquad \frac{x-2}{\frac{x}{2R}}=2(R-3)$$

$$2R\,\frac{x-2}{x}=2(R-3) \qquad \cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}$$

$$R(x-2)=x(R-3) \qquad =\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{8}{9}}$$

$$2R=3x, \qquad =\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\sin\varphi=\frac{x}{2R}=\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}.$$ Skoro φ ostry to $\cos\varphi=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Z. Tw cosinusów w ΔDPC.

$$|CD|^2=|DP|^2+|CP|^2-2|DP||CP|\cdot\cos\varphi$$

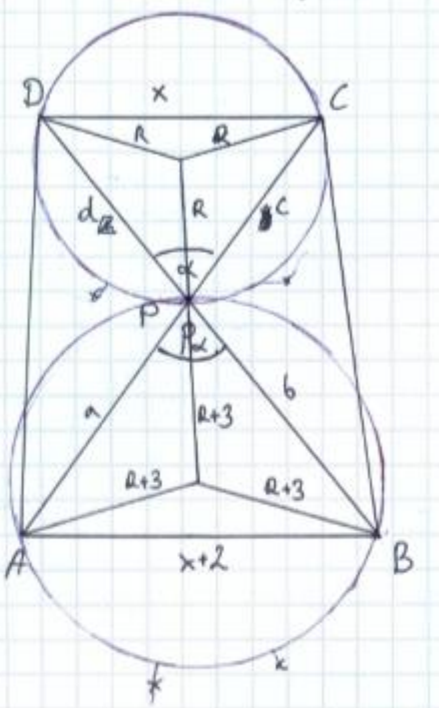
$$|DP|^2+|CP|^2-|CD|^2=\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot|DP|\cdot|CP|.$$

co należało dowieść.

Drugi, równie często spotykany sposób rozwiązania, polegał na zauważeniu podobieństwa trójkątów CPD oraz BPA, skorzystaniu z faktu, że stosunek długości promieni okręgów opisanych na trójkątach podobnych jest równy skali podobieństwa tych trójkątów, wykorzystaniu związków między długościami podstaw trapezu oraz promieniami okręgów opisanych na trójkątach CPD oraz BPA oraz odpowiedniego zastosowania twierdzenia sinusów do jednego z tych trójkątów. To pozwalało na obliczenie sinusa kąta ostrego APB (lub CPD). Po skorzystaniu z jedynki trygonometrycznej obliczano cosinus kąta ostrego APB (lub CPD). Ostatnim krokiem było zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta CDP, co prowadziło do uzyskania tezy zadania (Przykład 2R.).

Przykład 2R.

2aT:



~~△D~~

△ CPD – trójkąt ostrokątny

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku

Teza:

$|DP|^2+|CP|^2-|CD|^2=\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot|DP|\cdot|CP|$

$|\sphericalangle DPC|=|\sphericalangle APB|$ (kąty wierzchołkowe)

$|\sphericalangle PAB|=|\sphericalangle PCD|$ (kąty naprzemianległe)

$|\sphericalangle ABP|=|\sphericalangle PDC|$ (kąty naprzemianległe)

△ABP ~ △CDP ~~△CPD~~ (cecha kkk), w skali k

△ABP ~ △CDP, ~~więc $\frac{x}{x+2}=\frac{R}{R+3}$~~ więc również okręgi są podobne w skali k

a zatem $\frac{x}{x+2}=\frac{R}{R+3}=\cancel{\frac{b}{d}}=\frac{d}{b}=\frac{c}{a}=k$

$\frac{d}{b}=\frac{x}{x+2}$

$Rx+3x=Rx+2R$

$3x=2R$

$R=\frac{3}{2}x$

$R=\frac{3}{2}x$

$k=\cancel{\frac{x}{x+2}}$

$dx+2d=bx$

tw. sinusów: $\frac{x}{\sin\alpha} = 2R \quad / \cdot \sin\alpha$

$x = 2R \cdot \sin\alpha \quad \wedge \quad R = \frac{3}{2}x$

$x = \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \cdot x \cdot \sin\alpha$

$x = 3x \cdot \sin\alpha \quad / : x \quad (x > 0)$

$1 = 3\sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{1}{3}$

"jedynka trygonometryczna": $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9}$

$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \vee \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ sprzeczność, bo α jest katem ostrym gdyż ΔCPD jest ostrokątny

tw. cosinusów dla ΔDCP

$x^2 = d^2 + c^2 - 2 \cdot d \cdot c \cdot \cos\alpha$

$x^2 = d^2 + c^2 - 2 \cdot d \cdot c \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$x^2 = d^2 + c^2 - \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot d \cdot c$

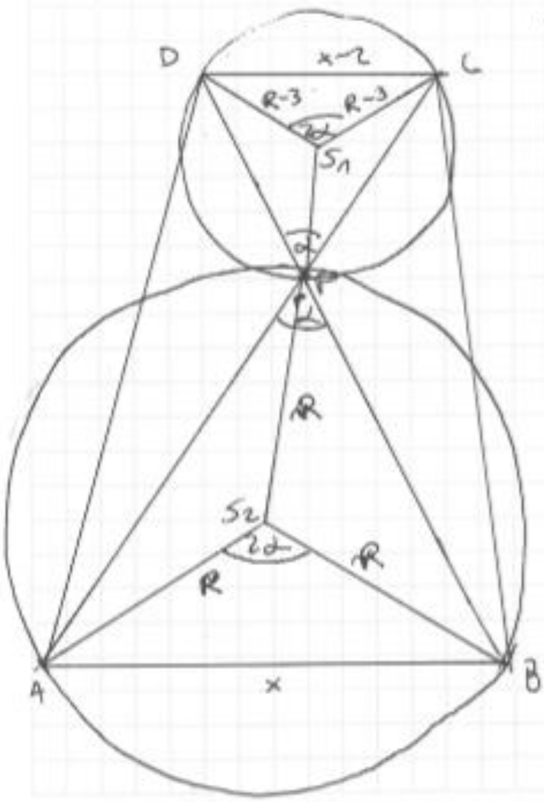
$d^2 + c^2 - x^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot d \cdot c$

$|DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot |DP| \cdot |CP|$, a zatem teza jest prawdziwa

Część zdających rozwiązywała zadanie bez bezpośredniego skorzystania z twierdzenia sinusów. Zdający zauważali, że trójkąty ABP i CDP są podobne, korzystali z faktu, że stosunek długości promieni okręgów opisanych na trójkątach podobnych jest równy skali podobieństwa tych trójkątów, korzystali ze związków między długościami podstaw trapezu oraz promieniami okręgów opisanych podanych w treści zadania i uzyskiwali związek między długością promienia okręgu opisanego na trójkącie ABP i długością boku AB. Następnie zauważali, że miara kąta AS_2B (gdzie S_2 jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABP) jest dwa razy większa od miary kąta APB i stosowali twierdzenie cosinusów do trójkąta ABS_2. To pozwalało obliczyć cosinus podwojonego kąta APB. Po zastosowaniu odpowiednich wzorów trygonometrycznych uzyskiwano cosinus kąta APB. Ostatnim etapem rozwiązania było ponowne zastosowanie twierdzenia cosinusów – tym razem do trójkąta CDP – i uzyskanie tezy (Przykład 3R.).

Przykład 3R.

(1) $\triangle APB \sim \triangle DPC$



(kąty wierzchołkowe ∢DPC i ∢APB)

$\alpha = ∢DPC = ∢APB$

$\frac{|DC|}{|AB|} = \frac{|DP|}{|PB|} = \frac{|CP|}{|AP|}$

$\frac{x-2}{x} = \frac{R-3}{R}$

$R(x-2) = x(R-3)$

$\cancel{Rx} - 2R = \cancel{xR} - 3x$

$2R = 3x$

$R = \frac{3}{2}x$

(2) $∢AS_2B = 2\alpha$, kąt środkowy oparty na tym samym łuku co $∢APB$

(3) $x^2 = 2R^2 - 2R^2\cdot\cos 2\alpha$

$x^2 = 2\cdot\frac{9}{4}x^2 - 2\cdot\frac{9}{4}x^2\cdot\cos 2\alpha$

$1 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2}\cdot\cos 2\alpha$

$\frac{9}{2}\cos 2\alpha = \frac{9}{2} - 1$

$\frac{9}{2}\cos 2\alpha = \frac{7}{2}$

$\cos 2\alpha = \frac{7}{9}$

$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{7}{9}$

$2\cos^2\alpha = \frac{16}{9}$

$\cos 2\alpha = \frac{8}{9}$, Δ ostrokątny, więc $\cos\alpha > 0$

$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

(4) z tw. cosinusów

$|CD|^2 = |DP|^2 + |CP|^2 - 2\cdot|CP|\cdot|DP|\cdot\cos\alpha$

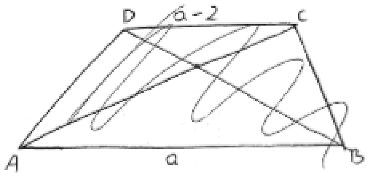
$L = |DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = 2\cdot|CP|\cdot|DP|\cdot\cos\alpha =$

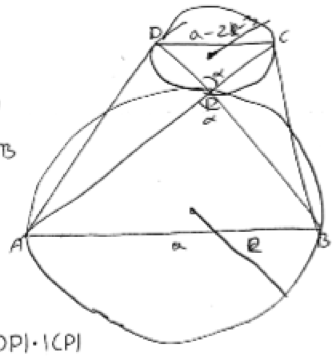
$= 2\cdot|CP|\cdot|DP|\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot|DP|\cdot|CP| = P$

c.n.d.

Często występującym błędem w rozwiązaniach był niepoprawny zapis twierdzenia sinusów (Przykład 4R.), elementarne błędy w zapisach i przekształceniach algebraicznych wraz z brakiem właściwego pomysłu na rozwiązanie zadania (Przykład 5R.).

Przykład 4R.





T: $|DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot|DP|\cdot|CP|$

$|\sphericalangle DPC| = |\sphericalangle APB|$ (k. wierzchołkowe)

z tw. sin.

$\frac{a-2}{\sin\alpha} = R-3 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a-2}{R-3}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = R \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{R}$

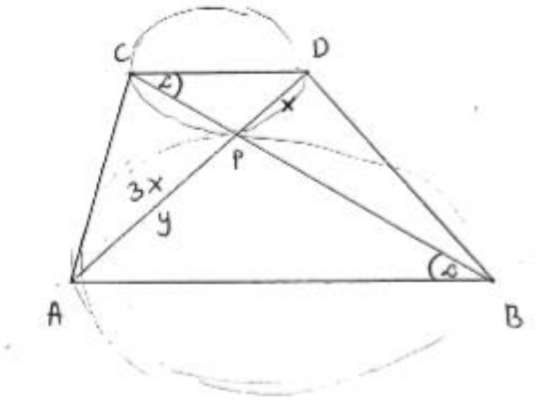
$\frac{a}{R} = \frac{a-2}{R-3}$

$a(R-3) = R(a-2)$

$aR - 3a = aR - 2R$

$\cancel{3a = 2R \Rightarrow a = \frac{2}{3}R}$

Przykład 5R.



$|AB| = |CD| + 2$

$\triangle CPD \sim \triangle APB$

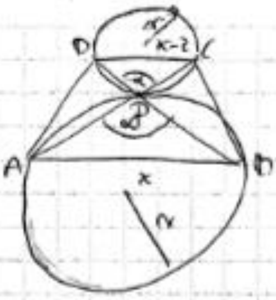
z Tw sinusów $\dfrac{x}{\sin\alpha} = 2R \qquad x = 2R \cdot \sin\alpha$

$\dfrac{y}{\sin\alpha} = 2R + 3 \qquad y = 2R \cdot \sin\alpha + 3\sin\alpha$

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{3\sin\alpha} \qquad y = x \cdot 3\sin\alpha$

Część zdających uzyskiwała poprawną zależność między długością podstawy AB trapezu i długością promienia okręgu opisanego na trójkącie APB, ale nie potrafiła wykorzystać tej zależności do obliczenia (co)sinusa kąta CPD. (Przykład 6R.).

Przykład 6R.



$\alpha < 90$ $R_m = R$ małego okręgu, opisanego na ΔCPD

R – R okręgu opisanego na ΔAPB

wykaż, że $|DP|^2 + |CP|^2 - |CD^2| = \frac{4\sqrt{2}}{3}|DP|\cdot|CP|$

$\sphericalangle DPC = \sphericalangle APB$, bo wierzchołkowe

z twierdzenia sinusów:

$\frac{|CD|}{\sin\alpha} = 2R_m$

$\frac{x-2}{\sin\alpha} = 2(R-3)$

$\frac{|AB|}{\sin\alpha} = 2R$

$\frac{x}{\sin\alpha} = 2R$

z twierdzenia cosinusów

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

~~$|CD|^2 = |DP|^2 + |CP|^2 - 2|DP|\cdot|CP|\cos\alpha$~~

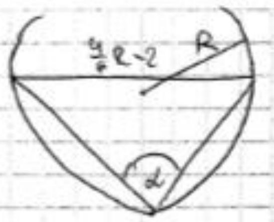
$|CD|^2 = |DP|^2 + |CP|^2 - 2|DP|\cdot|CP|\cdot\cos\alpha$

$|DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = 2|DP|\cdot|CP|\cdot\cos\alpha$

wykaż, że $2\cos\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\cos\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\sin\alpha = \frac{x}{2R} = \frac{x-2}{2R-6}$$



$$x(2R-6) = 2R(x-2)$$

$$\cancel{2R}x - 6x = \cancel{2R}x - 4R$$

$$6x = 4R$$

$$x = \frac{4}{6}R$$

$$\frac{\frac{4}{6}R-2}{\sin\alpha} = R$$

$$\frac{4}{6}R - 2 = R\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{\frac{4}{6}R-2}{R} = \frac{4}{6} - \frac{2}{R}$$

$$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin\alpha = \frac{\frac{4}{6}R-2}{R}$$

Bardzo słabo poradzili sobie zdający z zadaniami 13. i 14. Poziomy wykonania dla tych zadań są zbliżone i wynoszą odpowiednio 21% i 24%.

Zadanie 13. sprawdzało w ramach wymagań ogólnych umiejętność tworzenia i użycia strategii. Dysponując podanymi w treści zadania informacjami o trójkącie AFH, należało obliczyć wysokość graniastosłupa $ABCDEFGH$. Rozwiązanie tego problemu wymagało od zdającego zastosowania wzoru na pole trójkąta w zależności od dwóch boków i sinusa kąta zawartego między tymi bokami (w celu obliczenia iloczynu długości odcinków AH i AF), obliczenia cosinusa kąta HAF i zastosowania twierdzenia cosinusów do trójkąta AFH. To pozwalało znaleźć związek między kwadratami długości przekątnych ścian graniastosłupa: $|HF|^2 = |HA|^2 + |AF|^2 - 44$. Trzykrotne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa pozwalało w tym równaniu zastąpić kwadrat każdej przekątnej przez sumę kwadratów odpowiednich boków graniastosłupa: $|AD|^2 + |AB|^2 = h^2 + |AD|^2 + h^2 + |AB|^2 - 44$. Stąd otrzymywano już wysokość h graniastosłupa. Poniższy skan (Przykład 7R.) przedstawia wzorcowe rozwiązanie zdającego.

Przykład 7R.

$P_{AFH} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot AH \cdot \sin\alpha$

$26{,}4 = AF \cdot AH \cdot \frac{12}{26}$

$AF \cdot AH = 57\frac{1}{5}$

$AH^2 = a^2 + h^2$

$AF^2 = b^2 + h^2$

$FH = \sqrt{a^2 + b^2}$

$DA = a$ $\quad AB = b$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} =$

$\boxed{\cos\alpha = \frac{5}{13}}$ $\vee \cos\alpha = -\frac{5}{13}$

$a^2 + b^2 = AH^2 + AF^2 - 2 \cdot AF \cdot AH \cdot \cos\alpha$

$\cancel{a^2} + \cancel{b^2} = \cancel{a^2} + h^2 + \cancel{b^2} + h^2 - 2 \cdot 57\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{13}$

$\cancel{2}h^2 = \cancel{2} \cdot \frac{\cancel{286}^{22}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{13}}$

$h^2 = 22$

$h = \sqrt{22}$ [j]

Często popełnianym przez zdających błędem było założenie, że trójkąt AFH jest równoramienny (Przykład 8R.) albo że podstawa graniastosłupa jest kwadratem (Przykład 9R.).

Przykład 8R.

$|AH| = d$

$d = |AF|$

$26{,}4 = \frac{1}{2} d^2 \cdot \frac{12}{13}$

$26\frac{4}{10} = \frac{12}{26} d^2$

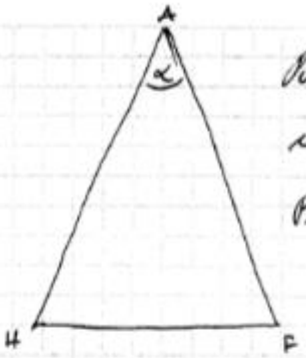
$\frac{132}{5} = \frac{12}{26} d^2 \quad / \cdot \frac{26}{12}$

$\frac{\cancel{132}^{11}}{5} \cdot \frac{26}{\cancel{12}_{1}} = d^2$

$d^2 = \frac{286}{5}$

$d = \sqrt{\frac{286}{5}}$

Przykład 9R.



Przyjmując oznaczenia jak na rysunku, $\sin\alpha = \frac{12}{13}$

$P_{AFH} = 26,4 = \frac{1}{2}|AH|\cdot|AF|\cdot\sin\alpha$

$|AH|\cdot|AF|\cdot\frac{12}{13} = 52,8$

$|AH|\cdot|AF| = 57,2$

Przyjmując, że podstawa graniastosłupa jest kwadratem:

$|AH| = |AF|$. Podstawiając

$|AH|^2 = 57,2$

$|AH| = \sqrt{57,2}$, bo $|AH| > 0$.

Niech $|HD| = a$. Wówczas, z tw. pitagorasa

$a^2 + h^2 = |AH|^2$

$|HF|^2 = \cancel{a\sqrt{2}}\ 2a^2$

Z tw. cosinusów w $\triangle AFH$

$|HF|^2 = 2|AH|^2 - 2|AH|^2\cos\alpha$.

Ponieważ $\alpha < 90^\circ$, to

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{144}{169}}\ \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$

Podstawiając $|AH|^2 = 57,2$

$|HF|^2 = 2(57,2 - 57,2\cdot\frac{5}{13})$

$|HF|^2 = 2\cdot 35,2 = \cancel{6}\ 70,4$

$a^2 = \frac{|HF|^2}{2} = \frac{70,4}{2} = 35,2$

Wtedy $h^2 = |AH|^2 - a^2 = 57,2 - 35,2 = 22$

$h = \sqrt{22}$, bo $h > 0$

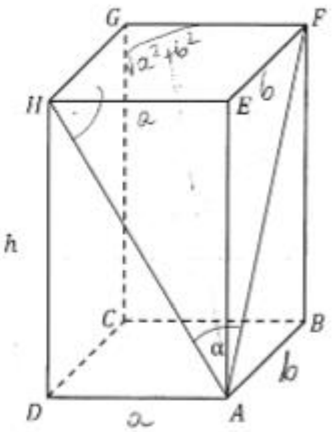
Odp.: $h = \sqrt{22}$.

Należy tutaj podkreślić, że przyjęte przez zdającego założenie o równości długości odcinków AH oraz AF (lub o równości boków podstawy graniastosłupa) prowadziło do identycznego wyniku $h = \sqrt{22}$, lecz jest uproszczeniem postawionego w zadaniu 13. zagadnienia.

Niemała część zdających w sposób nieuprawniony zakładała, że trójkąt AFH jest prostokątny (Przykład 10R.).

Przykład 10R.

rysunek). Pole trójkąta AFH jest równe 26,4.
Oblicz wysokość h tego graniastosłupa.



$\sin x = \frac{12}{13}$ $h = 2$

$P_{\Delta AFH} = 26,4$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{b^2+h^2}}$

$\frac{12}{13} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{b^2+h^2}}$

$\frac{144}{169} = \frac{a^2+b^2}{b^2+h^2}$

$144b^2+144h^2 = 169a^2+169b^2$ $\frac{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+h^2}}{2} = 26,4$

$144h^2 = 169a^2+169b^2-144b^2$ $\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+h^2)} = 52,8$

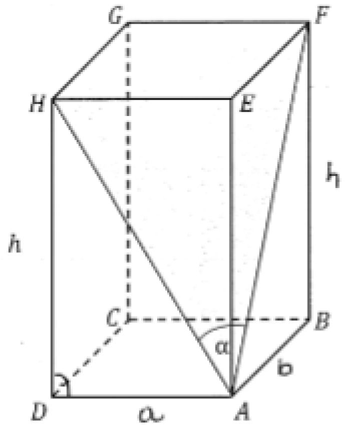
$h^2 = \frac{169a^2+25b^2}{144}$

$h = \frac{\sqrt{169a^2+25b^2}}{12}$

Innymi błędami popełnianymi przez zdających było stosowanie twierdzenia Pitagorasa bez kwadratów (Przykład 11R.), czy wręcz przyjęcie konkretnych liczbowych wartości boków graniastosłupa (Przykład 12R.).

Przykład 11R.

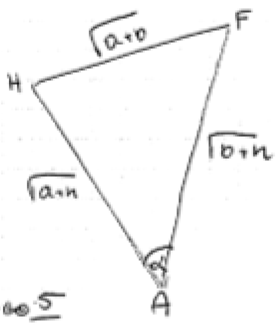
Dany jest graniastosłup prosty $ABCDEFGH$ o podstawie prostokątnej $ABCD$. Przekątne AH i AF ścian bocznych tworzą kąt ostry o mierze α takiej, że $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ (zobacz rysunek). Pole trójkąta AFH jest równe 26,4.
Oblicz wysokość h tego graniastosłupa.



$\sin\alpha = \frac{12}{13}$

$P_{AFH} = 26{,}4 = \frac{264}{10} = \frac{132}{5}$

$P_{AFH} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a+h} \cdot \sqrt{b+h} \cdot \frac{12}{13}$



$\frac{144}{169}$

$\cos\alpha = \frac{5}{13}$

bo α ostry

$\alpha + \beta = \cancel{a} + h + \cancel{b} + h - 2\sqrt{a+h} \cdot \sqrt{b+h} \cdot \cos \frac{5}{13}$

$2h - \frac{10}{13}\sqrt{a+h} \cdot \sqrt{b+h} = 0$

$\sqrt{a+h} \cdot \sqrt{b+h} = \frac{2h}{\frac{10}{13}} = 2h \cdot \frac{13}{10} = \frac{13h}{5}$

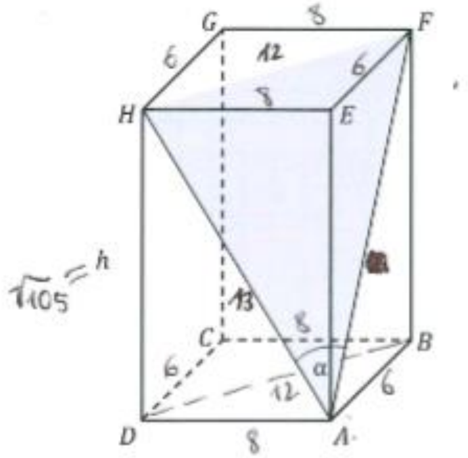
$P_{AFH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13h}{5} \cdot \frac{12}{13} = \frac{6h}{5}$

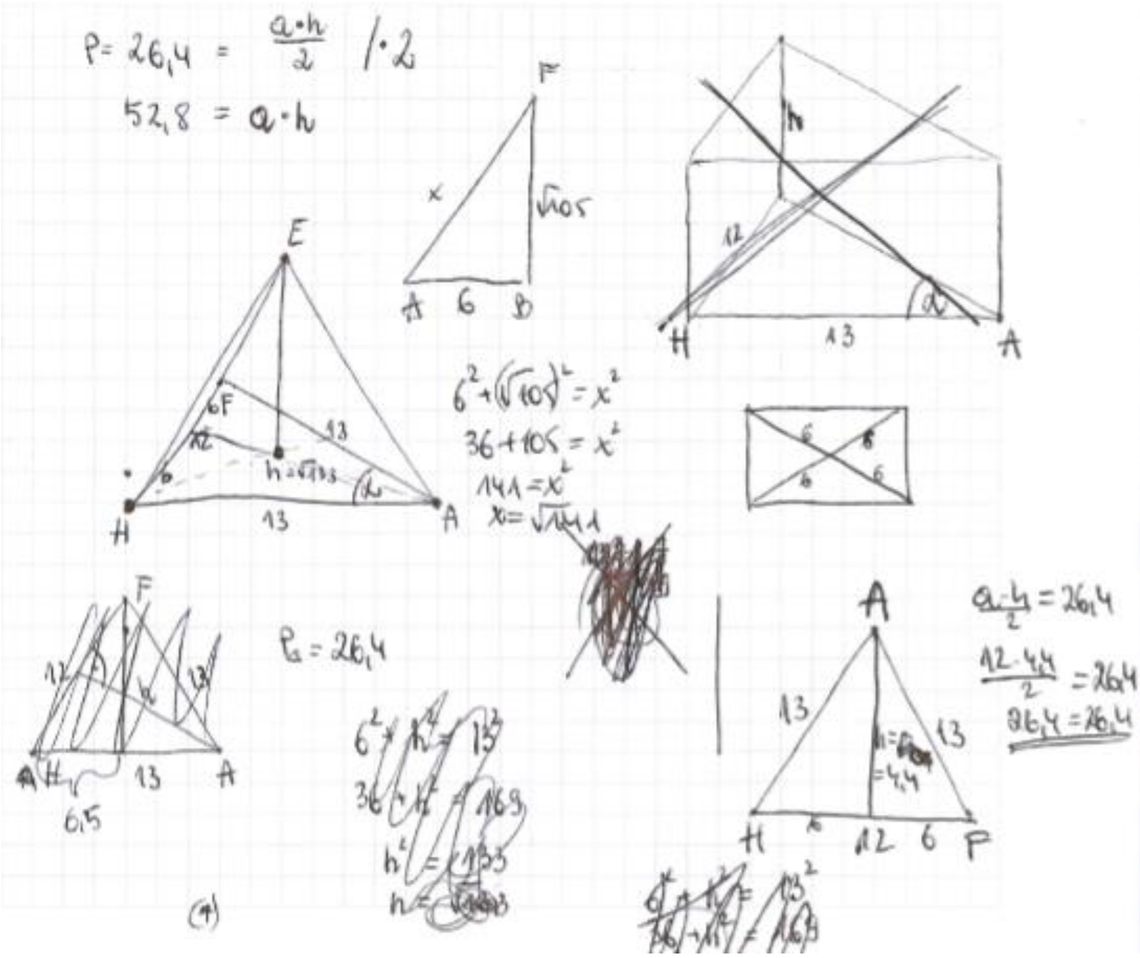
$\frac{6h}{5} = \frac{132}{5}$ $\quad h = 22$

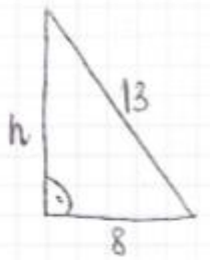
Przykład 12R.

Dany jest graniastosłup prosty $ABCDEFGH$ o podstawie prostokątnej $ABCD$. Przekątne AH i AF ścian bocznych tworzą kąt ostry o mierze α takiej, że $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ (zobacz rysunek). Pole trójkąta AFH jest równe 26,4.

Oblicz wysokość h tego graniastosłupa.







$8^2 + h^2 = 13^2$

$64 + h^2 = 169$

$h^2 = 105$

$\underline{\underline{h = \sqrt{105}}}$

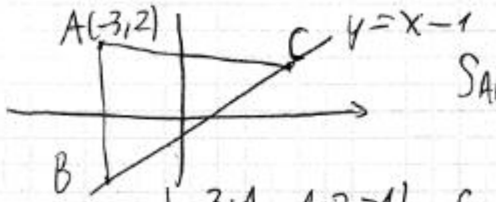
Rozwiązania zdających często nie były pełne i zawierały błędy rachunkowe.

Zadanie 14. dotyczyło geometrii analitycznej. Mając dane współrzędne jednego z wierzchołków podstawy trójkąta równoramiennego, pole tego trójkąta oraz równanie prostej zawierającej jedno z ramion, należało obliczyć współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

Jeden ze sposobów rozwiązania tego zadania polegał na obliczeniu odległości danego wierzchołka A podstawy trójkąta od ramienia BC, wykorzystaniu informacji o polu trójkąta i obliczeniu długości ramienia trójkąta. Następnie na uzależnieniu współrzędnych wierzchołka C od jednej niewiadomej i zapisania warunku $|AC| = |BC|$ jako równania z tą właśnie niewiadomą, co prowadziło do obliczenia współrzędnych punktu C. Ostatni etap rozwiązania zadania tym sposobem polegał na uzależnieniu współrzędnych wierzchołka B podstawy od jednej niewiadomej i zapisania warunku $|BC| = 5\sqrt{2}$ jako równania z tą niewiadomą, co prowadziło do obliczenia współrzędnych wierzchołka B. Przykład 13R. to realizacja rozwiązania zadania podanym wyżej sposobem.

Przykład 13R.

Skoro B, C leżą na prostej $y = x - 1$ to
$B(b, b-1)$, $C(c, c-1)$. Niech $k: y = x - 1$



$S_{ABC} = 15$

$$dist(A, k) = \frac{|-3\cdot 1 - 1\cdot 2 - 1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$\frac{1}{2}\cdot dist(A,k)\cdot |BC| = S_{ABC}$, $|BC| = 5\sqrt{2}$

$$5\sqrt{2} = \sqrt{(c+3)^2 + (c-3)^2}$$

$$50 = 2c^2 + 18$$

$$c^2 = 16$$

$$c = 4 \vee c = -4$$

Więc $C(4,3) \vee C(-4,-5)$

$5\sqrt{2} = \sqrt{(b-4)^2 + (b-4)^2} \vee 5\sqrt{2} = \sqrt{(b+4)^2 + (b+4)^2}$

$50 = 2(b-4)^2 \vee 50 = 2(b+4)^2$

$(b-4)^2 = 25 \vee (b+4)^2 = 25$

$b-4 = 5 \vee b-4 = -5 \vee b+4 = 5 \vee b+4 = -5$

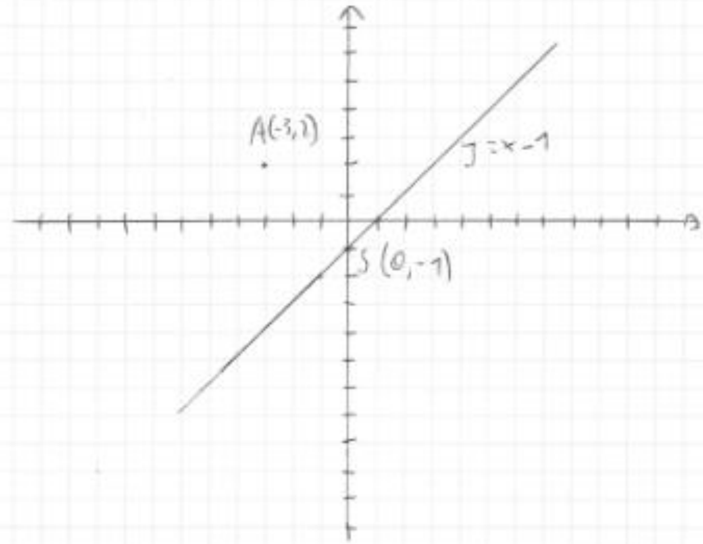
$b = 9 \vee b = -1 \vee b = 1 \vee b = -9$

Zatem gdy $C(4,3)$ to $B(9,8) \vee B(-1,-2)$ a gdy
$C(-4,-5)$ to $B(1,0) \vee B(-9,-10)$

odp: $C(4,3)$ i $B(9,8)$ lub
$C(4,3)$ i $B(-1,-2)$ lub
$C(-4,-5)$ i $B(1,0)$ lub
$C(-4,-5)$ i $B(-9,-10)$.

Część zdających, rozwiązując to zadanie, przyjmowała błędnie, że $|AB| = |AC|$ (Przykład 14R.).

Przykład 14R.



h → odległość punktu a od prostej $y = x - 1$

$x - y - 1 = 0$

$\frac{|-3-2-1|}{\sqrt{2}} = h \qquad h = \frac{6}{\sqrt{2}} = \underline{3\sqrt{2}}$

S – środek boku $|BC|$

$S = (x, x-1) \qquad |AS| = 3\sqrt{2}$

$|AS| = \sqrt{(x+3)^2+(x-3)^2} = \sqrt{x^2+6x+9+x^2-6x+9} = \sqrt{2x^2+18}$

$\sqrt{2x^2+18} = 3\sqrt{2}$

$2x^2+18 = 18 \quad x = 0 \Rightarrow y = -1$

~~$|SB| = |SC| =$~~ $P = 15 \quad 15 = \frac{|BC| \cdot 3\sqrt{2}}{2}$

$30 = |BC| \cdot 3\sqrt{2}$

$10 = |BC|\sqrt{2} \quad \frac{10}{\sqrt{2}} = |BC| \quad |BC| = 5\sqrt{2}$

$\Downarrow$

$B = (x, x-1), \quad C = (x, x-1) \quad |BS| = |CS| = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

$|BS| = |CS| = \sqrt{(0-x)^2+(-1-x-1)^2} = \sqrt{x^2+x^2+4x+4} =$
$= \sqrt{2x^2+4x+4}$

$\sqrt{2x^2+4x+4} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \quad 2x^2+4x-\frac{17}{2} = 0$

$2x^2+4x+4 = \frac{25}{2} \quad 4x^2+8x-17 = 0$

$\Delta = 64-4\cdot 4\cdot(-17) =$
$= 336$

$\sqrt{\Delta} = 4\sqrt{21}$

$x_1 = \frac{-8+4\sqrt{21}}{8} = \frac{\sqrt{21}}{2} - 1$

$\Downarrow$

$y = \frac{\sqrt{21}}{2} - 2$

$x_2 = \frac{-8-4\sqrt{21}}{8} = -1 - \frac{\sqrt{21}}{2}$

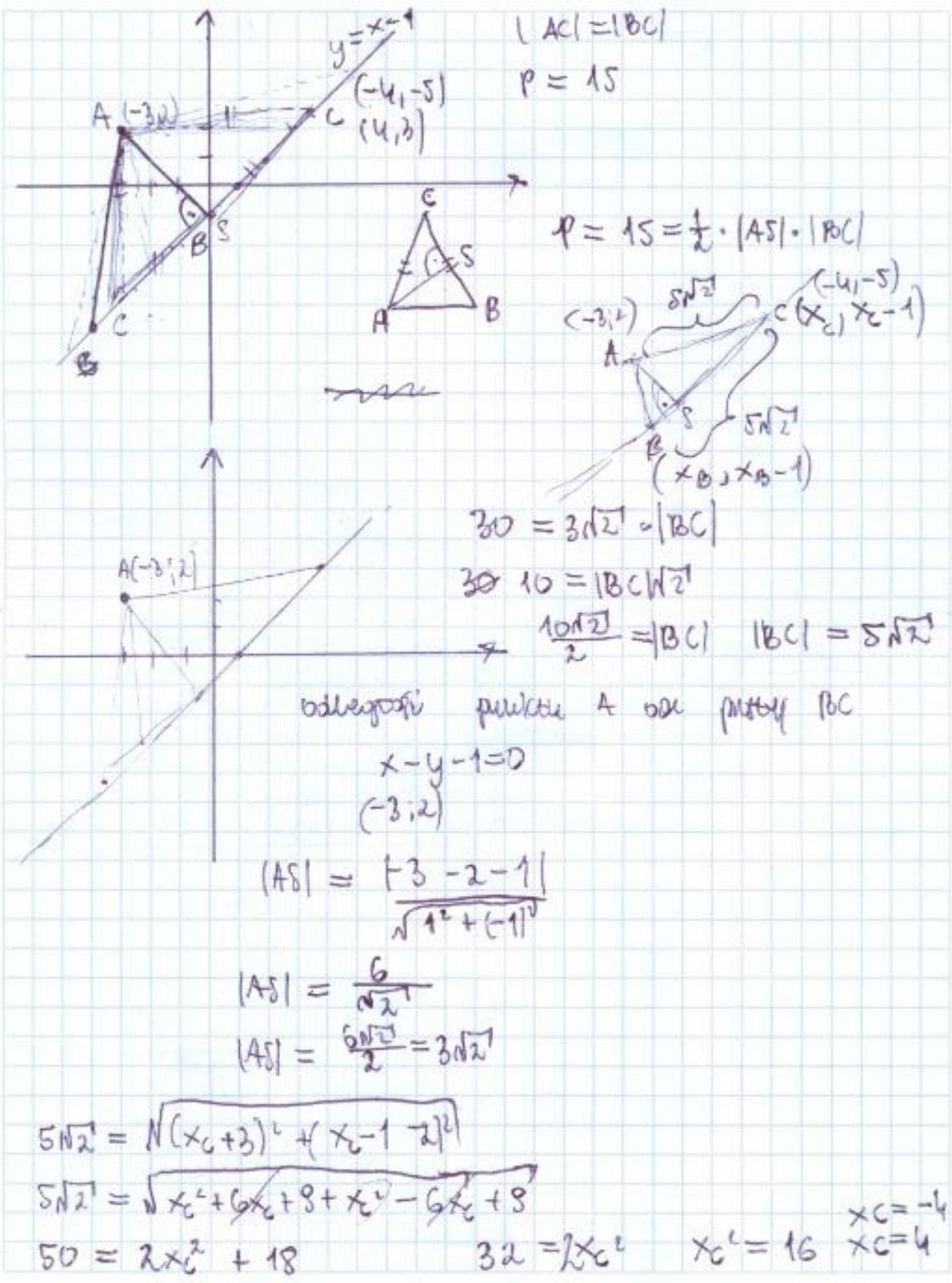
$\Downarrow$

$y = -2 - \frac{\sqrt{21}}{2}$

$\underline{B = \left(\frac{\sqrt{21}}{2} - 1, \frac{\sqrt{21}}{2} - 2\right)}$, ~~$C$~~ $\underline{C = \left(-1 - \frac{\sqrt{21}}{2}, -2 - \frac{\sqrt{21}}{2}\right)}$

Rozwiązania zawierały często błędy rachunkowe, zdający nieraz utożsamiali punkt B z C (Przykład 15R.) lub „zamieniali” punkt C na B (Przykład 16R.).

Przykład 15R.



$|AC| = |BC|$

$P = 15$

$y = x - 1$

$A(-3,2)$, $(-4,-5)$, $(4,3)$

$P = 15 = \frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot |BC|$

$C(x_c, x_c - 1)$, $B(x_B, x_B - 1)$

$30 = 3\sqrt{2} \cdot |BC|$

$10 = |BC|\sqrt{2}$

$\frac{10\sqrt{2}}{2} = |BC| \qquad |BC| = 5\sqrt{2}$

odległość punktu A od prostej BC

$x - y - 1 = 0$

$(-3;2)$

$|AS| = \frac{|-3-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$

$|AS| = \frac{6}{\sqrt{2}}$

$|AS| = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$5\sqrt{2} = \sqrt{(x_c+3)^2 + (x_c-1-2)^2}$

$5\sqrt{2} = \sqrt{x_c^2 + \cancel{6x_c} + 9 + x_c^2 - \cancel{6x_c} + 9}$

$50 = 2x_c^2 + 18 \qquad 32 = 2x_c^2 \qquad x_c^2 = 16 \qquad x_c = -4 \quad x_c = 4$

$C(-4,-5)$ lub $C(4,3)$

$5\sqrt{2} = |BC| = \sqrt{(x_B+4)^2 + (x_B-1+5)^2} \lor 5\sqrt{2} = \sqrt{(x_B-4)^2+(x_B-1-3)^2}$

$5\sqrt{2} = \sqrt{x_B^2 + 8x_B + 16 + x_B^2 + 8x_B + 16} \lor 5\sqrt{2} = \sqrt{x_B^2 - 8x_B + 16 + x_B^2 - 8x_B + 16}$

$50 = 2x_B^2 + 16x_B + 32$ $\qquad 50 = 2x_B^2 - 16x_B + 32$

$25 = x_B^2 + 8x_B + 16$ $\qquad 25 = x_B^2 - 8x_B + 32$

$x_B^2 + 8x_B - 9 = 0$ $\qquad x_B^2 - 8x_B + 7 = 0$

$\Delta = 64 + 4\cdot 9$ $\qquad \cancel{\Delta = 100}$ $\sqrt{\Delta} = 6$

$\sqrt{\Delta} = 10$

$x_1 = \frac{-8-10}{2} = -9$ $\qquad x_1 = \frac{8-6}{2} = 1$

$x_2 = \frac{8+10}{2} = 9$ $\qquad x_2 = \frac{8+6}{2} = 7$

$B(1,0)$ sprzeczność

$\lor B(7,6)$ sprzeczność

$|BC|$

$|BC|$

$\cancel{|AC| \neq}$

$|AC| = \sqrt{50}$

$|BC| = \sqrt{50}$

$B(-9,-10)$

$\lor B(9,8)$ sprzeczność

$|BC| = \sqrt{25+25} = |AC|$

$|BC| \neq |AC|$

~~Odp: $C(-4;5)$ $C(4,3)$~~

~~$B($ $B($~~

odp: $C(-4;5)$, $B(-9;-10)$

lub $B(-4;5)$, $C(-9;-10)$

Przykład 16R.

$A=(-3,2)$

$|AC|=|BC|$

$B\in k: y=x-1$ $\quad B=(x_B, x_B-1)$

$C\in k: y=x-1$ $\quad C=(x_c, x_c-1)$

$P=15$

$P=|CB|\cdot h\cdot\frac{1}{2}$

$30=|CB|\cdot h$

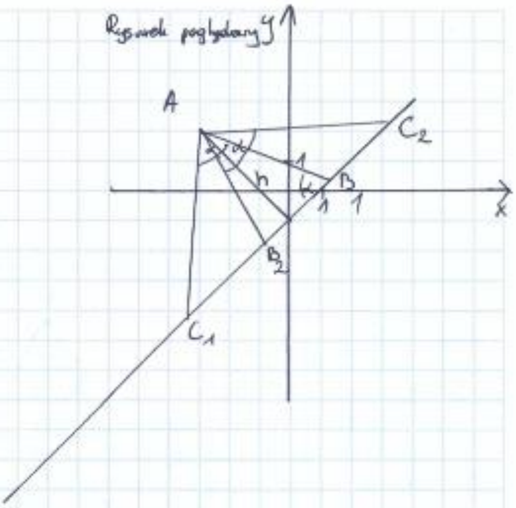
$\cancel{h=B}$

$h=d$

$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$d=\frac{|-3-2-1|}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}=h$

Rysunek poglądowy



$30=|CB|\cdot h$

$30=|CB|\cdot 3\sqrt{2}$

$|CB|=5\sqrt{2}$ $\wedge |AC|=|BC|$

$|AC|=|BC|=5\sqrt{2}$

$5\sqrt{2}=\sqrt{(-3-x_B)^2+(2-x_B+1)^2}$

$5\sqrt{2}=\sqrt{(x_B+3)^2+(3-x_B)^2}$

$5\sqrt{2}=\sqrt{x_B^2+6x_B+9+9-6x_B+x_B^2}$

$5\sqrt{2}=\sqrt{2(x_B^2+9)}$ $\quad /^2$

$50=2(x_B^2+9)$

$25=x_B^2+9$ $\quad /-9$

$16=x_B^2$

$\begin{cases} x_B=-4 \\ y_B=-5 \end{cases}$ (I) $\vee$ $\begin{cases} x_B=+4 \\ y_B=3 \end{cases}$ (II)

I $\cancel{x_B=-4}$

$B=(-4,-5)$

$|BC|=5\sqrt{2}$

$5\sqrt{2}=\sqrt{(-4-x_c)^2+(-5-x_c+1)^2}$

$50=x_c^2+8x_c+16+x_c^2+8x_c+16$

$25=x_c^2+8x_c+16$

$x_c^2+8x_c-9=0$

$\Delta=64+4\cdot 9=100$, $\sqrt{\Delta}=10$

$\left(x_c=\frac{-8-10}{2}=-9 \vee x_c=\frac{-8+10}{2}=1\right) \wedge x_c>x_B$ $(|AC|=|BC|)$

$\begin{cases} x_c=1 \\ y_c=0 \end{cases}$

$C=(1,0)$

Odp: $\left(B=(-4,-5) \wedge C=(1,0)\right)$ lub $\left(B=(4,3) \wedge C=(-1,-2)\right)$

II $B=(4,3)$

$|BC|=5\sqrt{2}$

$\cancel{5\sqrt{2}=\sqrt{(4-x_c)^2+(3-x_c)^2}}$

$\cancel{50=16-8x_c+x_c^2+9-6x_c+x_c^2}$

$\cancel{50=25-14x_c+2x_c^2}$

$\cancel{2x_c^2-14x_c-25=0}$

$5\sqrt{2}=\sqrt{(4-x_c)^2+(3-x_c+1)^2}$

$50=16-8x_c+x_c^2+x_c^2-8x_c+16$

$25=16-8x_c+x_c^2$

$x_c^2-8x_c-9=0$

$\cancel{(x_c+9)}$ $(x_c-9)(x_c+1)=0$

$(x_c=9 \vee x_c=-1) \wedge x_c<x_B$ $(|AC|=|BC|)$

$\begin{cases} x_c=-1 \\ y_c=-2 \end{cases}$ $\quad C=(-1,-2)$

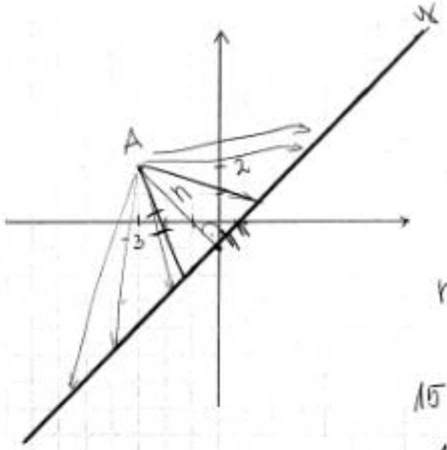
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	14.
	Maks. liczba pkt	6
	Uzyskana liczba pkt	

Wielu zdających nie rozwiązywało zadania do końca – zdający kończyli zapis na różnych etapach (Przykłady 17.R. oraz 18.R.).

Przykład 17R.

$A(-3,2)$ $|AC|=|BC|$ $P_\Delta=15$ $BC \rightarrow y=x-1$

$x-y-1=0$



$P_\Delta = 15 = \frac{a \cdot h}{2}$

$h = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|1\cdot(-3)-1\cdot 2+(-1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$

$h = \frac{|-3-2-1|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

$15 = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot|BC|$

$\frac{10}{\sqrt{2}} = |BC|$ $|BC| = 5\sqrt{2}$

$A(-3,2)$

$B(x_B, x_B-1)$

$C(x_C, x_C-1)$

$|AC|=|BC|$

$|BC| = 5\sqrt{2} =$ ~~$|(x_B...$~~

$= \sqrt{(x_C-x_B)^2+(x_C-1-x_B+1)^2} =$

$|BC| = \sqrt{(x_C-x_B)^2+(x_C-x_B)^2}$

$|BC| = \sqrt{2(x_C-x_B)^2} = \sqrt{25\cdot 2}$

$(x_C-x_B)^2 = 25$

$|AC| = \sqrt{(x_C+3)^2+(x_C-1-2)^2}$

$|AC| = \sqrt{(x+3)^2+(x_C-3)^2} = 5\sqrt{2} = \sqrt{50}$

$\sqrt{x_C^2+\cancel{6x_C}+9+x_C^2-\cancel{6x_C}+9} = \sqrt{2(x_C^2-2x_Cx_B+x_B^2)}$

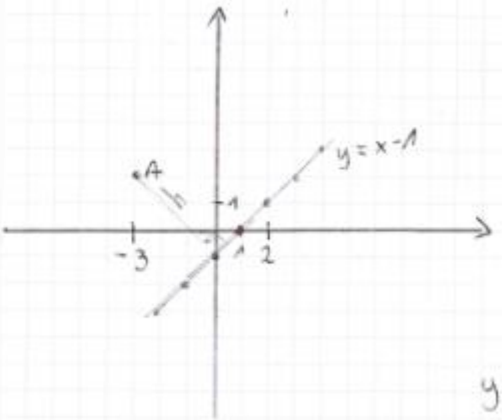
$\sqrt{2x_C^2+18} = \sqrt{50}$ $/\cdot 2$

$|2x_C^2+18| = |50|$

$x_C^2 = \frac{50-18}{2} = 16$

$x_{C_1} = 4$ $\vee$ $x_{C_2} = -4$

Przykład 18R.



$P = 15$

$|AC| = |BC|$

BC jest zawarty w prostej $y = x - 1$.

$y = 0 - 1$

$y = -1$

dana prosta przecina oś OY w punkcie

$A = (-3;2) = (x_0; y_0)$

$y = x - 1$

$-x + y + 1 = 0$

Odległość punktu od prostej:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$A = -1$
$B = 1$
$C = 1$

$$\frac{|3 + 2 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

wysokość opadająca z ~~punktu~~ wierzchołka a na bok BC

$h = 3\sqrt{2}$

$P_\Delta = \frac{a \cdot h}{2}$

$P_\Delta = \frac{|BC| \cdot h}{2}$

$15 = \frac{|BC| \cdot 3\sqrt{2}}{2} \quad / \cdot 2$

$30 = 3\sqrt{2}|BC| \quad / : 3\sqrt{2}$

$\frac{30}{3\sqrt{2}} = |BC|$

$|BC| = \cancel{\frac{30 \cdot 3\sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}}} \quad \frac{30}{3\sqrt{2}} \begin{matrix} / \cdot 3\sqrt{2} \\ / \cdot 3\sqrt{2} \end{matrix}$

$|BC| = \frac{90\sqrt{2}}{18}$

$|BC| = 5 = |AC|$

Długość odcinka:

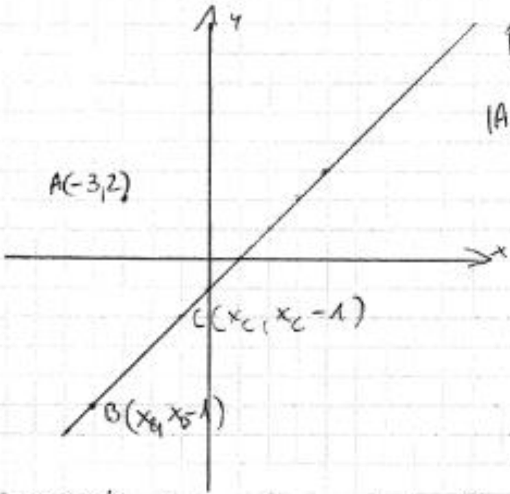
$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

$5 = \sqrt{(x_C + 3)^2 + (y_C - 2)^2}$

$5 = \sqrt{x_C^2 + 6x_C + 9 + y_C^2 - 4y_C + 4}$

Inny spotykany w pracach zdających sposób rozwiązania tego zadania polegał na uzależnieniu współrzędnych wierzchołka B jak i wierzchołka C od jednej niewiadomej, zazwyczaj od odciętych tych wierzchołków: $B = (x_B, x_B - 1)$, $C = (x_C, x_C - 1)$, zapisania warunku na pole trójkąta jako równania z niewiadomymi x_B oraz x_C oraz zapisania warunku równoramienności $|AC| = |BC|$ jako równania z niewiadomymi x_B oraz x_C . Rozwiązanie układu złożonego z tych dwóch równań prowadziło do obliczenia współrzędnych wierzchołków B i C. Maturzyści rozwiązujący zadanie tym sposobem często nie potrafili doprowadzić rozwiązania do końca, popełniając przy tym błędy (Przykład 19R.).

Przykład 19R.



$P_\Delta = 15$

$|AC| = |BC|$

BC = prosta B zawierająca bok BC : $y = x - 1$

Pole trójkąta o wierzchołkach $A=(-3,2)$, $B=(x_B, x_B-1)$ i $C=(x_C, x_C-1)$

$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_B+3)(x_C-1-2)-(x_B-1-2)(x_C+3)\right|$

$= \frac{1}{2}\left|(x_B+3)(x_C-3)-(x_B-3)(x_C+3)\right| = 15$

$\Rightarrow 30 = \left|(x_B+3)(x_C-3)-(x_B-3)(x_C+3)\right|$

$30 = \left|x_Bx_C - 3x_B + 3x_C - \cancel{9} - x_Bx_C - 3x_B + 3x_C + \cancel{9}\right|$

$30 = |6x_C - 6x_B|$

$\vec{AC} = \vec{BC}$

$\vec{AC} = \cancel{[x_C + 3]}\ [x_B + 3,\ x_C - 3]$

$\vec{BC} = [x_C - x_B,\ \cancel{x_C + x_B}\ x_C - x_B]$

$|BC|^2 = |AC|^2$

$|AC|^2 = (x_C + 3)^2 + (x_C - 3)^2$

$|BC|^2 = (x_C - x_B)^2 + (x_C - x_B)^2$

$x_C^2 + 6x_C + 9 + x_C^2 - 6x_C + 9 = |AC|^2$

$x_C^2 - 2x_Cx_B + x_B^2 + x_C^2 - 2x_Cx_B + x_B^2 = |BC|^2$

$\cancel{x_C^2 + x_C^2}\ \cancel{2x_C^2} + 18 = \cancel{2x_C^2} - 4x_Cx_B + 2x_B^2$

$18 = 2x_B^2 - 4x_C x_B$

$18 = 2x_B(x_B - 2x_C)$

$\frac{18}{2x_B} - x_B = -2x_C$

$9x_B - x_B = -2x_C$

$8x_B = -2x_C$

$x_C = -4x_B$

stąd

$30 = |6(-4x_B) - 6x_B)| = |-24x_B - 6x_B| = |-30x_B|$

$\cancel{x_B = -1 \vee x_B = 1}$

$x_{B_1} = -1 \vee x_{B_2} = 1$

$\cancel{y_B}\ x_{C_1} = 4 \vee x_{C_2} = -4$

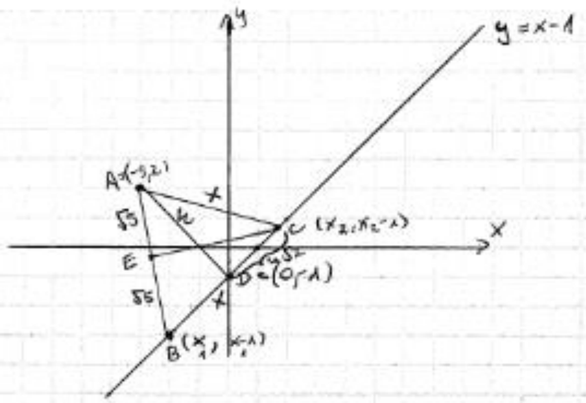
stąd $y_{B_1} = -2$ $y_{B_2} = 0$

$y_{C_1} = 3$ $y_{C_2} = -5$

odp: $\begin{cases} B = (-1, -2) \\ C = (4, 3) \end{cases} \vee \begin{cases} B = (1, 0) \\ C = (-4, -5) \end{cases}$

Inny sposób rozwiązania zadania 14., na który zdecydował się mały odsetek zdających, polegał na wyznaczeniu równania wysokości AD trójkąta opuszczonej na bok BC, obliczeniu jej długości i współrzędnych punktu D, następnie wykorzystaniu informacji o polu trójkąta w celu obliczenia długości ramienia BC. Dalej na skorzystaniu z równoramienności trójkąta ABC i zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa do trójkąta prostokątnego ADC, co prowadziło do obliczenia współrzędnych wierzchołka C. Ostatnim etapem rozwiązania było rozważenie odpowiednich dwóch przypadków: gdy punkt D leży na boku BC oraz sytuacji, gdy punkt D nie leży na boku BC, i obliczenie współrzędnych wierzchołka B. Stosując ten sposób, zdający często nie potrafili określić przypadków, które należy rozważyć (Przykłady 20R i 21R.).

Przykład 20R.



P=15

$|BC| \in y=x-1$

odległość A od prostej $0=x-y-1$ ~~prostej~~ jest wysokością ΔABC

$h=\frac{|1\cdot(-3)-2-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$D=\frac{x_1+x_2}{2}$

$-1=\frac{x_1-1+x_2-1}{2}$

$\cancel{P=\frac{1}{2}h\cdot|BC| = \frac{1}{2}3\sqrt{2}|BC|}$

$\cancel{\frac{3\sqrt{2}}{4}|BC|}$

Niech $|BC|=x$ wtedy $|AC|=x$, $x>0$

$P=15$

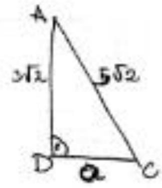
$P=\frac{1}{2}\cdot h\cdot x$

$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}x=15$

$3\sqrt{2}x=30$

$x=\frac{\cancel{30}^{10}}{\cancel{3}\sqrt{2}}$

$x=\frac{10\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$



$18 + a^2 = 50$
$a^2 = 32$, $a > 0$
$a = 4\sqrt{2}$

p. - prosta $\perp$ $y = x - 1$ i $A \in p$

p: $y = -x + b$ $\wedge$ $A = (-3, 2) \in p$, stąd
$2 = 3 + b$
$b = -1$

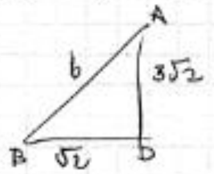
p: ~~$y = -x + b$~~ $y = -x - 1$

$\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$
$\begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$

$D = (0, -1)$

[illegible]

$BD = x - a = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \sqrt{2}$



$b^2 = 2 + 18$, $b > 0$
$b^2 = 20$
$b = \sqrt{20}$
$b = 2\sqrt{5}$

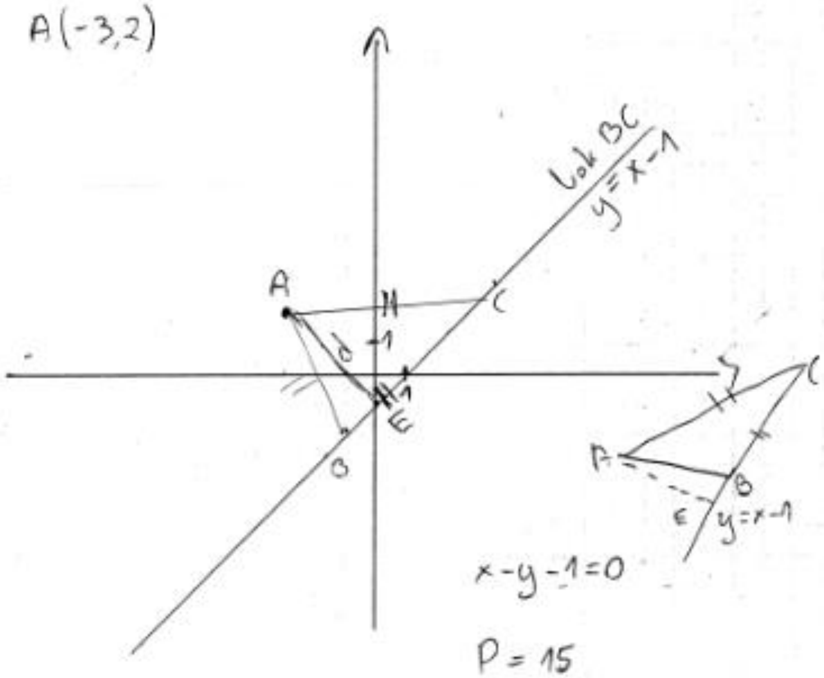
[illegible] $\vec{AB} =$

$B = (-2, -3)$
$C = (2, 1)$

odp: $B = (-2, -3)$, $C = (2, 1)$

Przykład 21R.

$A(-3,2)$



$x-y-1=0$

$P=15$

$$d=\frac{|1\cdot(-3)+(-1)\cdot 2-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|-3-2-1|}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

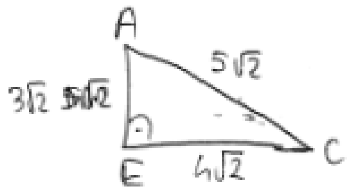
$$15=\frac{|BC|\cdot 3\sqrt{2}}{2}$$

$$30=|BC|\cdot 3\sqrt{2}$$

$$10=|BC|\sqrt{2}$$

$$\frac{10\sqrt{2}}{2}=|BC|$$

$$|BC|=5\sqrt{2}$$



$50 - 18 = 32$

$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

prosta prostopadła do $y = x - 1$

$y_1 = -x + b$

$A(-3,2)$

$2 = 3 + b$

$b = -1$

$y_1 = -x - 1$

$y = x - 1$

$-x - 1 = x - 1$

$-2x = 0$

$x = 0$

$y = (-1)$

$E(0,-1)$

$|EC| = 4\sqrt{2}$

$C(x, x-1)$

$B(x_2, x_2 - 1)$

$4\sqrt{2} = \sqrt{(x-0)^2 + (x-1+1)^2}$

$4\sqrt{2} = \sqrt{x^2 + x^2}$

$4\sqrt{2} = \sqrt{2x^2}$

$4\sqrt{2} = x\sqrt{2}$

$x = 4$

$y = 4 - 1 = 3$ $\quad C(4,3)$

$5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$|EB| = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} = \sqrt{(x_2 - 0)^2 + (x_2 - 1 + 1)^2} = \sqrt{x_2^2 + x_2^2}$

$\sqrt{2} = x_2\sqrt{2}$

$x_2 = 1$ $\quad y_2 = x_2 - 1 = 0$ $\quad B(1,0)$

Odp. Współrzędne to $B(1,0)$ oraz $C(4,3)$

Wnioski i rekomendacje

1. Egzamin maturalny z matematyki na **poziomie podstawowym** potwierdził, że tegorocznym maturzystom nie sprawiają trudności zadania sprawdzające pojedyncze i nieskomplikowane umiejętności, wymagające wykonania jednej lub dwóch prostych i standardowych czynności.
2. Najlepsze wyniki zdający uzyskali w zadaniach zamkniętych, które sprawdzały umiejętności: obliczania pól i obwodów trójkątów […], wyznaczania średniej arytmetycznej zestawu danych oraz wyznaczania wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym.
3. Względnie wysoki był również odsetek zdających, którzy wykazali się umiejętnością badania prostopadłości prostych na podstawie ich równań kierunkowych oraz stosowania wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego. Tym samym potwierdza się teza, że zdający osiągają bardzo dobre wyniki w zadaniach krótkich, wymagających np. zastosowania tylko wzorów.
4. Podobnie jak w latach ubiegłych maturzyści lepiej radzą sobie z rozwiązaniem zadań, w których należy wykorzystać znany algorytm, niż z zadaniami wymagającymi zaplanowania strategii rozwiązania, modelowania matematycznego czy uzasadnieniem postawionej tezy. Umiejętności z obszaru *Rozumowanie i argumentacja* oraz *Modelowanie matematyczne* okazały się najtrudniejszymi zadaniami na **poziomie podstawowym** (zadania polegające na: przeprowadzeniu przekształcenia algebraicznego z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia oraz wyznaczeniu wzoru funkcji kwadratowej na podstawie informacji o funkcji i jej wykresie). Na poziomie podstawowym najwięcej trudności na egzaminie z matematyki sprawiają maturzystom zadania wymagające uzasadnienia prawdziwości tezy. Zadania wymagające przeprowadzenia rozumowania i przytoczenia poprawnej argumentacji są znacznie częściej od innych pomijane, a wśród tych zdających, którzy podejmują próbę ich rozwiązania, jest niemała grupa wnioskujących o prawdziwości tezy na podstawie sprawdzenia poprawności dla kilku wybranych wartości liczbowych. Często też zdający pomijają istotną część rozumowania lub nie podają jakiegokolwiek komentarza w kluczowych miejscach przedstawianego uzasadnienia. W zadaniach, w których zdający powinien wykazać się umiejętnością dobierania modelu, często albo brak znajomości i rozumienia pojęć związanych z problemem, albo błędna interpretacja informacji skutkuje brakiem sukcesu w rozwiązaniu tego typu zadań.
5. Na względnie niski wynik egzaminu maturalnego z matematyki najczęściej znacząco wpływa brak sprawności rachunkowej oraz problemy z poprawnym wykonywaniem obliczeń rachunkowych. W rozwiązaniach zadań otwartych błędy rachunkowe są popełniane przez zdających na każdym etapie rozwiązania, a te z nich, które dotyczą początkowej fazy rozwiązania zadania, nierzadko w sposób istotny utrudniają lub wręcz uniemożliwiają dokończenie rozwiązania albo doprowadzają do otrzymania wyników niespełniających warunków zadania. Nierzadko błędy zdarzają się już na etapie przepisywania z treści zadania. Zdający często nie doprowadzają rozwiązania do momentu, który umożliwiłby rozstrzygnięcie, czy opanowali sprawdzane umiejętności potrzebne do prawidłowego rozwiązania zadania. Wielu maturzystów często nie potrafi właściwie zinterpretować uzyskanych wyników, ujawniając brak zrozumienia pojęć i funkcjonalnego operowania obiektami matematycznymi, a nierzadko wręcz nieznajomość własności obiektów matematycznych. Trudności w wykonywaniu obliczeń

rachunkowych oraz przekształcaniu wyrażeń algebraicznych sygnalizują konieczność zwrócenia uwagi w trakcie nauki na staranne ich wykonywanie i doskonalenie tych umiejętności. Sprawność rachunkowa jest ważna na każdym etapie edukacyjnym, a trzeba podkreślić, że wiele popełnianych błędów to efekt niewłaściwego opanowania przez zdających treści nauczania w szkole podstawowej czy w gimnazjum. Nieodłącznym elementem rozwiązania każdego zadania jest także weryfikowanie poprawności otrzymanego wyniku, a w przypadku wyników sprzecznych z treścią zadania – wskazywanie tych niezgodności, by kształtować u uczniów umiejętność określania obiektów matematycznych wyznaczonych przez konkretne wartości liczbowe lub umiejętność wykazywania braku istnienia obiektów, które są konsekwencją uzyskanych wyników. Ten aspekt był istotny m. in. w zadaniu dotyczącym wyznaczania wzoru funkcji kwadratowej, w którym część zdających wymyślała wartości niektórych współczynników i obliczała na ich podstawie pozostałe, albo otrzymywała dodatni współczynnik a we wzorze funkcji kwadratowej i nie dostrzegała sprzeczności takiego wyniku w odniesieniu do warunków zadania, z których wyraźnie wynikało, że ramiona paraboli są skierowane w dół.

6. Tegoroczny egzamin ujawnił relatywnie niski poziom opanowania przez zdających umiejętności rozumienia tekstu matematycznego. Potwierdzeniem tej tezy są podejmowane nieudane próby rozwiązania zadań, w których już w początkowej fazie tworzenia strategii rozwiązania zdający przystępują do rozważania sytuacji odmiennych od tych wynikających z treści zadań, np. w zadaniu z planimetrii. W trakcie procesu kształcenia nauczyciele powinni nadać duże znaczenie początkowej fazie rozwiązania zadania, tj. precyzyjnemu ustaleniu istoty rozwiązywanego problemu i rozumieniu opisanej sytuacji, a także zwracać uwagę na to, że pozornie drobna zmiana w treści zadania wymaga zastosowania zupełnie innego rozumowania. Należy ćwiczyć z uczniami rozwiązywanie zadań różnymi sposobami, ukazując tym samym rozmaitość strategii rozwiązywania problemów matematycznych.
7. W nauczaniu geometrii na poziomie podstawowym i rozszerzonym należy zwrócić szczególną uwagę na poprawną interpretację treści zadań i rozważanie właściwych figur geometrycznych oraz ich elementów i nieprzyjmowaniu szczególnych założeń, o ile nie wskazano ich w treści zadania. Należy uświadomić uczniom, że przyjęcie dodatkowego, nie wynikającego z treści zadania założenia o obiekcie matematycznym, prowadzi często do rozwiązywania istotnie innego problemu, czasami jest jego znacznym ułatwieniem, a nierzadko dotyczy obiektów nieistniejących. Przegląd rozwiązań zdających prowadzi do wniosku, aby w procesie rozwiązywania zadań z geometrii doskonalić umiejętność wnikliwej analizy zadania, funkcjonalnego operowania pojęciami i obiektami matematycznymi, jak również doboru adekwatnej strategii rozwiązania wynikającej wprost z treści zadania.
8. Egzamin maturalny na poziomie rozszerzonym ponownie potwierdził, że zdający mają duże problemy z rozwiązywaniem zadań z geometrii typu „wykaż, że”. Niestety wykazanie prawdziwości tezy zadania bywa „realizowane” przez niektórych maturzystów poprzez wykazanie prawdziwości tezy dla kilku wybranych wartości liczbowych.
9. Zdający w zadaniach, do których rozwiązania potrzebna jest odpowiednia strategia, osiągają słabe wyniki. Wskazane jest zatem, aby przedstawiać uczniom różne sposoby rozwiązania danego problemu i motywować ich do samodzielnego tworzenia odpowiednich strategii rozwiązania zadania.