CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Sprawozdanie za rok 2021**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy** **Poziom rozszerzony**
Termin egzaminu:	5 maja 2021 r. – poziom podstawowy 11 maja 2021 r. – poziom rozszerzony
Data publikacji dokumentu:	17 września 2021 r.

Opracowanie
Ewa Ludwikowska (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku)
Joanna Berner (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie)
Mariusz Mroczek (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Hubert Rauch (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Redakcja
dr Wioletta Kozak (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Opracowanie techniczne
Andrzej Kaptur (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Współpraca
Beata Dobrosielska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Agata Wiśniewska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Pracownie ds. Analiz Wyników Egzaminacyjnych okręgowych komisji egzaminacyjnych

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. 22 536 65 00, fax 22 536 65 04
e-mail: sekretariat@cke.gov.pl
www.cke.gov.pl

Spis treści

Poziom podstawowy. Opis arkusza egzaminu maturalnego

W roku 2021 egzamin maturalny z matematyki był przeprowadzony na podstawie wymagań egzaminacyjnych określonych w załączniku nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji i Nauki z dnia 16 grudnia 2020 r.[1]

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie podstawowym składał się z 28 zadań zamkniętych wyboru wielokrotnego z jedną poprawną odpowiedzią oraz 7 zadań otwartych, w tym 6 krótkiej odpowiedzi i 1 rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności opisane w pięciu obszarach wymagań egzaminacyjnych określonych dla egzaminu maturalnego w roku szkolnym 2020/2021:

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji (dwa zadania zamknięte).
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (osiemnaście zadań zamkniętych i dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi).
III. Modelowanie matematyczne (pięć zadań zamkniętych, dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi).
IV. Użycie i tworzenie strategii (trzy zadania zamknięte, jedno zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi, jedno zadanie otwarte rozszerzonej odpowiedzi).
V. Rozumowanie i argumentacja (jedno zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi).

Zdający mogli korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych,* cyrkla, linijki oraz kalkulatora prostego. Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 45 punktów.

Poziom podstawowy. Dane dotyczące populacji zdających

TABELA 1. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZU STANDARDOWYM*

Liczba zdających		**274 141**
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	167 989
	z techników	106 152
	ze szkół na wsi	9 066
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	49 786
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	99 754
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	115 535
	ze szkół publicznych	248 076
	ze szkół niepublicznych	26 065
	kobiety	148 108
	mężczyźni	126 033
	bez dysleksji rozwojowej	244 908
	z dysleksją rozwojową	29 233

* Dane w tabeli dotyczą tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 98 osób − laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

[1] Załącznik nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 20 marca 2020 r. w sprawie szczegółowych rozwiązań w okresie czasowego ograniczenia funkcjonowania jednostek systemu oświaty w związku z zapobieganiem, przeciwdziałaniem i zwalczaniem COVID-19 (Dz.U. poz. 493, z późn. zm.).

TABELA 2. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZACH DOSTOSOWANYCH

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	1 139
	słabowidzący	375
	niewidomi	20
	słabosłyszący	446
	niesłyszący	113
	z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym	80
	Ogółem	**2 173**

Poziom podstawowy. Przebieg egzaminu

TABELA 3. INFORMACJE DOTYCZĄCE PRZEBIEGU EGZAMINU

Termin egzaminu			5 maja 2021
Czas trwania egzaminu dla arkusza standardowego			170 minut
Liczba szkół			4 879
Liczba zespołów egzaminatorów			314
Liczba egzaminatorów			6 149
Liczba obserwatorów[2] (§ 8 ust. 1)			149
Liczba unieważnień[3]	w przypadku:		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	3
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	15
	art. 44zzv pkt 3	zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu	0
	art. 44zzw ust. 1	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	37
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego	2
	art. 44zzy ust. 10	niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)	0
Liczba wglądów[3] (art. 44zzz)			4301

[2] Na podstawie rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 21 grudnia 2016 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu przeprowadzania egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2016 r. poz. 2223, ze zm.).
[3] Na podstawie ustawy z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz.U. z 2020 r. poz. 1327, ze zm.).

Poziom podstawowy. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających

WYKRES 1. ROZKŁAD WYNIKÓW ZDAJĄCYCH

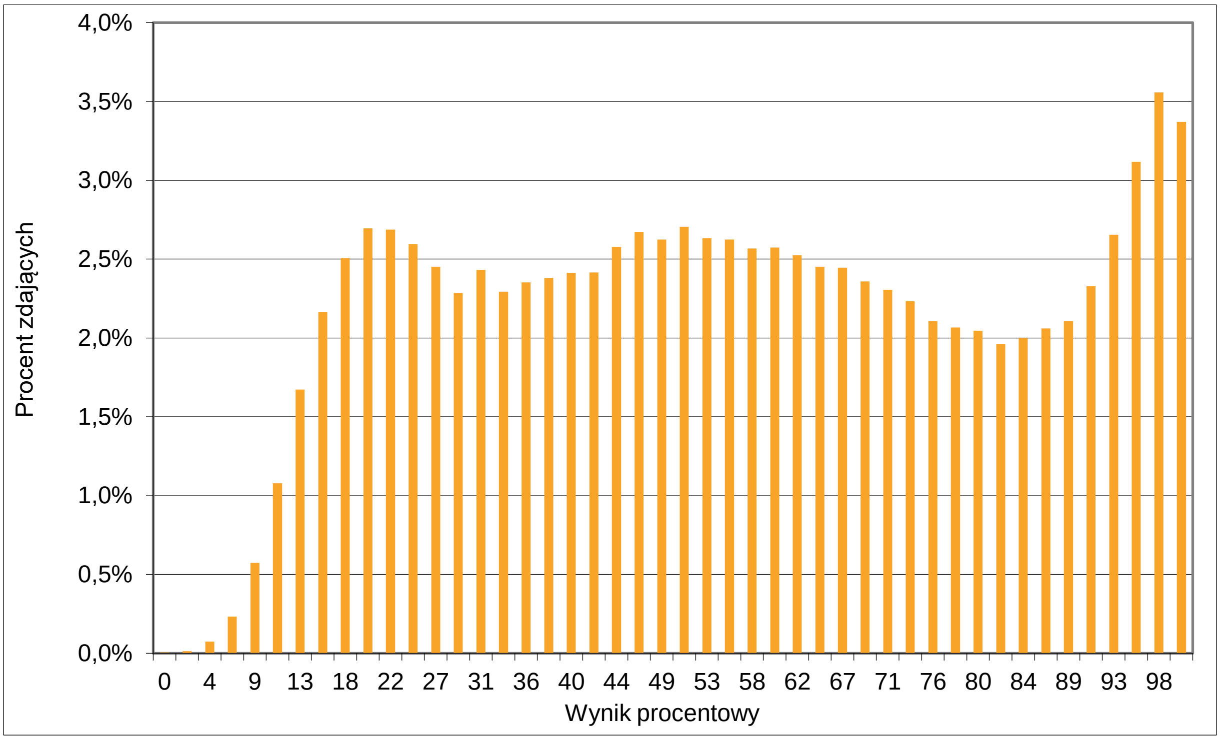


TABELA 4. WYNIKI ZDAJĄCYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)	Odsetek sukcesów (%)
ogółem	**274 141**	**0**	**100**	**56**	**98**	**56**	**27**	**74**
w tym:								
z liceów ogólnokształcących	167 989	0	100	64	98	62	27	81
z techników	106 152	0	100	44	22	47	24	64

* Dane dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów. Parametry statystyczne są podane dla grup liczących 30 lub więcej zdających.

Poziom wykonania zadań

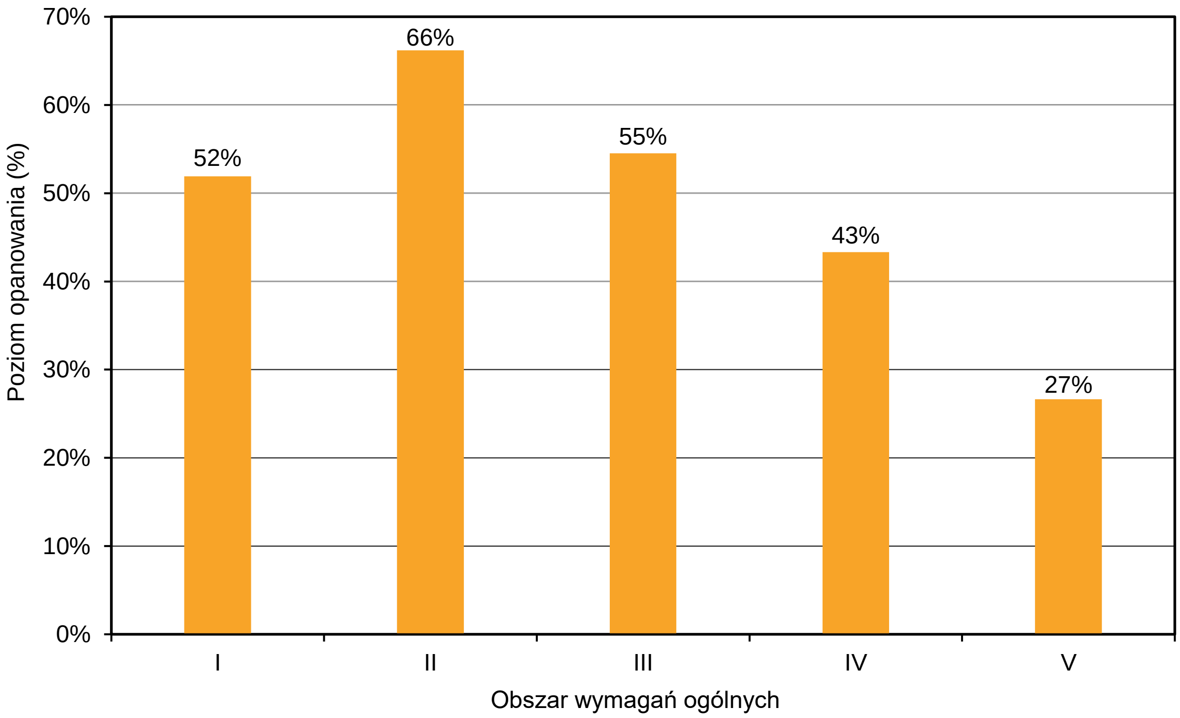
TABELA 5. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ

Wymagania egzaminacyjne 2021			
Nr zad.	**Wymagania ogólne**	**Wymagania szczegółowe** *Gdy wymaganie szczegółowe dotyczy treści z III etapu edukacyjnego – dopisano „G”.*	**Poziom wykonania zadania (%)**
1.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych.	63
2.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.8) wykonuje obliczenia procentowe […].	93
3.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.7) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej.	67
4.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 1.6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu […] i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.	69
5.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 1.1) przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego […]).	49
6.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.	62
7.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe […]).	54
8.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.2) wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.	65
9.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.	76
10.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$; 4.2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu […].	57
11.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu […].	61

12.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji ([…] maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak […]).	52
13.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.4) stosuje wzór na n-ty wyraz […] ciągu geometrycznego.	74
14.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym.	61
15.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.	80
16.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 6.3) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi […].	65
17.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.2) korzysta z własności stycznej do okręgu.	68
18.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych […].	71
19.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G10.9) oblicza pola i obwody trójkątów […].	55
20.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G10.7) stosuje twierdzenie Pitagorasa.	79
21.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 7.1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.	46
22.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: G10.8) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i w trapezach.	77
23.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.4) rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą.	62
24.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G10.6) oblicza pole koła […].	61
25.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.6) oblicza odległość dwóch punktów.	43
26.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.2) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.	34

27.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania.	61
28.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: G9.3) wyznacza […] medianę zestawu danych.	77
29.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.	69
30.	V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: G6.4) dodaje i odejmuje sumy algebraiczne; G6.5) mnoży jednomiany, mnoży sumę algebraiczną przez jednomian oraz, w nietrudnych przypadkach, mnoży sumy algebraiczne.	27
31.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 4.6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji […].	35
32.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.7) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych […].	58
33.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów.	53
34.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.2) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.	64
35.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dane dwa punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); 8.3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt; 8.4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych; 8.6) oblicza odległość dwóch punktów.	29

WYKRES 2. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ W OBSZARZE WYMAGAŃ OGÓLNYCH



Poziom rozszerzony. Opis arkusza egzaminu maturalnego

W roku 2021 egzamin maturalny z matematyki był przeprowadzony na podstawie wymagań egzaminacyjnych określonych w załączniku nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji i Nauki z dnia 16 grudnia 2020 r.[4]

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie rozszerzonym zawierał 4 zadania zamknięte wielokrotnego wyboru, 11 zadań otwartych, w tym 7 zadań krótkiej i 4 zadania rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności opisane w pięciu obszarach wymagań ogólnych podstawy programowej z matematyki:

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji (jedno zadanie zamknięte).
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (jedno zadanie zamknięte i dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi).
III. Modelowanie matematyczne (jedno zadanie zamknięte, jedno zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi i dwa zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi).
IV. Użycie i tworzenie strategii (jedno zadanie zamknięte, dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi i dwa zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi).
V. Rozumowanie i argumentacja (dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi).

Zdający mogli korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych,* cyrkla, linijki oraz kalkulatora prostego. Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 50 punktów.

Poziom rozszerzony. Dane dotyczące populacji zdających

TABELA 6. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZU STANDARDOWYM*

Liczba zdających		**74 095**
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	47 734
	z techników	26 361
	ze szkół na wsi	1 059
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	10 803
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	27 026
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	35 207
	ze szkół publicznych	71 094
	ze szkół niepublicznych	3 001
	kobiety	29 735
	mężczyźni	44 360
	bez dysleksji rozwojowej	64 795
	z dysleksją rozwojową	9 300

* Dane w tabeli dotyczą tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 98 osób − laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

[4] Załącznik nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 20 marca 2020 r. w sprawie szczegółowych rozwiązań w okresie czasowego ograniczenia funkcjonowania jednostek systemu oświaty w związku z zapobieganiem, przeciwdziałaniem i zwalczaniem COVID-19 (Dz.U. poz. 493, z późn. zm.).

TABELA 7. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZACH DOSTOSOWANYCH

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	272
	słabowidzący	1
	niewidomi	0
	słabosłyszący	1
	niesłyszący	18
	z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym	6
	Ogółem	**298**

Poziom rozszerzony. Przebieg egzaminu

TABELA 8. INFORMACJE DOTYCZĄCE PRZEBIEGU EGZAMINU

Termin egzaminu			11 maja 2021
Czas trwania egzaminu dla arkusza standardowego			180 minut
Liczba szkół			3 476
Liczba zespołów egzaminatorów			314
Liczba egzaminatorów			6 149
Liczba obserwatorów[5] (§ 8 ust. 1)			35
Liczba unieważnień[6]	w przypadku:		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	0
	art. 44zzv pkt 3	zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu	0
	art. 44zzw ust. 1	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego	5
	art. 44zzy ust. 10	niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)	0
Liczba wglądów[6] (art. 44zzz)			1452

[5] Na podstawie rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 21 grudnia 2016 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu przeprowadzania egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2016 r. poz. 2223, ze zm.).
[6] Na podstawie ustawy z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz.U. z 2020 r. poz. 1327, ze zm.).

Poziom rozszerzony. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających

WYKRES 3. ROZKŁAD WYNIKÓW ZDAJĄCYCH

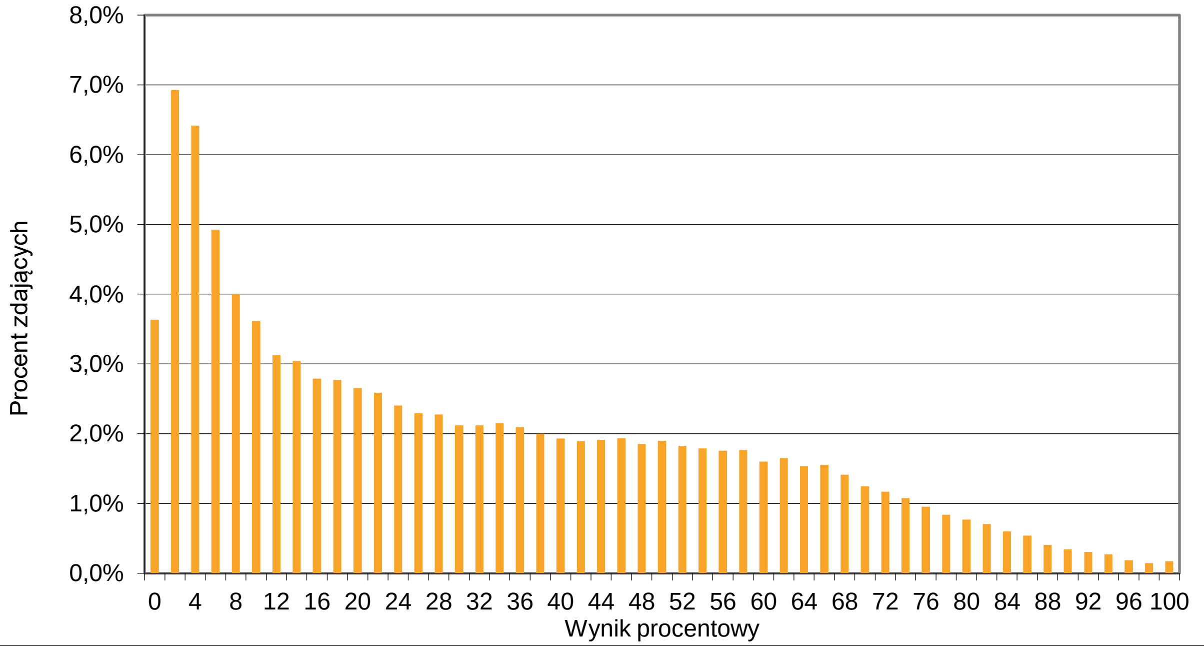


TABELA 9. WYNIKI ZDAJĄCYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
ogółem	**74 095**	**0**	**100**	**26**	**2**	**31**	**25**
w tym:							
z liceów ogólnokształcących	47 734	0	100	38	4	40	25
z techników	26 361	0	100	8	2	16	17

* Dane dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów. Parametry statystyczne są podane dla grup liczących 30 lub więcej zdających.

CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

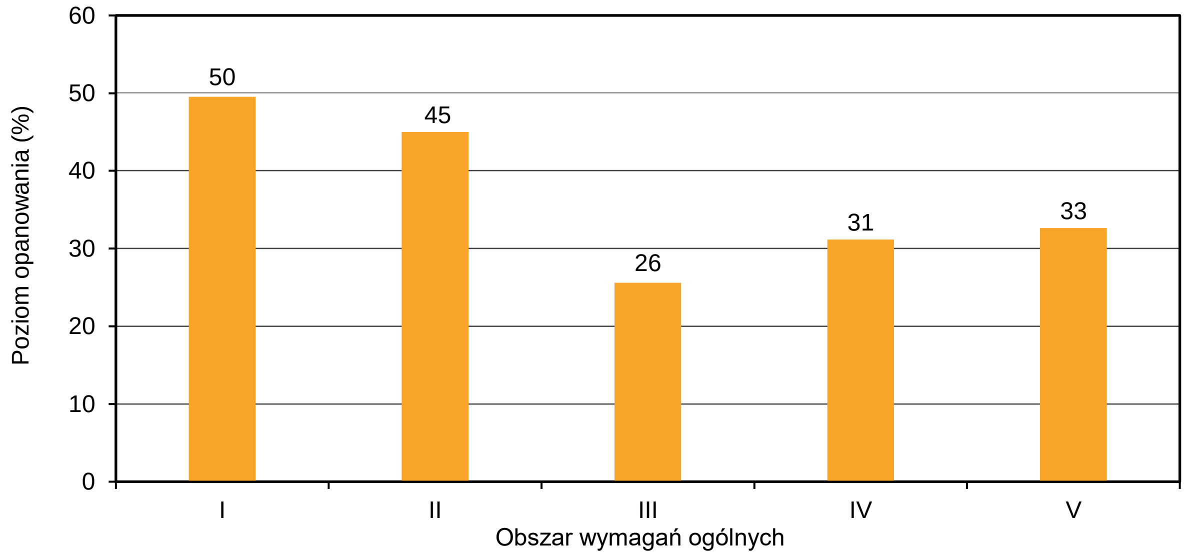
Poziom wykonania zadań

TABELA 10. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ

Wymagania egzaminacyjne 2021			
Nr zad.	**Wymagania ogólne**	**Wymagania szczegółowe**	**Poziom wykonania zadania (%)**
1.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: R6.2) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego).	50
2.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: R6.4) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych.	28
3.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R2.6) dzieli wyrażenia wymierne.	29
4.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R3.8) rozwiązuje równania […] z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym niż $\|\|x+1\|-2\| = 3,\ \|x+3\|+\|x-5\| > 12$.	37
5.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R5.1) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1/n$, $1/n^2$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.	67
6.	V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: R1.2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.	52
7.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: R3.7) rozwiązuje proste nierówności wymierne […].	36
8.	V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: G10.13) stosuje cechy przystawania trójkątów […]. R7.3) rozpoznaje figury podobne […].	14
9.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: R10.2) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe.	30
10.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: P8.1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej); R8.1) oblicza odległość punktu od prostej.	53
11.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R3.1) stosuje wzory Viète'a; R3.2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem;	35

		R3.7) rozwiązuje proste nierówności wymierne […].	
12.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R6.6) rozwiązuje równania trygonometryczne […].	17
13.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: R7.4) znajduje związki miarowe w figurach płaskich […].	20
14.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: P4.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie; R7.4) znajduje związki miarowe w figurach płaskich […].	19
15.	III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: R11.6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.	28

WYKRES 4. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ W OBSZARZE WYMAGAŃ OGÓLNYCH



Komentarz

Analiza jakościowa zadań – poziom podstawowy

Analiza wskaźników poziomu wykonania zadań z matury na poziomie podstawowym zamieszczonych w **Tabeli 5.** na stronach 8–10 pozwala sformułować wniosek, że maturzyści najlepiej opanowali umiejętności:

1. wykonywania obliczeń procentowych
2. stosowania wzoru na *n*-ty wyraz i na sumę *n*-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
3. stosowania twierdzenia Pitagorasa
4. wyznaczania średniej i mediany zestawu danych
5. korzystania z własności kątów i przekątnych w równoległobokach.

Najłatwiejszym zadaniem w arkuszu (poziom wykonania – 93%) okazało się zadanie 2., w którym należało obliczyć liczbę z danego jej procentu. Zdecydowana większość zdających nie ma problemu z wykonywaniem obliczeń procentowych.

Kolejnym zadaniem, którego rozwiązanie nie sprawiło zdającym problemów, było zadanie 15. (poziom wykonania – 80%). W zadaniu tym zdający musieli wyznaczyć czwarty wyraz ciągu arytmetycznego, znając sumę wyrazów trzeciego i piątego tego ciągu. Zdecydowana większość zdających poprawnie stosowała wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego, a nieliczni wykorzystywali związek między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Porównywalny wynik maturzyści osiągnęli w zadaniu 20. (poziom wykonania – 79%), w którym należało obliczyć długość jednego z boków trójkąta, mając daną długość drugiego boku i wiedząc, że wysokość trójkąta padająca na trzeci bok dzieli go na odcinki o określonych długościach. Zadanie wymagało umiejętności zastosowania twierdzenia Pitagorasa i nie sprawiło zdającym zbyt dużego kłopotu.

Niewiele niższy poziom wykonania (77%) odnotowano w zadaniu 22., w którym maturzyści, mając dany jeden z kątów równoległoboku, mieli policzyć, jaką miarę ma kąt między dwiema wysokościami opuszczonymi na sąsiednie boki tego równoległoboku. Do zadania dołączony był rysunek, dzięki któremu zbilansowanie kątów okazywało się prostą czynnością.

Taki sam poziom wykonania (77%) miało zadanie 28., w którym zdający, mając dany sześciowyrazowy niemalejący ciąg liczbowy i znając medianę wyrazów ciągu, musieli wyznaczyć niewiadomą użytą w opisie wyrazów tego ciągu.

Nietrudno zauważyć, że tegoroczni abiturienci na poziomie podstawowym, analogicznie do lat ubiegłych, najlepiej opanowali umiejętności stosowania pojęć oraz wykorzystywania elementarnych własności obiektów matematycznych w sytuacjach typowych. Zauważmy, że wymienione wyżej zadania, które zostały bezbłędnie rozwiązane przez blisko 80% i więcej zdających, są zadaniami jedno- lub dwuczynnościowymi. Zadania te nie mają szerszego kontekstu, a ich rozwiązanie nie wymaga wykonania dodatkowych czynności. Umiejętności sprawdzane tymi zadaniami zostały precyzyjnie opisane, a dodatkowo zadania geometryczne były opatrzone rysunkami. Do rozwiązania zadań wystarczyło znać podstawowe pojęcia matematyczne i najważniejsze własności rozważanych obiektów, zrozumieć nieskomplikowany tekst matematyczny, zastosować właściwy algorytm i wykonać elementarne rachunki.

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najsłabiej

Na **poziomie podstawowym** nadal największe trudności sprawiają maturzystom zadania polegające na przeprowadzeniu dowodu twierdzenia. W maju 2021 roku trudne dla maturzystów okazało się zadanie 30. Było to zadanie z obszaru *Rozumowanie i argumentacja*, w którego rozwiązaniu zdający mieli wykazać się opanowaniem umiejętności podawania matematycznych argumentów uzasadniających poprawność rozumowania.

W zadaniu 30. zdający osiągnęli poziom wykonania 27%. Przyczyną tak niskich wyników jest zarówno niski poziom opanowania umiejętności przeprowadzania i zapisywania prostego rozumowania składającego się z kilku kroków, brak umiejętności poprawnego przekształcania wyrażeń algebraicznych, jak również opuszczenia zadania typu „wykaż” przez część maturzystów. Zauważyć jednak trzeba, że w porównaniu do lat ubiegłych coraz większy odsetek zdających podejmuje się rozwiązania tego typu zadań, choć są także tacy, którzy sprawdzają prawdziwość tezy dla konkretnych wybranych wartości liczbowych spełniających założenia.

Przeanalizujmy zatem poprawne sposoby rozwiązań oraz błędy, jakie wystąpiły w tym zadaniu. Maturzyści zmierzyli się w nim z dowodem nierówności $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$, której prawdziwość należało uzasadnić dla każdych trzech dodatnich liczb rzeczywistych a, b i c takich, że $a < b$.
Najczęściej stosowanym sposobem dowodzenia było równoważne przekształcanie nierówności $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ do postaci, z której po zastosowaniu założenia $a < b$ można przeprowadzić bezpośrednie wnioskowanie prawdziwości tezy.
W przykładach 1. i 2. przedstawiono rozwiązania zdających, w których są prawidłowo przeprowadzone rozumowania.

Przykład 1.

Założenie:
$a, b, c \in \mathbb{R}^+$ *
$a < b$

Teza:
$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

Dowód

$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad |\cdot b$ *   Przekształcam nierówność równoważnie

$a < \frac{b(a+c)}{b+c} \quad |\cdot(b+c)$ * $b+c > 0$

$a(b+c) < b(a+c)$

$ab + ac < ba + bc$

$ab + ac - ba < bc$ $ab = ba$

$ac < bc$

Z założenia a jest mniejsze od b. Iloczyn liczby c
z liczbą a, czyli mniejszą od b jest oczywiście
mniejszy od iloczynu tej samej liczby c z
liczbą b.
Zatem nierówność z tezy jest prawdziwa,
co należało udowodnić.

Przykład 2.

z: $a, b, c > 0$ t: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$
$a < b$

d: Przekształcam tezę równoważnie.

$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad / \cdot b$, bo b z zał. $b > 0$

$a < \frac{b}{1} \cdot \frac{a+c}{b+c}$

$a < \frac{b(a+c)}{b+c} \quad / \cdot (b+c)$, bo z zał. $b > 0$, $c > 0$

$a(b+c) < b(a+c)$
$ab + ac < ba + bc$
$\cancel{ab - ab + ac - bc < 0}$
$\cancel{ac - bc < 0}$
$\cancel{c(a-b) < 0}$

$0 < \cancel{ab} - \cancel{ab} + bc - ac$
$0 < bc - ac$
$0 < \underbrace{c}_{>0} \underbrace{(b-a)}_{>0}$

bo c z zał. $c > 0$ bo $a, b > 0$ z zał. i $b > a$

Iloczyn dwóch liczb dodatnich da wynik dodatni. □.

Niestety część z piszących egzamin maturalny w 2021 roku przyjmowało założenia, które nie występowały w treści zadnia i na podstawie tych błędnych założeń wnioskowało o prawdziwości tezy. Tego typu błędy zawierają rozwiązania z przykładów 3. i 4.

Przykład 3.

$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ $\quad a < b \quad a \geq 0 \quad b \geq 0 \quad c \geq 0$

$\cancel{b(a+c) < a(b+c)}$

$\cancel{ab+cb < ab+ac}$

$\cancel{cb < ac \ /:c}$

$\cancel{b < a}$

$a(b+c) < b(a+c)$

$ab+ac < ab+bc$

$ac < bc \ /:c$

$a < b$

Przykład 4.

$\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} > 0 \quad /\cdot(b+c)$

$a+c - \left(\frac{ab+ac}{b}\right) > 0 \quad /\cdot b$

$\cancel{ab} + bc - \cancel{ab} - ac > 0$

$bc - ac > 0$

$c(b-a) > 0$

$\geq 0 \quad a < 0$

Wśród błędnych rozwiązań występowały również takie, w których wielu zdających wykonywało sprawdzanie prawdziwości nierówności jedynie dla konkretnych wartości liczb a, b i c (przykłady 5.–7.).

Przykład 5.

zał.
$b + c \neq 0$
Przyjmijmy, że $a=1$ $b=2$ ~~więc~~ więc
$a<b$ a $c=3$ wychodzi z tego, że:
$\frac{1}{2} < \frac{4}{5}$, $\frac{5}{10} < \frac{8}{10}$ ← otrzymana nierówność
po rozszerzeniu ułamka. Możemy
dać ~~konkretne~~ ~~liczby~~ dowolne liczby
dodatnie by równanie było spełnione.
Możemy zawsze poprzeć to tym że $c>a$,
$c>b$, więc niemożliwym jest by
równanie nie zostało spełnione,
ponieważ c występuje tylko po prawej stronie.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	29.	30.
	Maks. liczba pkt	2	2
	Uzyskana liczba pkt		

Przykład 6.

$a<b$

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

$a=1$ $b=2$ $c=3$

$$\frac{1}{2} < \frac{1+3}{2+3}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{4}{5}$$

Przykład 7.

$a=1 \quad b=2 \quad c=3 \qquad \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$

$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \;|\cdot b \qquad a = \frac{ab+ac}{b+c} \;|\cdot(b+c)$

$ab+ac = ab+ac$

$1=1 \qquad$ c.n.u

Zgodnie z przyjętymi zasadami, zamieszczanymi corocznie w *Zasadach oceniania rozwiązań zadań*, publikowanych na stronie https://cke.gov.pl/, za rozwiązania, w których zdający sprawdza prawdziwość tezy jedynie dla wybranych wartości liczbowych przyznaje się 0 pkt.

Niemała część zdających nie potrafiła przekształcić równoważnie danej nierówności do postaci, z której można w łatwy sposób wnioskować o prawdziwości tezy i zaczynała wnioskować z takiej postaci, z której nie da się tezy uzasadnić (przykłady 8. oraz 9.) albo swojego rozumowania nie doprowadzała do końca. Niektórzy zdający rozpoczynali wnioskowanie o prawdziwości tezy z otrzymanej nierówności, która wcale nie była oczywista (przykłady 10. i 11.).

Przykład 8.

$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \;/\cdot b$

$a < \frac{ab+bc}{b+c} \;/\cdot(b+c)$

$a(b+c) < ab+bc$

$\cancel{ab+ac < ab+bc \;/-ab}$

$\cancel{ac < bc \;/:c}$

$ab+ac < ab+bc$

$a(b+c) < b(a+c)$

$a(b+c) < b(a+c) \qquad a<b \qquad a,b,c>0$

nierówność prawdziwa

Przykład 9.

$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

$b+c > a+c$

Jeżeli do mianownika i licznika dowolnego ułamka ~~składającego się z dwóch~~ którego to liczby liczby naturalne dodamy taką samą liczbę naturalną, to wartość tego ułamka zawsze będzie większa, niż przed wykonaniem tej operacji, stąd:

do mianownika i licznika ułamka $\frac{a}{b}$ dodajemy $c \Rightarrow \frac{a+c}{b+c}$, a

z powyższego twierdzenia

$\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$ ~~co zgodne jest z $\frac{a}{b}$~~

co oznacza to samo co $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

Przykład 10.

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

$$a \cdot (b+c) < b \cdot (a+c)$$

$$ab + ac < ab + bc \quad / - ab$$

$$ac < bc$$

Przykład 11.

$$\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} > 0 \quad / \cdot (b+c)$$

$$a+c - \left(\frac{ab+ac}{b}\right) > 0 \quad / \cdot b$$

$$\cancel{ab} + bc - \cancel{ab} - ac > 0$$

$$bc - ac > 0$$

Często zdający, prowadząc przekształcenia tezy do postaci równoważnej, popełniali błędy merytoryczne (przykłady 12.–15.).

Przykład 12.

$a < b$

$a - b < 0$

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad / \cdot b$$

$$a = \frac{ab+bc}{b+c} \quad / \cdot (b+c)$$

$$ab + ac = ab + bc \quad / - ab$$

$$ac = bc \quad / - bc$$

$$ac - bc = 0$$

$$c(a-b) = 0$$

$$c = 0 \quad \vee \quad \underline{a - b = 0}$$

Przykład 13.

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

$a > 0$

$b > 0$

$c > 0$

$$\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b} \quad / - \frac{a}{b}$$

$$\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} > 0$$

$$b \cdot \left(\frac{a+c}{b+c}\right) - (b+c)\frac{a}{b} > 0$$

$$\frac{ab+bc}{bb+bc} - \frac{ab+ac}{bb+bc} > 0$$

$$\frac{\cancel{ab} + bc - \cancel{ab} + ac}{bb+bc} > 0$$

$$\frac{bc+ac}{bb+bc} > 0$$

$bc > 0 \quad ac > 0$

$bb > 0 \quad bc > 0$

Przykład 14.

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$$

$$b(a+c) < a(b+c)$$

$$ba + bc < ab + ac$$

$$\cancel{ab} + bc < \cancel{ab} + ac$$

$$bc < ac$$

$$bc - ac < 0$$

$$-ac < -bc$$

$$-a < -b$$

$$a < b$$ → liczba a jest ~~ctj~~ mniejsza od liczby b.

Przykład 15.

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} = 1$$

$$\frac{a}{b} < \frac{a}{b} + 1$$ — KAŻDA LICZBA DODATNIA JEST MNIEJSZA OD NIEJ SAMEJ POWIĘKSZONEJ O 1.

Wśród dowodów pojawiały się błędne metody, np. błędne wnioskowanie z faktu, że każda ze stron danej nierówności jest mniejsza od 1 (przykład 16.).

Przykład 16.

$a < b \Rightarrow \frac{a}{b} < 1$ niech $\frac{a}{b} = m$

dzielę licznik i mianownik przez b

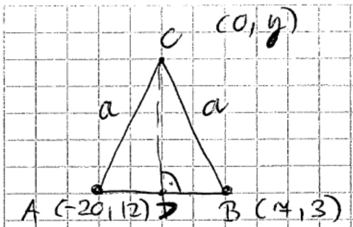
$$\frac{a+c}{b+c} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{b}}{\frac{b}{b} + \frac{c}{b}} = \frac{m + \frac{c}{b}}{1 + \frac{c}{b}} < 1$$

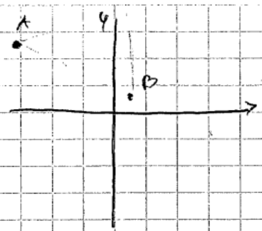
bo licznik jest mniejszy od mianownika

Nie mniejszy problem zdającym sprawiło zadanie 35. Było to zadanie z obszaru *Użycie i tworzenie strategii,* w którego rozwiązaniu zdający mieli wykazać się opanowaniem umiejętności z zakresu geometrii analitycznej, m.in. umiejętnością wyznaczania równania prostej przechodzącej przez dwa punkty, prostej prostopadłej do danej prostej, znajdowania punktów przecięcia dwóch prostych, obliczania długości odcinka i obwodu trójkąta, a także obliczania odległości punktu od prostej.

W zadaniu 35. zdający osiągnęli poziom wykonania 29%. Przyczyną tak niskich wyników jest niski poziom opanowania umiejętności z zakresu geometrii na płaszczyźnie kartezjańskiej, jak i brak umiejętności tworzenia strategii rozwiązania przez zdającego, co jest szczególnie istotne właśnie podczas rozwiązywania zadań rozszerzonej odpowiedzi, gdzie należy użyć (łącząc w spójną, logicznie uporządkowaną całość) kilka pojedynczych umiejętności. Przyczyn niepowodzeń zdających w takich zadaniach należy również po części upatrywać w braku umiejętności czytania treści zadania ze zrozumieniem i poprawnej jej interpretacji, których to opanowanie umożliwia stworzenie całościowej koncepcji rozwiązania. Najczęstszym sposobem rozwiązania zadania 35. było wyznaczenie równania symetralnej odcinka AB, skorzystanie z faktu, że wierzchołek C leży na osi Oy oraz na symetralnej i wyznaczenie jego współrzędnych. Następnie obliczano długości boków trójkąta ABC oraz jego obwód. Oto przykład prawidłowego rozwiązania zdającego (przykład 17.).

Przykład 17.





pr. AB

$y = ax + b$

$\begin{cases} 12 = -20a + b \quad |\cdot(-1) \\ 3 = 7a + b \end{cases}$

$\begin{cases} -12 = 20a \cancel{-b} \\ 3 = 7a \cancel{+b} \end{cases}$

$-9 = 27a \quad | : 27$

$\frac{-9}{27} = a$

$-\frac{1}{3} = a$

$a_1 = \frac{-9}{27} = -\frac{1}{3}$

$3 = 7 \cdot -\frac{1}{3} + b$

$3 = -\frac{7}{3} + b$

$3 + \frac{7}{3} = b$

$3 + 2\frac{1}{3} = b$

$5\frac{1}{3} = b$

$y = -\frac{1}{3}x + 5\frac{1}{3} \quad \perp$ pr. CD $\quad a_2 = 3$

$D = \left(\frac{-20+7}{2}, \frac{12+3}{2}\right)$

$D = \left(-\frac{13}{2}, \frac{15}{2}\right)$

$\frac{15}{2} = -\frac{13}{2} \cdot \frac{3}{1} + b$

$\frac{15}{2} = -\frac{39}{2} + b$

$\frac{15 + 39}{2} = b$

$27 = b$

$y = 3x + 27$

$C(0, y) \quad y = 3 \cdot 0 + 27$

$y = 27$

$C = (0, 27)$

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{729 + 81} = \sqrt{810}$$

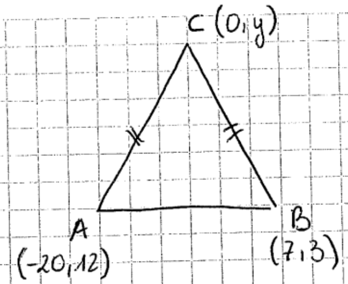
$$|AC| = \sqrt{400 + 225} = \sqrt{625} = 25$$

$$|BC| = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25$$

$$Obw_{\triangle} = 25 + 25 + 9\sqrt{10} = 50 + 9\sqrt{10}$$

Innym sposobem rozwiązania zadania było skorzystanie z faktu, że wierzchołek C trójkąta równoramiennego ABC leży na osi Oy, obliczenie jego współrzędnych przez porównanie długości ramion AC i BC, a następnie obliczenie długości boków trójkąta i jego obwodu (przykład 18.).

Przykład 18.



$$|AC| = |BC|$$

$$|AC| = \sqrt{(0+20)^2 + (y-12)^2} = \sqrt{400 + y^2 - 24y + 144} = \sqrt{y^2 - 24y + 544}$$

$$|BC| = \sqrt{(0-7)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{49 + y^2 - 6y + 9} = \sqrt{y^2 - 6y + 58}$$

$$|AC| = |BC|$$

$$\sqrt{y^2 - 24y + 544} = \sqrt{y^2 - 6y + 58}$$

$$y^2 - 24y + 544 = y^2 - 6y + 58$$

$$\cancel{-24y + 6y - 544 + 58}$$

$$-24y + 6y = 58 - 544$$

$$-18y = -486$$

$$y = 27$$

$$C = (0, 27)$$

$$|AC| = \sqrt{729 - 648 + 544} = \sqrt{625} = 25$$

$$|BC| = \sqrt{729 - 162 + 58} = \sqrt{625} = 25$$

$$|AB| = \sqrt{(7+20)^2 + (3-12)^2} = \sqrt{27^2 + (-9)^2} = \sqrt{729 + 81} = \sqrt{810} = \sqrt{81 \cdot 10} = 9\sqrt{10}$$

$$Obw = 25 + 25 + 9\sqrt{10} = 50 + 9\sqrt{10}$$

Kolejnym sposobem prezentowanym przez zdających było wykorzystanie własności wektorów (przykład 19.).

Przykład 19.

$A=(-20,12)$

$B=(7,3)$

$|AC|=|BC|$

$\triangle ABC \Rightarrow$ równoramienny

$C \in Oy$

$C=?$, $Obw=?$

$C(0,y_c)$ lub $C(0,-y_c)$

$\downarrow$

$|AC|=|BC|$

$\overrightarrow{AC}=[0+20,\ y_c-12]$

$\overrightarrow{AC}=[20,\ y_c-12]$

$\overrightarrow{AB}=[7+20,\ 3-12]$

$\overrightarrow{AB}=[27,\ -9]$

$|AB|=\sqrt{27^2+9^2}=\sqrt{729+81}=\sqrt{810}$

$=9\sqrt{10}$

$\overrightarrow{BC}=[0-7,\ y_c-3]$

$\overrightarrow{BC}=[-7,\ y_c-3]$

$|AC|=\sqrt{20^2+(y_c-12)^2}$

$|AC|=\sqrt{400+y_c^2-24y_c+144}$

$|AC|=\sqrt{y_c^2-24y_c+544}$

$|BC|=\sqrt{(-7)^2+(y_c-3)^2}$

$|BC|=\sqrt{49+y_c^2-6y_c+9}$

$|BC|=\sqrt{y_c^2-6y_c+58}$

$|AC|=|BC|$

$\sqrt{y_c^2-24y_c+544}=\sqrt{y_c^2-6y_c+58} \quad /^2$

$\cancel{y_c^2}-24y_c+544=\cancel{y_c^2}-6y_c+58$

$-18y_c=-486$

$y_c=27$

$C(0,27)$

$Obw.=9\sqrt{10}+2\cdot 25=50+9\sqrt{10}$

Błędne rozwiązania zadania 35. wynikały z braku znajomości położenia punktów w układzie kartezjańskim i mylenia przez zdających kolejności współrzędnych wierzchołka C (przykład 20.).

Przykład 20.

$|AC| = |BC| \qquad C = (x_c ; 0)$

$|AC| = \sqrt{(x_c+20)^2 + (0-12)^2}$

$|BC| = \sqrt{(x_c-7)^2 + (0-3)^2}$

$\sqrt{(x_c+20)^2 + (0-12)^2} = \sqrt{(x_c-7)^2 + (0-3)^2}$

$(x_c+20)^2 + 144 = (x_c-7)^2 + 9$

$x_c^2 + 40x_c + 400 + 144 = x_c^2 - 14x_c + 49 + 9$

$40x_c + 544 = -14x_c + 58$

$54x_c = -486$

$x_c = -9$

$C = (-9 ; 0)$

$\cancel{+ABC \Rightarrow}$ $Obw_\Delta = |AC| + |BC| + |AB|$

$|AC| = \sqrt{(-9+20)^2 + (0-12)^2}$

$|AC| = \cancel{(121 + 144)} \sqrt{11^2 + 144}$

$|AC| = \sqrt{265} \qquad |AC| = |BC|$

$|BC| = \sqrt{265}$

$|AB| = \sqrt{(7+20)^2 + (3-12)^2}$

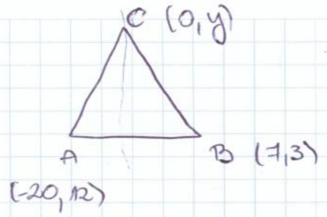
$|AB| = \sqrt{729 + 81}$

$|AB| = \sqrt{810}$

$Obw_{\Delta ABC} = 2\sqrt{265} + \sqrt{810} = 2\sqrt{265} + 3\sqrt{90}$

Część zdających nie ustrzegła się błędów rachunkowych (przykłady 21. i 22.).

Przykład 21.



$$\begin{cases}12=-20a+b\\ y=0a+b \;/\cdot -1\end{cases}$$

$$\begin{cases}3=7a+b\\ y=0a+b\end{cases}$$

$$\begin{cases}12=-20a+b\\ -y=-0a-b\end{cases}$$

$$3-y=7a$$

$$12-y=-20a$$

$$y=3-7a \rightarrow \text{równanie prostej BC}$$

$$y=20a+12 \rightarrow \text{równanie prostej AC}$$

$$\begin{cases}y=20a+12\\ y=3-7a \;/\cdot(-1)\end{cases}$$

$$\cancel{20a+12=3-7a}$$

$$\begin{cases}y=20a+12\\ -y=-3+7a\end{cases}$$

$$0=27a+9$$

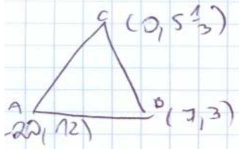
$$-9=27a$$

$$a=-\frac{9}{27}=-\frac{1}{3}$$

$$y=a(x-x_0)+y_0 \qquad y=a(0+20)+12$$

$$y=-\frac{1}{3}(20)+12=-\frac{20}{3}+12=-6\frac{2}{3}+12=5\frac{1}{3}$$

współrzędne wierzchołka $C \rightarrow \underline{\left(0, 5\frac{1}{3}\right)}$



$$|AB|=\sqrt{(7+20)^2+(3-12)^2}=\sqrt{27^2+(-9)^2}=\sqrt{729+81}=\sqrt{810}=$$

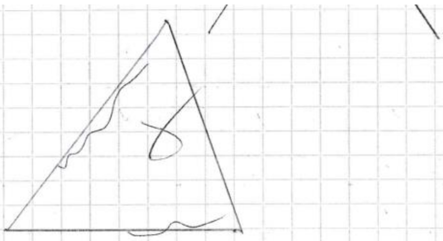
$$=3\sqrt{90}=9\sqrt{10}$$

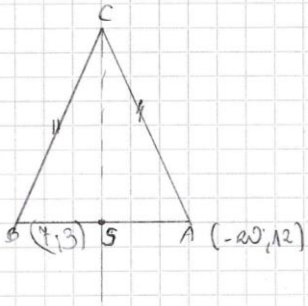
$$|BC|=\sqrt{(0-7)^2+\left(5\frac{1}{3}-3\right)^2}=\sqrt{49+\left(2\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{49+\frac{49}{9}}=$$

$$\sqrt{49+5\frac{4}{9}}=\sqrt{54\frac{4}{9}}=\sqrt{54\frac{4}{9}}=3\sqrt{6\frac{4}{9}}=3\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

$$\text{Obwód}_{\triangle}=2\cdot 3\frac{2}{3}\sqrt{6}+9\sqrt{10}=\frac{22}{3}\sqrt{6}+9\sqrt{10}=7\frac{1}{3}\sqrt{6}+9\sqrt{10}$$

Przykład 22.





Długość odcinka AB

$|AB| = \sqrt{(7+20)^2 + (3-12)^2}$

$|AB| = \sqrt{729+81} = \sqrt{810}$ $\sqrt{81 \cdot 10} = 9\sqrt{10}$

Współrzędne środka

$\frac{-20+7}{2}$; $\frac{3+12}{2}$

$(-6,5$; $7,5$

$y = ax + b$

$\begin{cases} 12 = -20a + b \\ 3 = 7a + b \quad / \cdot (-1) \end{cases}$

$\begin{cases} 12 = -20a + b \\ -3 = -7a - b \end{cases}$

$9 = -27a \quad /:9$

$a = -3$

$3 = 7a + b$

$\cancel{3 = 7a - 3}$

$y = -3a + 24$

$3 = -21 + b$

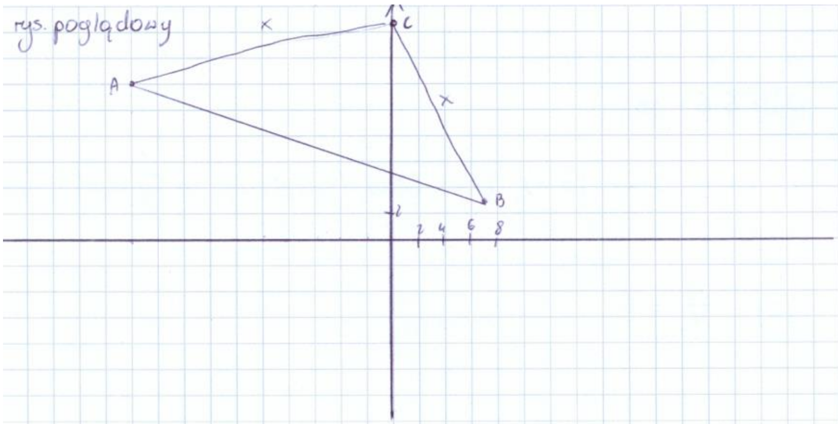
$-b = -21 - 3$

$-b = -24$

$b = 24$

Czasem błędy popełnione przez zdających prowadziły do zaskakujących wyników, np. do otrzymania dwóch wierzchołków C, których zdający nie potrafili zinterpretować i wybrać właściwego rozwiązania (przykłady 23. i 24.).

Przykład 23.



S: Środek $|AB| = \left(\frac{-20+7}{2} ; \frac{12+3}{2}\right) = \left(-\frac{13}{2} ; \frac{15}{2}\right)$

l: prosta przechodząca przez A,B : $(y-12)(7+20) - (3-12)(x+20) = 0$

$(y-12)\cdot 27 + 9(x+20) = 0$

$27y - 324 + 9x + 180 = 0 \quad /:9$

$3y - 36 + x + 20 = 0$

$3y = -x + 36 - 20$

$3y = -x + 16$

$y = -\frac{1}{3}(x-16)$

wysokość: prosta przechodząca przez punkt S ; prostopadła do prostej l ; i przech. przez punkt $(0; y)$

$a_1 \cdot a_2 = -1$

$-\frac{1}{3} \cdot a^2 = -1$

$a^2 = 3$

$y = 3x + b$

$y = 3\left(x + \frac{13}{2}\right) + \frac{15}{2}$

$y = 3x + \frac{39}{2} + \frac{15}{2}$

$y = 3x + 27$

$y = 3(x+9)$

$C = (0; y)$

$y = 3(0+9) = 3\cdot 9 = 27$

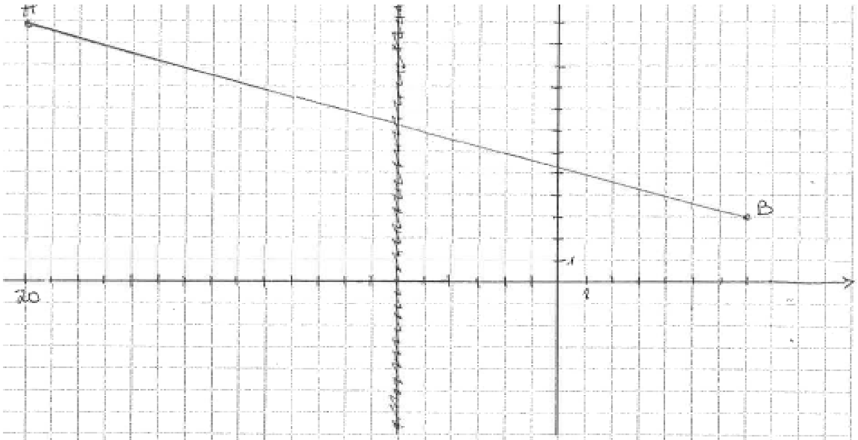
$C = (0; 27) \quad \vee \quad C = (0; -27)$

$|AB| = \sqrt{(7+20)^2 + (3-12)^2} = \sqrt{27^2 + (-9)^2} = \sqrt{729 + 81} = \sqrt{810} = 3\sqrt{10}$

$|AC| = |BC| = \sqrt{(7-0)^2 + (3-27)^2} = \sqrt{7^2 + (-24)^2} = \sqrt{49 + 576} = 25$

$Obw = 25 + 25 + 3\sqrt{10} = 50 + 3\sqrt{10}$

Przykład 24.



$A=(-20,12)$

$B=(7,3)$

$\triangle ABC \Rightarrow$ równoramienny

$C \in Oy$

$C=?$, $Obw=?$

$C(0,y_c)$ lub $C(0,-y_c)$

$|AC|=|BC|$

$\vec{AC}=[0+20,\ y_c-12]$

$\vec{AC}=[20,\ y_c-12]$

$\vec{AB}=[7+20,\ 3-12]$

$\vec{AB}=[27,-9]$

$|AB|=\sqrt{27^2+9^2}=\sqrt{729+81}=\sqrt{810}=9\sqrt{10}$

~~BC~~

$\vec{BC}=[0-7,\ y_c-3]$

$\vec{BC}=[-7,\ y_c-3]$

$|AC|=\sqrt{20^2+(y_c-12)^2}$

$|AC|=\sqrt{400+y_c^2-24y_c+144}$

$|AC|=\sqrt{y_c^2-24y_c+544}$

$|BC|=\sqrt{(-7)^2+(y_c-3)^2}$

$|BC|=\sqrt{49+y_c^2-6y_c+9}$

$|BC|=\sqrt{y_c^2-6y_c+58}$

$|AC|=|BC|$

$\sqrt{y_c^2-24y_c+544}=\sqrt{y_c^2-6y_c+58} \quad /^2$

$\cancel{y_c^2}-24y_c+544=\cancel{y_c^2}-6y_c+58$

$-18y_c=-486$

$y_c=27$

$C(0,27)$

$Obw.=9\sqrt{10}+2\cdot 25=50+9\sqrt{10}$

$|AC|=\sqrt{400+225}=25=|BC|$

$\frac{a+c}{b+c}=\frac{a(b+c)-ab-c}{b+c}$

$a-ab-ac$

gdy $C(0,-y_c)$

$|AC|=\sqrt{20^2+(-y_c-12)^2}$

$|AC|=\sqrt{y_c^2+24y_c+544}$

$|BC|=\sqrt{(-7)^2+(-y_c-3)^2}$

$|BC|=\sqrt{y_c^2+6y_c+58}$

$\sqrt{y_c^2+24y_c+544}=\sqrt{y_c^2+6y_c+58} \quad /^2$

$\cancel{y_c^2}+24y_c+544=\cancel{y_c^2}+6y_c+58$

$18y_c=-486$

$y_c=-27$

$|AC|=\sqrt{20+(-y_c-12)}$

$C(0,-27) \longrightarrow Obw=2\cdot 25+9\sqrt{10}=50+9\sqrt{10}$

~~$|AC|=\sqrt{400+1521}=\sqrt{1921}$~~

$|AC|=\sqrt{400+225}=25=|BC|$

~~$|BC|\neq$~~

Odpowiedź: Punkt C może mieć współrzędne: $C(0,27)$ lub $C(0,-27)$ a obwód trójkąta ABC wynosi $50+9\sqrt{10}$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	35.
	Maks. liczba pkt	5

Analiza jakościowa zadań – poziom rozszerzony

Analiza wskaźników poziomu wykonania zadań występujących w zestawie egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym pozwala sformułować wniosek, iż wśród zadań występujących w zestawie egzaminacyjnym żadne z zadań nie było bardzo łatwe, ani nawet łatwe dla tegorocznych maturzystów, a jedynie cztery zadania były umiarkowanie trudne.
Spośród tegorocznych zadań najłatwiejsze były te, przy rozwiązywaniu których należało wykorzystać powszechnie znane wzory lub zastosować konkretne twierdzenia w typowych kontekstach.

Najłatwiejsze dla zdających było zadanie 5. (poziom wykonania zadania 67%), które sprawdzało umiejętność obliczania granic ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.

Z kolei zadanie 10., przy rozwiązywaniu którego należało wykazać się umiejętnością wyznaczenia równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty, obliczenia odległości punktu od prostej, a także wyznaczenia współrzędnych punktu styczności okręgu i prostej, poprawnie rozwiązało 53% zdających. Podobny poziom wykonania (52%) został osiągnięty dla zadania 6., w którym należało wykazać prawdziwość równości w oparciu o własności logarytmów.

Umiarkowanie trudne dla zdających (poziom wykonania – 50%) okazało się również zadanie 1., w którym należało wykorzystać wzór na cosinus podwojonego kąta i wyznaczyć wartość funkcji cosinus kąta o mierze wyrażonej w stopniach.

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najsłabiej

Na **poziomie rozszerzonym** znalazły się trzy zadania, których poziom wykonania był niższy niż 20%.

Najwięcej problemów tegoroczni maturzyści na poziomie rozszerzonym mieli z rozwiązaniem zadania 8., o czym świadczy niski poziom wykonania tego zadania – 14%. Sprawdzało ono umiejętności z obszaru *Rozumowanie i argumentacja*, a wymagało przeprowadzenia dowodu geometrycznego – wykazania, że pole trójkąta DBP opisanego w treści zadania jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta równobocznego ABC.

Sposobów wykazania zależności między polami trójkątów było kilka. Najpopularniejszym z nich było wykorzystanie przystawania trójkątów ABE i BCD oraz podobieństwa trójkątów DBP i DCB, zastosowanie twierdzenia cosinusów i porównanie pól trójkątów DBP i ABC (przykłady 25.–27.).

Przykład 25.

$|\sphericalangle ABE| = \alpha$ $|\sphericalangle AEB| = \beta$

PONIEWAŻ $\triangle ABE$ JEST PRZYSTAJĄCY DO $\triangle BCD$ BO (bkb)

$|AE| = |DB|$ $|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle DBC| = 60°$

$|AB| = |BC| = a$

TO $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle AEB| = \beta$

W TRÓJKĄCIE $\triangle DBP$ $|\sphericalangle DBP| = |\sphericalangle ABE| = \alpha$

$|\sphericalangle BDP| = |\sphericalangle BDC| = \beta$

WIĘC $\triangle BDP$ JEST PODOBNY DO $\triangle ABE$ BO (kkk)

$\frac{|PD|}{|DB|} = \frac{|DB|}{|DC|}$ $|PD| = \frac{|DB|^2}{|DC|}$ $|DB| = \frac{1}{3}a$

Z TW. COS W $\triangle DBC$

$|DC|^2 = |BC|^2 + |DB|^2 + 2 \cdot |BC||DC| \cos 60$

$|DB|^2 = a^2 + \frac{1}{9}a^2 - \cancel{2} a \cdot \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{10}{9}a^2 - \frac{3}{9}a^2 = \frac{7}{9}a^2$

$|DB| = \frac{\sqrt{7}}{3}a$

SKALA PODOBIEŃSTWA

$k = \frac{|PD|}{|DB|} = \frac{\sqrt{7}}{3}a \cdot \frac{3}{1a} = \sqrt{7}$

$P_{\triangle DBC} = P_{\triangle DBP} \cdot \frac{1}{k^2}$

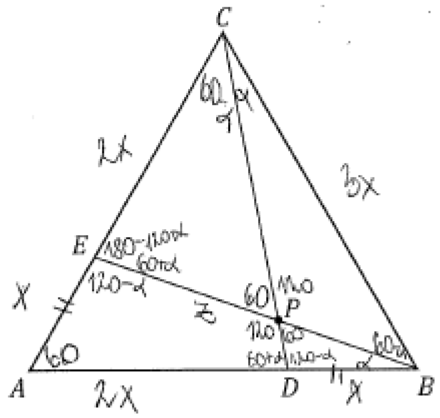
$P_{\triangle DBC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$ $P_{\triangle DBP} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{1}{7}$

WYSOKOŚĆ W $\triangle$ RÓWNOBOCZNYM

$P_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 21 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{12 \cdot 7} = 21 \cdot P_{\triangle DBP}$

$\frac{P_{\triangle DBP}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{1}{21}$

Przykład 26.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

$P_{ABC} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{4}$

$P_{ECD} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 3x \cdot \sin 60 = 3x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 = \frac{6\sqrt{3}}{4}x^2$

$P_{AEB} = \frac{9\sqrt{3}x^2}{4} - \frac{6\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2$

$z^2 = x^2 + 9x^2 - 2x \cdot 3x\cos 60$

$z^2 = 10x^2 - 6x^2 \cdot \frac{1}{2}$

$z^2 = 10x^2 - 3x^2$

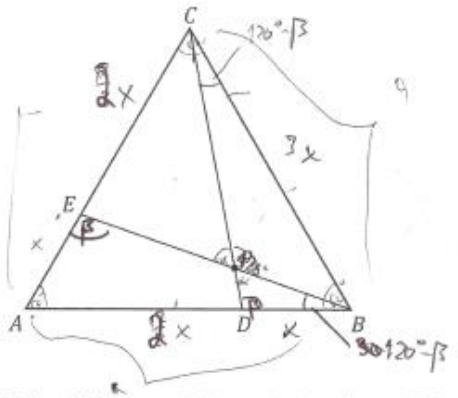
$z = \sqrt{7}x$

$P_{PBD} = \frac{1}{7} P_{AEB} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} P_{ABC}$

$P_{PBD} = \frac{1}{21} P_{ABC}$

Innym sposobem rozwiązania zadania prezentowanym przez zdających jest wyznaczenie długości odcinków $|CD|$ z twierdzenia Stewarta, a następnie wyznaczenie skali podobieństwa i skorzystanie ze związku pomiędzy skalą podobieństwa i polami figur podobnych (przykład 27.).

Przykład 27.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

~~$\Delta AEB \sim \Delta ACD$ (na podstawie bkb)~~

$P_{\Delta ACD} = 2P_{\Delta ABE}$ (ta sama wysokość, 2x większa podstawa)

$P_{\Delta PDB} = P_{\Delta CEP}$

$P_{EADP} + P_{CEP} = 2P_{EADP} + 2\cdot P_{DBP}$

$P_{DPB} = \frac{P_{CEP} - P_{EADP}}{2}$

$P_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{4}$

$\Delta CDB \sim \Delta AEB$ (z cechy bkb)

$\sphericalangle PDB = \beta = \sphericalangle AEB$

$P_{AEPD} = P_{CPB}$

$\sphericalangle EBA = 120° - \beta$

$\alpha = 60°$

$\Delta PDB \sim \Delta BEA$ (kkk) w skali k

Obliczamy $|BE|$ z tw. Stewarta

$9x^2 \cdot 2x + 9x^2 \cdot x = 3x(|BE|^2 + 2x^2)$

$9x^2 = |BE|^2 + 2x^2 \quad |BE| = \sqrt{7}x$

$k = \sqrt{7} \quad P_{AEB} = 7P_{PDB}$

$P_{\Delta AEB} = \frac{1}{2}\cdot \sin 60° \cdot x \cdot 3x = \frac{3x^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{4}$

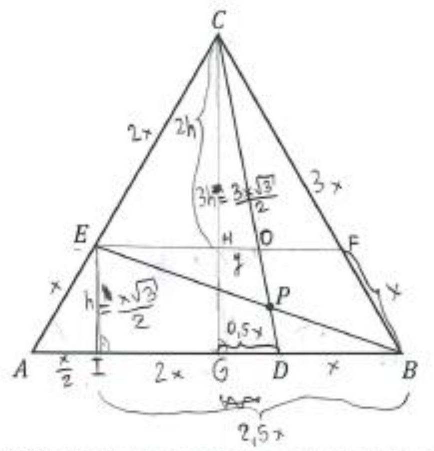
$P_{\Delta ABC} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{4}$

$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta AEB}} = \frac{\frac{9x^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3x^2\sqrt{3}}{4}} = 3 \qquad \frac{P_{\Delta AEB}}{P_{\Delta PDB}} = 7$$

$$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta PDB}} = 7 \cdot 3 = 21$$

Ciekawym sposobem przeprowadzenia dowodu był sposób oparty na poprowadzeniu odcinków równoległych do boków trójkąta ABC, następnie skorzystaniu z podobieństwa odpowiednich trójkątów i wyznaczeniu skali podobieństwa oraz pól szukanych trójkątów (przykłady 28.–30.).

Przykład 28.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

$\Delta ABE \sim \Delta PBD$

$\Delta DBP \sim \Delta OPE$ (bkb)

$\Delta ABC \sim \Delta EFC$

$\cancel{\frac{|KG|}{|CH|} = \frac{3h}{2h} = \frac{3}{2} = k}$

$\Delta GDC \sim \Delta HOC$

$\frac{|AC|}{|EC|} = \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$

$P_{\Delta ABC} = \frac{(3x)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{4}$

$3h = \frac{3x\sqrt{3}}{2}$

$h = \frac{3x\sqrt{3}}{6} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{|GD|}{|HO|} = \frac{0{,}5x}{y} = \frac{3}{2}$$

$$x = 3y$$

$$y = \frac{1}{3}x$$

$$|EF| = 2x$$

$$|EO| = \frac{1}{2}\cdot 2x + y = x + \frac{1}{3}x = \frac{4}{3}x$$

$$\frac{|EO|}{|DB|} = \frac{\frac{4}{3}x}{x} = \frac{4}{3}$$

$$|IB| = 2{,}5x$$

$$(2{,}5x)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 = |EB|^2$$

$$6{,}25x^2 + 0{,}75x^2 = |EB|^2$$

$$7x^2 = |EB|^2$$

$$|EB| = \sqrt{7}x$$

$$\frac{|EP|}{|PB|} = \frac{4}{3}$$

$$3|EP| = 4|PB| \Rightarrow |EP| = \frac{4}{3}|PB|$$

$$|EP| + |PB| = \sqrt{7}x$$

$$\frac{4}{3}|PB| + |PB| = \sqrt{7}x$$

$$\frac{7}{3}|PB| = \sqrt{7}x$$

$$|PB| = \frac{3\sqrt{7}}{7}x$$

$$\frac{|PB|}{|AB|} = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{7}x}{3x} = \frac{3\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{7}}{7} = k$$

$$P_{\triangle AEB} = \frac{1}{2}\cdot 3x\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{4}$$

$$k^2 = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{P_{\triangle DPB}}{P_{\triangle AEB}} = \frac{1}{7} = \frac{P}{\frac{3\sqrt{3}x^2}{4}}$$

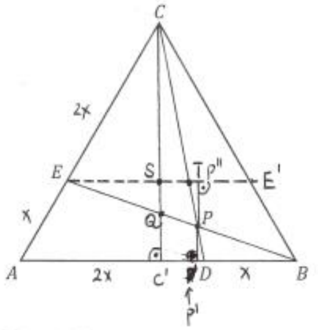
$$\Downarrow$$

$$7P = \frac{3\sqrt{3}x^2}{4}$$

$$P_{\triangle DBP} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{28}$$

$$\frac{P_{DBP}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}x^2}{28}}{\frac{9\sqrt{3}x^2}{4}} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{28}\cdot\frac{4}{9\sqrt{3}x^2} = \frac{1}{21} \quad \text{c.n.d.}$$

Przykład 29.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

~~$|EE'| =$~~

$|EE'| \parallel |AB|$ $\quad |CC'| \perp |AB|$ $\quad |AD| = 2x = |CE|$

$H = |CC'| = \frac{3x\sqrt{3}}{2}$ $\quad |DB| = x = |AE|$

$|AC'| = |BC'|$ (wys. tr. równobocznego)

$|C'D| = \frac{3}{2}x - x = \frac{x}{2}$

$\Delta CET \sim \Delta CAD$ (kkk)

$\frac{|CE|}{|ET|} = \frac{|CA|}{|AD|}$ $\quad |AD| = 2x$

$\frac{2x}{|ET|} = \frac{3x}{2x} \Rightarrow \frac{2}{|ET|} = \frac{3}{2x}$

$|ET| = \frac{2\cdot 2x}{3} = \frac{4}{3}x$

$= \frac{4}{3}x$

$\frac{|CE|}{|CS|} = \frac{|AC|}{|CC'|}$

$\frac{2x}{|CS|} = \frac{3x}{\frac{3x\sqrt{3}}{2}}$

$|CS| = \sqrt{3}x$

$|SC'| = H - \sqrt{3}x$

$= \frac{3x\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}x$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}x$

~~$\Delta ESQ \sim \Delta$~~

$|PP''|$ i $|PP'|$ – wys. odpowiednio ΔETP i ΔBDP

$\Delta ETP \sim \Delta BDP$ (kkk)

$\frac{|ET|}{|BD|} = \frac{|PP''|}{|PP'|}$

$\frac{\frac{4x}{3}}{x} = \frac{|SC'| - |PP'|}{|PP'|}$

$\frac{4}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x - |PP'|}{|PP'|}$

$4|PP'| = \frac{3\sqrt{3}x}{2} - 3|PP'|$

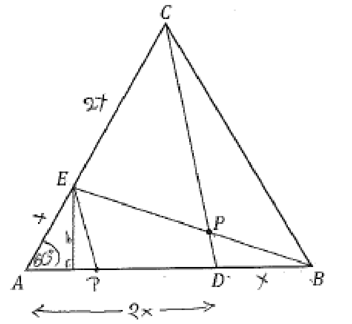
$|PP'| = \frac{3\sqrt{3}x}{14}$

$S_{\Delta BDP} = \frac{1}{2}\cdot x \cdot \frac{3\sqrt{3}x}{14} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{28}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BDP}} = \frac{\frac{9x^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3\sqrt{3}x^2}{28}} = \frac{9}{4}\cdot\frac{28}{3} = 3\cdot 7 = 21$

Przykład 30.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

Dowód:

Poprowadźmy prostą równoległą do DC przechodzącą przez punkt E. ~~Która~~ ~~Oznaczmy~~ Przebija ona prostą AB w punkcie P

Z Tw. Talesa: $|\sphericalangle DAC|$

$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AP|}{|AD|}$

$\frac{x}{3x} = \frac{|AP|}{2x}$ $\qquad |DB| = x$

$|AP| = \frac{2}{3}x \Rightarrow |PD| = \frac{4}{3}x \Rightarrow |PB| = \frac{7}{3}x$

$\triangle PBE \sim \triangle PDB$ (kąt, kąt, kąt)

$|\sphericalangle PBE| = |\sphericalangle DBP|$ ten sam kąt

$|\sphericalangle BDP| = |\sphericalangle BPE|$ (dwie proste równoległe przecięte prostą)

$|\sphericalangle PEB| = |\sphericalangle DPB|$ ———— || ————

$P_{\triangle APE} = \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |AP| \cdot \sin|\sphericalangle APE| = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{2}{3}x \cdot \sin 60° =$

$= \frac{\sqrt{3}}{6}x^2 \qquad P_{\triangle APE} = \frac{|AP| \cdot h}{2} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}x \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}x^2$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

$P_{\triangle PBE} = \frac{|PB| \cdot h}{2} = \frac{\frac{7}{3}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{7\sqrt{3}x^2}{12}$

$k = \frac{|DB|}{|PB|} = \frac{x}{\frac{7}{3}x} = \frac{3}{7}$

$k^2 = \frac{9}{49}$

$P_{\triangle DBP} = \frac{7\sqrt{3}x^2}{12} \cdot \frac{9}{49} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{28}$

$P_{\triangle ABC} = \frac{9\sqrt{3}x^2}{4}$

$\frac{P_{\triangle DBP}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}x^2}{28}}{\frac{9\sqrt{3}x^2}{4}} =$

$= \frac{3\sqrt{3}x^2}{28} \cdot \frac{4}{9\sqrt{3}x^2} = \frac{1}{21}$ cnd.

Zał.: $\triangle ABC$ – równoboczny

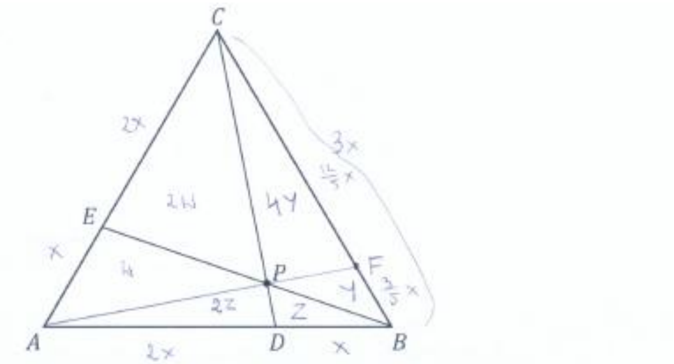
$|BD| = |AE| = \frac{1}{3}|AB|$

P – punkt przecięcia CD i BE

Teza: ~~$P_{\triangle DBP} = \frac{1}{21} P_{\triangle ABC}$~~ $\frac{P_{\triangle DBP}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{1}{21}$

Wśród ciekawych rozwiązań prezentowanych przez zdających były rozwiązania, w których zastosowano twierdzenie Cevy (przykład 31.).

Przykład 31.



T: $P_{ABC} = 21 \cdot P_{DBP}$ $\Updownarrow$ niech $|AB| = |BC| = |AC| = 3x$, $x > 0$

T: $\frac{P_{ABC}}{P_{DBP}} = 21$ wtedy $|BD| = |AE| = x$

z tw. Cevy:

$\frac{2x}{x} \cdot \frac{2x}{x} \cdot \frac{|BF|}{|FC|} = 1$

$4 \cdot \frac{|BF|}{|FC|} = 1 \Rightarrow \frac{|BF|}{|FC|} = \frac{1}{4} \wedge |BF| + |FC| = 3x \Rightarrow |BF| = \frac{3}{5}x$

$|FC| = \frac{12}{5}x$

niech $P_{AEP} = w$, $P_{PDB} = z$, $P_{PBF} = y$, wtedy

$P_{EPC} = 2w$, $P_{APD} = 2z$, $P_{PFC} = 4y$ (bo poszczególne pary trójkątów mają te same wysokości ale inne stosunki długości podstaw)

~~z podobieństwa trójkątów~~

$\frac{2w+w+2z}{4y+y+z} = \frac{2}{1}$ $3w + 2z = 10y + 2z \Rightarrow 3w = 10y \Rightarrow w = \frac{10}{3}y$

$\frac{2w+5y}{3z+w} = \frac{2}{1} \Rightarrow 2w + 5y = 6z + 2w \Rightarrow 5y = 6z \Rightarrow z = \frac{5}{6}y$

$\frac{3w+4y}{3z+y} = \frac{4}{1} \Rightarrow 3w + 4y = 12z + 4y \Rightarrow 3w = 12z \Rightarrow w = 4z$

$w = \frac{10}{3}y$

$z = \frac{5}{6}y \Rightarrow y = \frac{6}{5}z$

~~$P_{ABC} = 3w + 5y + 3z =$~~

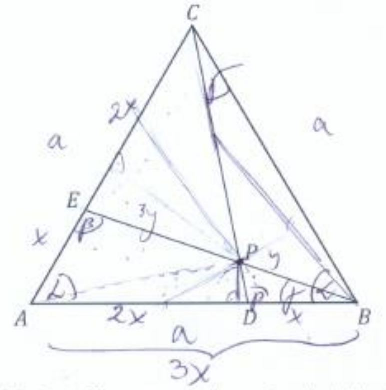
$P_{ABC} = 3w + 5y + 3z = 12z + 6z + 3z = 21z$

$P_{PDB} = z$

$\frac{P_{ABC}}{P_{PDB}} = \frac{21z}{z} = 21$ cnd

Niektórzy zdający w swoim rozumowaniu wielokrotnie korzystali z faktu, że stosunek pól trójkątów o wspólnej wysokości jest równy stosunkowi długości podstaw, na które ta wysokość jest opuszczona (przykład 32.).

Przykład 32.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

Teza: $21 P_{\triangle DBP} = P_{\triangle ABC}$

Dowód: $a = 3x$

Pole $\triangle ABC$

$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{4}$

$P_{\triangle ADP} = 2P_{\triangle BPD}$ oraz $2P_{\triangle APE} = P_{\triangle EPC}$

$P_{\triangle ADC} = 2P_{\triangle DBC}$

$|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle BDP|$ po przecięciu boku $\triangle$ równobocznego w tych samych stosunkach $(\frac{1}{3})$

zatem $\triangle AEB \equiv \triangle BDC$

$P_{ADPE} = P_{PBC}$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3x\sqrt{3}}{2}$

~~h ABP jest ... razy mniejsza~~

~~h_{ABC} h_{DBP} ...~~

$h_{ABC} \cdot \frac{3}{21} = \frac{3x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{21} = \frac{9x\sqrt{3}}{42}$

Strona 8 z 27

$P_{\triangle DBP} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \quad a = x \quad h = \frac{9x\sqrt{3}}{42}$

$P_{\triangle DBP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9x^2\sqrt{3}}{42} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{84}$

$\frac{P_{\triangle DBP}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{9x^2\sqrt{3}}{84}}{\frac{9x^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{84} \cdot \frac{4}{9x^2\sqrt{3}} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$

c.n.d.

Część zdających prowadząc dowód umieszczali trójkąt ABC w układzie współrzędnych tak, aby wierzchołek C leżał w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych i przeprowadzali dowód z zastosowaniem wektorów (przykład 33.).

Przykład 33.

Potraktujmy rysunek jakby znajdował się na układzie współrzędnych $A=(0,0)$ $B=(a,0)$ $C=\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

$|\overrightarrow{AE}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{AC}| = \left[\frac{a}{6}, \frac{a\sqrt{3}}{6}\right] \Rightarrow E=\left(\frac{a}{6}, \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$

$D=\left(\frac{2}{3}a, 0\right)$

$|EB|: \quad y=a_1x+b_1$

$$a_1 = \frac{0-\frac{a\sqrt{3}}{6}}{a-\frac{a}{6}} = -\frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{5}$$

$$0 = -\frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{5}\cdot a + b$$

$$b = \frac{a^{\cancel{2}}\sqrt{3}}{5}$$

$$y = -\frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{5}\cdot x + \frac{a^{\cancel{2}}\sqrt{3}}{5}$$

$|CD|: \quad y=a_2x+b_2$

$$a_2 = \frac{0-\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}a} = -3\cancel{a}\sqrt{3}$$

$$0 = -3\cancel{a}\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}a + b$$

$$b = 2a^{\cancel{2}}\sqrt{3}$$

$$y = -3\sqrt{3}\cancel{a}x + 2\sqrt{3}a^{\cancel{2}}$$

$$-\frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{5}\cdot x_{12} + \frac{a^{\cancel{2}}\sqrt{3}}{5} = \cancel{2\sqrt{3}a^2} - 3\sqrt{3}\cancel{a}x_{12} + 2\sqrt{3}a^{\cancel{2}} \quad | \cdot 5$$

$$14\sqrt{3}\cancel{a}\,x_{12} = 9\sqrt{3}a^{\cancel{2}}$$

$$x_{12} = \frac{9}{14}a \qquad 2\sqrt{3}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{5}}{14}$$

$$y_{12} = -3\sqrt{3}\cancel{a}\cdot\frac{9}{14}a + 2\sqrt{5}a^{\cancel{2}} = \frac{\sqrt{3}}{14}a^{\cancel{2}}$$

~~$P_{DBP} = \frac{1}{2}|$~~ (ze wzoru na pole trójkąta w układzie współrzędnym)

$$P_{DBP} = \frac{1}{2}\left|\left(a-\frac{2}{3}a\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{14}a^{\cancel{2}}-0\right)-(0-0)\cdot\left(\frac{9}{14}a-\frac{2}{3}a\right)\right|$$

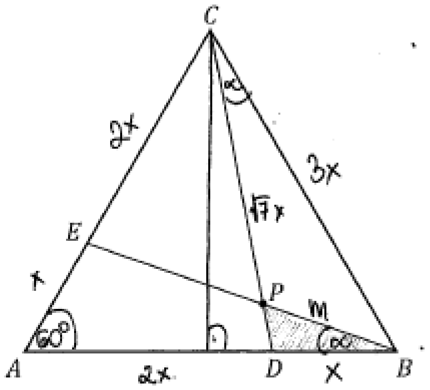
$$P_{DBP} = \frac{1}{2}\left|\frac{a^{2}\sqrt{3}}{42}\right| = \frac{a^2\sqrt{3}}{84}$$

$$P_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DBP}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{84}} = 21$$

Większość zdających nie poradziła sobie z rozwiązaniem zadania 8. Część z nich nie ustrzegła się błędów rachunkowych (przykład 34.), czy też merytorycznych (przykłady 35. i 36.), a jeszcze inni kończyli swój dowód po kilku przekształceniach, nie mając pomysłu na doprowadzenie go do końca (przykłady 37. oraz 38.) lub po prostu opuszczali rozwiązanie zadania.

Przykład 34.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

$P_{\triangle ABC} = \frac{(3x)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}x^2}{4}$ $\quad x>0$

$P_{\triangle CDB} = \frac{1}{2}P_{\triangle ADC} = \frac{1}{3}P_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{4}$

$|CD|^2 = (3x)^2+(2x)^2-2(3x)(2x)\cdot\cos 60^\circ$

$|CD|^2 = 9x^2+4x^2-12x^2\cdot\frac{1}{2}$

$|CD|^2 = 7x^2$

$|CD| = \sqrt{7}x$ $\quad |CD| = |BE|$

$x^2 = (3x)^2+(\sqrt{7}x)^2-2(3x)(\sqrt{7}x)\cdot\cos\alpha$

$x^2 = 9x^2+7x^2-6\sqrt{7}x^2\cdot\cos\alpha$

$-15x^2 = -6\sqrt{7}x^2\cos\alpha$

$\frac{15x^2}{6\sqrt{7}x^2} = \cos\alpha$

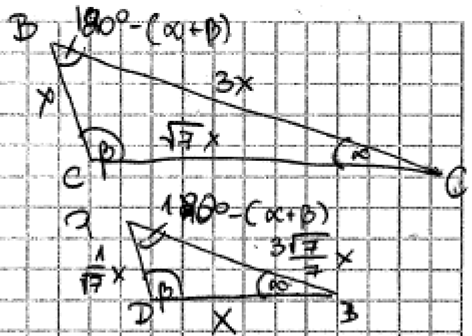
$\frac{15\sqrt{7}}{42} = \cos\alpha$

$\frac{5\sqrt{7}}{14} = \cos\alpha$

$\sin^2\alpha = 1-\frac{25\cdot 7}{196} = \frac{196}{196}-\frac{175}{196} = \frac{21}{196}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{196}} = \frac{\sqrt{21}}{14}$

$\triangle BDP \sim \triangle DPC$ z cechy kkk



$\frac{x}{\sqrt{7}x} = \frac{|DP|}{x}$

$\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{|DP|}{x}$

$|DP| = \frac{1}{\sqrt{7}}x$

$\frac{x}{\sqrt{7}x} = \frac{|BP|}{3x}$

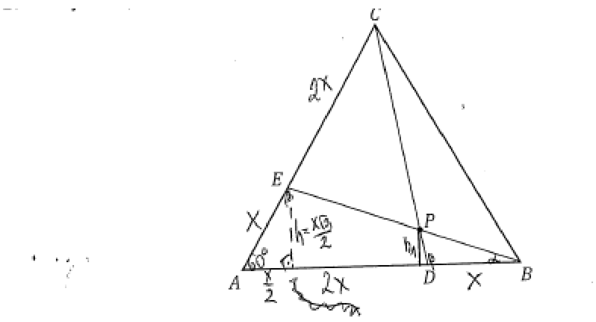
$\frac{3x}{\sqrt{7}} = |BP|$

$P_{\triangle BDP} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{3x}{\sqrt{7}} \cdot \sin\alpha$

$P_{\triangle BDP} = \frac{3\sqrt{7}x^2}{14} \cdot \frac{\sqrt{21}}{14} = \frac{21\sqrt{3}x^2}{196} = 9\frac{1}{3}\sqrt{3}x^2$

$\frac{P_{\triangle BDP}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{9\frac{1}{3}\sqrt{3}x^2}{\frac{9\sqrt{3}x^2}{4}} = \frac{28\sqrt{3}x^2}{3} \cdot \frac{4}{9\sqrt{3}\cancel{x^2}}$

Przykład 35.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

$P_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{4}$

$\Delta BDP \sim \Delta BEA$

w skali $k = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$

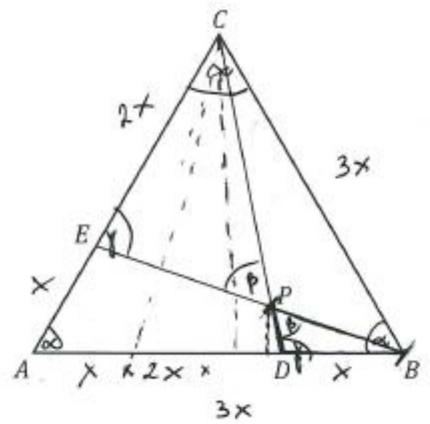
$\frac{h_1}{h} = \frac{1}{3} \to h_1 = \frac{h}{3}$

$\frac{h_1}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \to h_1 = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{x\sqrt{3}}{6}$

$P_{\Delta BDP} = \frac{x \cdot h_1}{2} = \frac{x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{6}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{12}$

$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta BDP}} = \frac{9\cancel{x^2\sqrt{3}}}{4} \cdot \frac{12}{\cancel{x^2\sqrt{3}}} = 27$

Przykład 36.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

Teza: $P_{DBP} = \frac{1}{21} P_{ABC}$ $\qquad P_{ABC} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{4}$

$h_{ABC} = \frac{3x\sqrt{3}}{2}$

$\triangle EAB \sim \cancel{\triangle CDB}\ \triangle DBC$
(b,k,b)

$P_{\triangle DBC} = \frac{x \cdot \frac{3x\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{4}$

$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ADC} + P_{\triangle DBC}$ $\qquad P_{\triangle ADC} = \frac{2x \cdot \frac{3x\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{6x^2\sqrt{3}}{4}$

$P_{\triangle EAB} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{4}$ $\qquad \cancel{P_{ABC} = P_{ADC} + P_{\triangle CDB} + P_{\triangle PDB}}$

$P_{\triangle CEB} = \frac{6x^2\sqrt{3}}{4}$

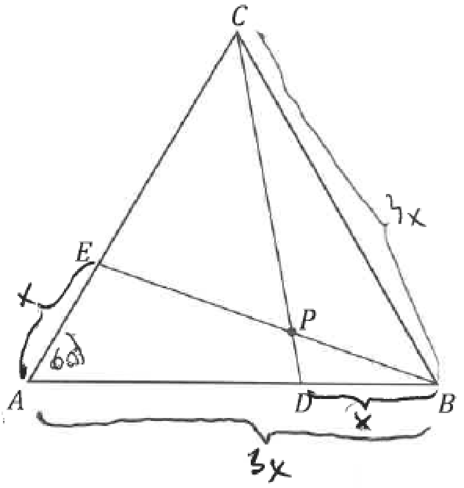
$\triangle PDB \sim \triangle PEC$
(k,k,k)
$k = 2$

$\triangle CEB \sim \triangle ADB$
(b,k,b)

$\triangle AKC \sim \triangle DBC$

$P_{\triangle CEB} = 4 P_{\triangle PDB}$

Przykład 37.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

Teza: $P_{\Delta ABC} = 21 \cdot P_{\Delta DBP}$

Zał.: $|DB| = |AE| = x$

$|AB| = |BC| = |AC| = 3x$

Dowód: $|AD| = 2x = |EC|$

$P_{\Delta ABC} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{4}$

$|EB|^2 = 9x^2 + x^2 - 6x^2 \cos 60^\circ = 10x^2 - 3x^2 = 7x^2$

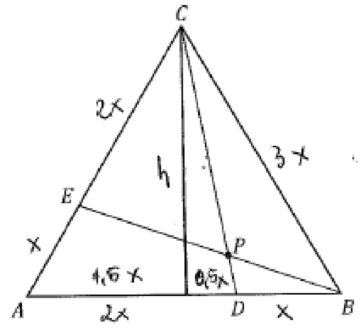
$|EB| = x\sqrt{7}$

$|CD|^2 = 9x^2 + 4x^2 - 12x^2 \cdot \cos 60^\circ = 13x^2 - 6x^2 = 7x^2$

$|CD| = \sqrt{7}x$

$\Delta ABE \equiv \Delta CDB$ (bkb)

Przykład 38.



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

$P_{\Delta ABC} = \frac{(3x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{4}$ $\quad x > 0$

$|BD| = |AE| = x$

$|AB| = 3x$

$\Delta AEB \sim \Delta DBP$

na podst. cechy k-k-k

$\frac{x\sqrt{7}}{3x} = \frac{x}{|PB|}$

$x\sqrt{7} = 3x^{\cancel{2}}|PB|$

$|PB| = \frac{\sqrt{7}}{3x}$

$\Delta DBC \cong \Delta AEB$

na podst. c. b-b-b

a zatem

$|EB| = |CD|$

$h = \frac{3x\sqrt{3}}{2}$

$\left(\frac{3x\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = |CD|^2$

$\frac{27x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = |CD|^2$

$\frac{28x^2}{4} = |CD|^2$

$|CD|^2 = 7x^2$

$|CD| = x\sqrt{7} = |EB|$

$\frac{x}{3x} = \frac{|PD|}{\frac{\sqrt{7}}{3x}}$

$3x \cdot |PD| = \frac{\cancel{x}\sqrt{7}}{3\cancel{x}}$

$3x \cdot |PD| = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$|PD| = \frac{\sqrt{7}}{9x}$

$p = x + \frac{\sqrt{7}}{9x} + \frac{\sqrt{7}}{3x}$

Duże trudności sprawiło zdającym (poza zadaniem na dowodzenie) rozwiązanie zadań 12. oraz 14. (poziomy wykonania tych zadań to – odpowiednio – 17% i 19%).
Zadanie 12. to zadanie sprawdzające wiadomości z obszaru *Użycie i tworzenie strategii,* w którego rozwiązaniu zdający mieli wykazać się umiejętnością rozwiązywania równań trygonometrycznych.
Jednym ze sposobów rozwiązania tego zadania było zastosowanie wzoru na cosinus podwojonego argumentu i zapisanie równania w postaci iloczynowej, następnie zapisanie alternatywy odpowiednich równań i wyznaczenie rozwiązań każdego z nich w przedziale domkniętym $\langle 0, \pi \rangle$. Ilustracją tego sposobu rozwiązania jest przykład 39.

Przykład 39.

$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ $\quad x \in \langle 0; \pi \rangle$

$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$

$\sin x = (\frac{\pi}{2} - x)\cdot \cos x$

$\cancel{\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - (\frac{\pi}{2} - x)\cos x}$

$\cos^2 x - \sin^2 x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 0$

$\cancel{\cos x(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) = 0$

$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$

$\cos x - \sin x = 0 \quad \vee \quad \cos x + \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$\cos x = \sin x \quad \vee \quad \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{\pi}{4}$

$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

$\cos x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2 \cdot \cos\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} \cdot \cos\frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{2x - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad |: \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \quad |: 2$

$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi + 3\pi}{12} = \frac{7}{12}\pi$

Odpowiedź: $x \in \{\frac{\pi}{4} ; \frac{7}{12}\pi\}$

Inni zdający przekształcali prawą stronę równania, stosując wzór na cosinus sumy argumentów, następnie wzór na różnicę cosinusów, po czym przekształcali równanie do postaci iloczynowej i wyznaczali rozwiązania każdego z otrzymanych w alternatywie równań w przedziale domkniętym $\langle 0, \pi \rangle$ (przykład 40.).

Przykład 40.

$x \in \langle 0; \pi \rangle$

$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$

$\Updownarrow$

$\cos 2x = \cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x$

$\Updownarrow$

$\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\Updownarrow$

$\cos 2x - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\Updownarrow$

$(-2)\cdot \sin\frac{2x - x - \frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{2x + x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$

$\Updownarrow$

$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$

$\Updownarrow$

$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \quad \vee \quad \sin\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$

$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} = k\pi,\ k \in Z \quad \vee \quad \frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8} = k\pi,\ k \in Z$

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi\ k \in Z$

Stąd jako że $x \in \langle 0; \pi \rangle$ mamy rozwiązania:

$x \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{7}{12}\pi\right\}$

Kolejna grupa zdających zapisywała równanie w postaci równości cosinusów, wypisywała dwie serie rozwiązań i na koniec podawała rozwiązania równania w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ (przykład 41.).

Przykład 41.

$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$

$\cancel{\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)}$

$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$

$\cos 2x = \cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x$

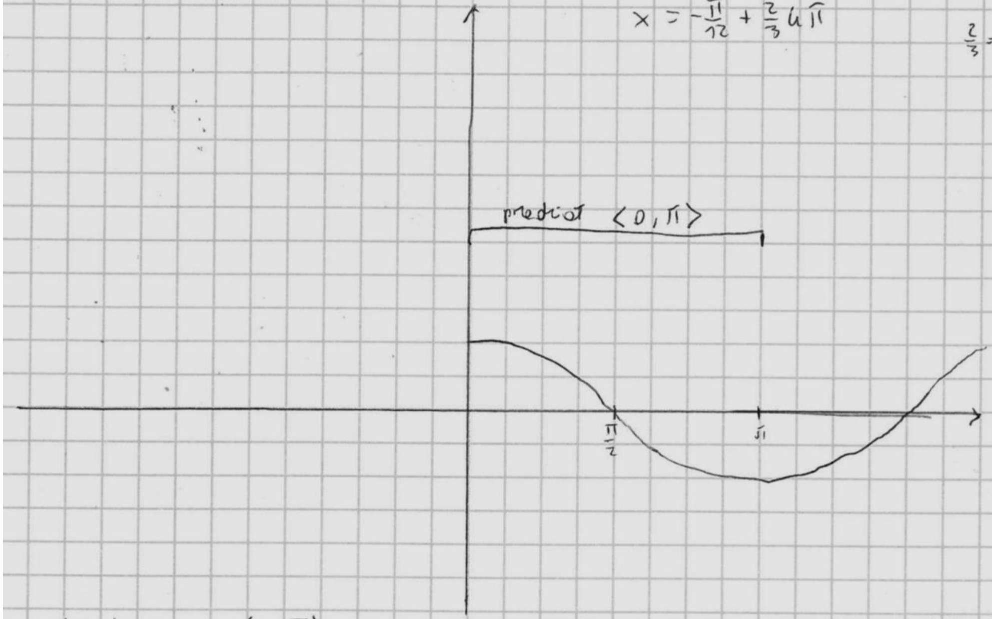
$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

$2x = \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = -\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + 2k\pi \qquad k \in C$

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$

$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$



W predziale $\langle 0, \pi \rangle$

$x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{7}{12}\pi \right\}$

Wśród rozwiązań zdających nie brakowało takich, które zawierały błędy. Niemała część rozwiązujących zadanie dzieliła równanie przez jeden z czynników $(\cos x - \sin x)$ bez rozstrzygania sytuacji, gdy $\cos x = \sin x$, pomijając w ten sposób jedno z rozwiązań (przykłady 42. oraz 43.).

Przykład 42.

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) \qquad /:(\cos x - \sin x)$$

$$\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad /()^2$$

$$(\cos x + \sin x)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\cos^2 x} + 2\sin x\cos x \underline{+\sin^2 x} = \frac{1}{2}$$

$$2\sin x\cos x + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{7}{12}\pi \quad \vee \quad x = \frac{11}{12}\pi$$

Przykład 43

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{(\cos x + \sin x)\cancel{(\cos x - \sin x)}}{\cancel{(\cos x - \sin x)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x = \frac{2}{4}$$

$$1 + \sin 2x = \frac{2}{4}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} - 1$$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{7}{6}\pi \quad \vee \quad 2x = \frac{11}{6}\pi$$

$$x = \frac{7}{12}\pi \quad \vee \quad x = \frac{11}{12}\pi$$

Niektórzy ze zdających zapisywali równanie w postaci równości cosinusów i pomijali jedną serię rozwiązań (przykład 44.) lub jedno rozwiązanie (przykład 45.).

Przykład 44.

$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) \qquad x \in \langle 0, \pi \rangle$

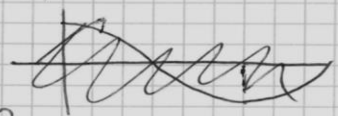
$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$

$\cos 2x = \cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x$

$\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\cancel{2x = x + \frac{\pi}{4}}$

$\cancel{x = \frac{\pi}{4}}$



$\cos 2x - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$-2\sin\frac{2x + x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin\frac{2x - x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$

$\sin\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \quad \vee \quad \sin\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$

$\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \qquad \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$

$3x + \frac{\pi}{4} = 0 \qquad x - \frac{\pi}{4} = 0$

$3x = -\frac{\pi}{4} \qquad x = \frac{\pi}{4}$

$x = -\frac{\pi}{12} \qquad$ ok

↯ poza przedziałem

Przykład 45.

$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) \qquad \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} \right\}$

$\cos 2x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$

$\cos 2x = \cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x$

$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

$2x = \frac{\pi}{4} + x$

$x = \frac{\pi}{4}$

Część zdających, rozwiązując jedno z otrzymanych równań, stosowała metodę analizy starożytnych – podnosiła obie strony równania $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ do kwadratu, lecz nie sprawdzała i nie odrzucała rozwiązań obcych (przykłady 46. i 47.).

Przykład 46.

$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$

$\cos^2 x - \sin^2 x - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) = 0$

$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$

$\cos x - \sin x = 0 \quad \vee \quad \cos x - \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

1)

$\cos x - \sin x = 0 \quad /()^2$

$\cancel{\cos^2 x}$ $\quad \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x = 0$

$1 - 2\cos x \sin x = 0$

$1 - \sin 2x = 0$

$\sin 2x = 1$

$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in C$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

2) $\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad /()^2$

$\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x = \frac{2}{4}$

$1 - 2\sin x \cos x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = 2\sin x \cos x$

$\sin 2x = \frac{1}{2}$

$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad k \in C$

$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$

$x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\}$

Przykład 47.

$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) \qquad x \in \langle 0, \pi \rangle$

$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$

$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) \quad | : (\cos x - \sin x)$

$\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad |^2 \qquad \cos x - \sin x \neq 0$

$(\cos x + \sin x)^2 = \frac{1}{2} \qquad \cos x \neq \sin x$

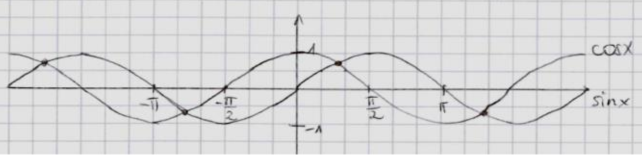
$1 + 2\cos x \sin x = \frac{1}{2} \qquad x \neq \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee$

$2\cos x \sin x = -\frac{1}{2} \qquad \sin 2x = -\frac{1}{2} \qquad x_0 = -\frac{\pi}{6} \qquad x \neq \pm\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$

$2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = 1\frac{1}{6}\pi + 2k\pi$

$x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{7}{12}\pi + k\pi \qquad k \in C$

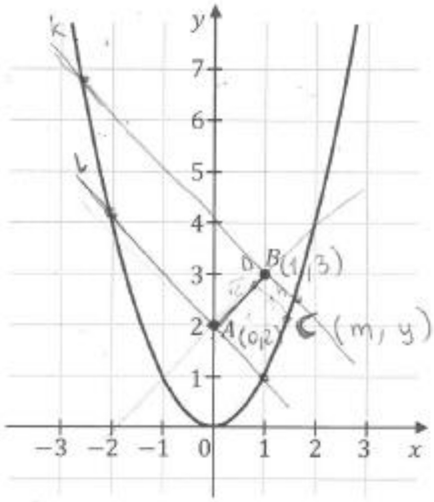
$x \in \{\frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi\}$



Zadanie 14. sprawdzało wiadomości z obszaru *Modelowanie matematyczne* w części a) (w której zdający mieli wykazać się umiejętnością wyznaczania wzoru funkcji opisującej pole trójkąta, jeśli dane były współrzędne dwóch jego wierzchołków i podane równanie krzywej, na której leżał wierzchołek trzeci) i *Użycie i tworzenie strategii* w części b) (w której należało wyznaczyć wartości parametru m, tak aby trójkąt ten był ostrokątny).

W rozwiązaniu zadania 14. w części a) zdający musiał uzależnić współrzędne wierzchołka C oraz jego wysokość opuszczoną z tego wierzchołka w zależności od zmiennej m i zapisać wzór na pole trójkąta ABC w zależności od tej zmiennej, zaś w części b) wyznaczyć wartości parametru m, tak aby trójkąt ten był ostrokątny. Zdający mógł rozważyć położenie prostych prostopadłych do prostej AB przechodzących przez punkty A i B, zauważając, że kąt przy wierzchołku C jest ostry (przykład 48.) lub skorzystać z twierdzenia cosinusów (przykład 49.).

Przykład 48.



aby był trójkąt to punkty A, B, C nie mogą być współliniowe, a więc C nie może leżeć na prostej AB

AB $y = ax + b$

$2 = b$

$3 = a + 2$

$a = 1$

$y = x + 2$

$x + 2 \neq x^2$

$x^2 - x - 2 \neq 0$

$(x-2)(x+1) \neq 0$

$x \neq 2 \wedge x \neq -1$

$m \neq 2 \wedge m \neq -1$

$y = m^2$

$AB = \sqrt{2}$

$P = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{2}\, h}{2}$

h - wysokość $\triangle ABC$, czyli odległość punktu C od AB

$$CD = \frac{|-m + y - 2|}{\sqrt{2}}$$

AB

$-x + y - 2 = 0$

$y = m^2$

$m^2 - m - 2 = (m-2)(m+1)$

$$CD = \frac{|-m + m^2 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|m^2 - m - 2|}{\sqrt{2}}$$

$$a)\quad P_{(m)} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{|m^2 - m - 2|}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{|m^2 - m - 2|}{2}$$

aby $\triangle ABC$ być prostokątny to punkt C musi się znajdować na fragmentach paraboli między prostymi k i l ($k, l \perp AB$ i k przechodzi przez punkt B, a l przechodzi przez punkt A)

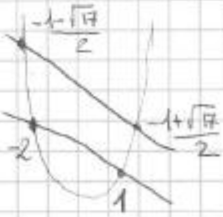
k: $y = ax + b$ $\quad a = -1$

$3 = -1 + b$ $\quad$ k: $y = -x + 4$

$b = 4$ $\quad \sqrt{17} \approx 4$

l: $y = -x + b$ $\quad a = -1$

$2 = b$ $\quad$ l: $y = -x + 2$



k: $y = -m + 4$ $\qquad$ l: $y = -m + 2$

$y = m^2$ $\qquad$ $y = m^2$

$m^2 + m - 4 = 0$ $\qquad$ $m^2 + m - 2 = 0$

$\Delta = 1 + 16 = \sqrt{17}$ $\qquad$ $(m+2)(m-1) = 0$

$m_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ $\qquad$ $m = -2 \lor m = 1$

$m_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

b) $m \in \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; -2\right) \cup \left(1; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$

Przykład 49.

a) $P=\sqrt{\frac{|AB|+|BC|+|AC|}{2}\left(\frac{|AB|+|BC|-|AC|}{2}\right)\left(\frac{|AB|-|BC|+|AC|}{2}\right)\left(\frac{|BC|+|AC|-|AB|}{2}\right)}$

$|AB|=\sqrt{(0-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{2}$

$|AC|=\sqrt{(0-m)^2+(2-m^2)^2}=\sqrt{m^4-3m^2+4}$

$|BC|=\sqrt{m^4-5m^2-2m+10}$

$$P_{(m)}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{m^4-3m^2+4}\right)+\left(\sqrt{m^4-5m^2-2m+10}\right)+\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{m^4-5m^2-2m+10}-\sqrt{m^4-3m^2+4}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{m^4-3m^2+4}-\sqrt{m^4-5m^2-2m+10}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{m^4-5m^2-2m+10}+\sqrt{m^4-3m^2+4}-\sqrt{2}}{2}\right)}$$

b) $\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{m^4-3m^2+4}\right)^2>\left(\sqrt{m^4-5m^2-2m+10}\right)^2$

$2+\cancel{m^4}-3m^2+4>\cancel{m^4}-5m^2-2m+10$

$1^\circ\ 2m^2+2m-4>0$

$\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{m^4-5m^2-2m+10}\right)^2>\left(\sqrt{m^4-3m^2+4}\right)^2$

$2+\cancel{m^4}-5m^2-2m+10>\cancel{m^4}-3m^2+4$

$2^\circ\ 0>2m^2+2m-8$

$\left(\sqrt{m^4-5m^2-2m+10}\right)^2+\left(\sqrt{m^4-3m^2+4}\right)^2>\left(\sqrt{2}\right)^2$

$m^4-5m^2-2m+10+m^4-3m^2+4>2$

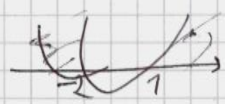
$3^\circ\ 2m^4-8m^2-2m+12>0$

$1^\circ\quad 2m^2+2m-4>0$

$\Delta=4-4(-4)2=36$

$m_1=\frac{-2+6}{4}=1$

$m_2=\frac{-2-6}{4}=-2$



$m\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$

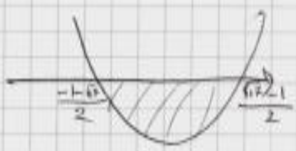
2° $2m^2+2m-8<0$

$\Delta = 4-4(-8)2 = 68$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{17}$

$m_1 = \frac{-2-2\sqrt{17}}{4} = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$

$m_2 = \frac{-2+2\sqrt{17}}{4} = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$

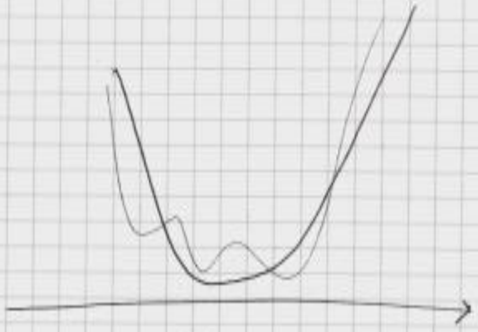


$m \in \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

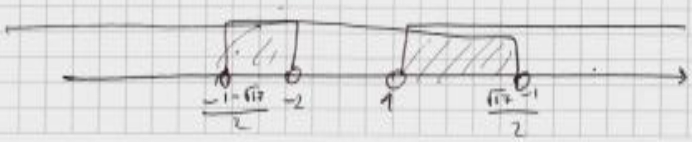
3°

$2m^4-8m^2-2m+12>0$

$m^4-4m^2-m+6>0$



$m \in \mathbb{R}$



Odpowiedź: $m \in \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; -2\right) \cup \left(1; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

Zdający często nie podejmowali próby rozwiązania zadania 14., bądź ograniczali się do rozwiązania podpunktu pierwszego (przykład 50.), część jednak nawet to czyniła błędnie (przykład 51.).

Przykład 50.

$A(0,2)$ $\quad P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)\right|$

$B(1,3)$

$C(m,m^2)$

a) $P = \frac{1}{2}\left|(1-0)(m^2-2) - (3-2)(m-0)\right| =$

$= \frac{1}{2}\left|m^2 - 2 - m\right| = \frac{1}{2}\left|m^2 - m + 2\right|$

Przykład 51.

a) $C(m, m^2)$

$|AB| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$|AC| = \sqrt{m^2 + (m^2-2)^2} = \sqrt{m^2 + m^4 - 4m^2 + 4} = \sqrt{m^4 - 3m^2 + 4}$

$P_{r_{AB}}: \ y = ax + b \quad A(0,2) \quad B(1,3)$

$2 = b \quad y = ax + 2 \quad 3 = a + 2$

$a = 1$

$y = x + 2 \quad x - y + 2 = 0 \quad C(m, m^2)$

$h = \frac{|m - m^2 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|m - m^2 + 2|}{\sqrt{2}}$

$P_{ABC} = |AB| \cdot h$

$f(m) = \sqrt{2} \cdot \frac{|m - m^2 + 2|}{\sqrt{2}} = |m - m^2 + 2|$

W rozwiązaniach zdający nie ustrzegli się błędów rachunkowych (przykład 52., przykład 53.), a często rozwiązania te nie były pełne (przykład 54.).

Przykład 52.

$C(m, m^2)$

$|AB| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$|AC| = \sqrt{(m-0)^2+(m^2-2)^2} = \sqrt{m^2+m^4-4m^2+4} = \sqrt{m^4-2m^2+4}$

$|BC| = \sqrt{(m-1)^2+(m^2-3)^2} = \sqrt{m^2-2m+1+m^4-6m^2+9}$
$= \sqrt{m^4-5m^2-2m+10}$

$$p = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{m^4-2m^2+4}+\sqrt{m^4-5m^2-2m+10}}{2}$$

$$P(m) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{m^4-2m^2+4}+\sqrt{m^4-5m^2-2m+10}}{2}\left(\frac{\sqrt{m^4-2m^2+4}+\sqrt{m^4-5m^2-2m+10}-\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{m^4-5m^2-2m+10}-\sqrt{m^4-2m^2+4}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{m^4-2m^2+4}-\sqrt{m^4-5m^2-2m+10}}{2}\right)}$$

Trójkąt będzie ostrokątny:

$|AB|^2 < |AC|^2+|BC|^2$

$2 < m^4-2m^2+4+m^4-5m^2-2m+10$

$2 < 2m^4-7m^2-2m+14$

$2m^4-7m^2-2m+12 > 0$

$|AC|^2 < |AB|^2+|BC|^2$

$m^4-2m^2+4 < 2+m^4-5m^2-2m+10$

$3m^2+2m-8 < 0$

$\Delta = 4+12\cdot 8$

$m_1 = \frac{-2-10}{6} = -2$

$m_2 = \frac{-2+10}{6} = \frac{4}{3}$

$m \in \left(-2; \frac{4}{3}\right)$

$|BC|^2 < |AB|^2+|AC|^2$

$m^4-5m^2-2m+10 < 2+m^4-2m^2+4$

$-3m^2-2m+4 < 0$

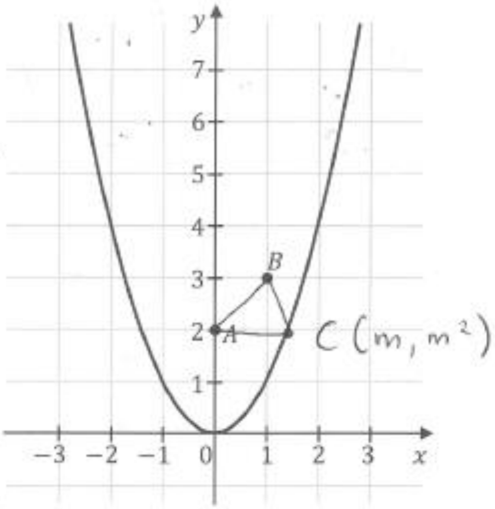
$\Delta = 4+12\cdot 4 = 52$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{13}$

$m_1 = \frac{2-2\sqrt{13}}{-6} = \frac{-1+\sqrt{13}}{3}$

$m_2 = \frac{2+2\sqrt{13}}{-6} = \frac{1-\sqrt{13}}{3}$

Przykład 53.



a) $m \in R$

$\overrightarrow{AB} = [1, 1]$

$\overrightarrow{AC} = [m, m^2 - 2]$

$P(m) = \frac{1}{2} |m^2 - 2 - m| = \frac{1}{2} |m^2 - m - 2|$

b) $\overrightarrow{BC} = [m - 1, m^2 - 3]$

$|BC| = \sqrt{(m-1)^2 + (m^2 - 3)^2} =$

$= \sqrt{m^2 - 2m + 1 + m^4 - 6m^2 + 9} =$

$= \sqrt{m^4 - 5m^2 - 2m + 10}$

$$|AC| = \sqrt{m^2 + (m^2-2)^2} = \sqrt{m^2 + m^4 - 4m^2 + 4} =$$
$$= \sqrt{m^4 - 3m^2 + 4}$$
$$|AB| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

① $m^4 - 5m^2 - 2m + 10 < m^4 - 3m^2 + 4 + 2$

$\cancel{m^4} - 5m^2 - 2m + 10 < \cancel{m^4} - 3m^2 + 6$

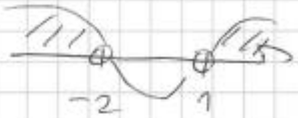
$-2m^2 - 2m + 4 < 0 \quad |:(-2)$

$m^2 + m - 2 > 0$

$\Delta = 1^2 - 4\cdot(-2) = 1 + 8 = 9$

$\sqrt{\Delta} = 3$

$m_1 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$



$m_2 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$m \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

② $m^4 - 3m^2 + 4 < m^4 - 5m^2 - 2m + 10 + 2$

$\cancel{m^4} - 3m^2 + 4 < \cancel{m^4} - 5m^2 - 2m + 12$

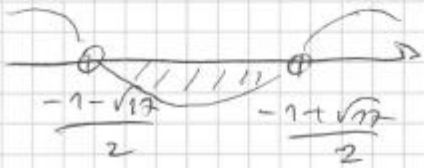
$2m^2 + 2m - 8 < 0 \quad |:2$

$m^2 + m - 4 < 0$

$\Delta = 1^2 - 4\cdot(-4) = 1 + 16 = 17$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$

$m_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$



$m_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

$m \in \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$

(3) $2 < m^4 - 5m^2 - 2m + 10 + m^4 - 3m^2 + 4$

$2 < 2m^4 - 8m^2 - 2m + 14$

$2m^4 - 8m^2 - 2m + 12 > 0 \quad |:2$

$\underbrace{m^4 - 4m^2 - m + 6}_{W(m)} > 0$

$\left.\begin{array}{l} W(-1) = 4 \\ W(0) = 6 \\ (1) = 2 \\ W(2) = 4 \end{array}\right\} \quad W(m) > 0$

Poszukamy takiego m, dla którego P jest najmniejsze, żeby sprawdzić, czy rzeczywiście ΔABC może być tylko ostrokątny.

$\begin{cases} P(m) = \frac{1}{2}|m^2 - m - 2| \to \min \\ D_f = R \end{cases}$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 \quad \sqrt{\Delta} = 3$

$m_1 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$m_2 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$P(m) = \frac{1}{2} |(m+1)(m-2)|$

~~$P(m) = \frac{1}{2}(m^2 - m - 2)$~~

$P_1(m) = \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m - 1$ dla $m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

$P_2(m) = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m + 1$ dla $m \in \langle -1, 2 \rangle$

$P_1'(m) = m^2 - \frac{1}{2}$ $\quad P_1'(m) = 0 \quad m^2 = \frac{1}{2}$

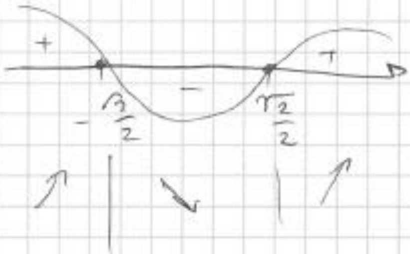
$P_2'(m) = -m^2 + \frac{1}{2}$ $\quad P_2'(m) = 0 \quad m^2 = \frac{1}{2}$

$|m| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$|m| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$m = \frac{\sqrt{2}}{2} \lor m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$P_1'(m) > 0$



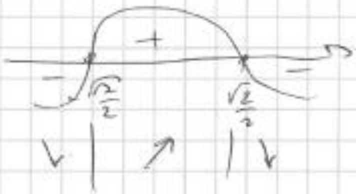
najmniejsza wartość dla $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$W\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{8}{16} - 4 \cdot \frac{2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 6 =$

$= \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 6 =$

$= \frac{1}{2} - 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 6 = \frac{9 - \sqrt{2}}{2}$

$P_2'(m) > 0$



najmniejsza wartość dla $m = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$W\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 6 =$

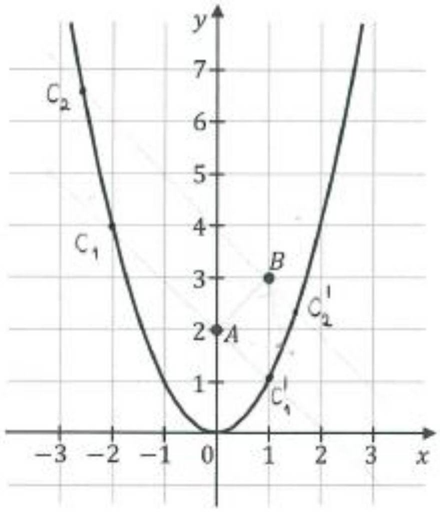
$= \frac{9 + \sqrt{2}}{2}$

$\bigwedge_{m \in R} W(m) > 0 \Rightarrow$ ③ $m \in R$

① ∨ ② ∨ ③ $m \in R$

Odpowiedź: ~~[illegible]~~ a) $P(m) = \frac{1}{2}|m^2 - m - 2|$ b) $m \in R$

Przykład 54.



~~Dd~~ $A(0,2)$ $B(1,3)$ $C(m, m^2)$

a) $f(m) = P_{ABC}$

$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|(1-0)(m^2-2) - (3-2)(m-0)\right| =$

$= \frac{1}{2}\left|m^2-2 - \cancel{k}\,m\right| = \frac{1}{2}\left|m^2-m-2\right|$

$f(m) = \frac{1}{2}\left|m^2-m-2\right|$

b) $a = |AB| = \sqrt{(1-0)^2+(3-2)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$b = |BC| = \sqrt{(m-1)^2+(m^2-3)^2} = \sqrt{m^2-2m+1+m^4-6m^2+9} =$

$= \sqrt{m^4-5m^2-2m+10}$

$c = |AC| = \sqrt{(m-0)^2+(m^2-2)^2} = \sqrt{m^2+m^4-4m^2+4} = \sqrt{m^4-3m^2+4}$

prosta AB:

$a_{AB} = \frac{3-2}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$

prosta $\perp$ do AB:

$a = -1$

1) i przechodzące przez pkt $A: (0,2)$

$y_1 = -x + b_1$

$2 = b_1$

$y_1 = -x + 2$

$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$

$x^2 = -x + 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$x = -2 \quad \vee \quad x = +1$

$C_1(-2; (-2)^2) \vee C_1'(1, 1)$

C_1, C_1', stąd

2) i przechodzące przez pkt $B: (1,3)$

$y_2 = -x + b_2$

$3 = -1 + b_2 \Rightarrow b_2 = 4$

$y_2 = -x + 4$

$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = x^2 \end{cases}$

$x^2 = -x + 4$

$x^2 + x - 4 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \cdot (-4) = 1 + 16 = 17$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{17}$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \quad C_2'\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; m^2\right)$

$x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \quad C_2\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; m^2\right)$

$C_2'\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2\right)$

$C_2\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)^2\right)$

$m \in \left(-\frac{1-\sqrt{17}}{2}, -2\right) \cup \left(1, -\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$

Analiza zadań wymagających modelowania matematycznego

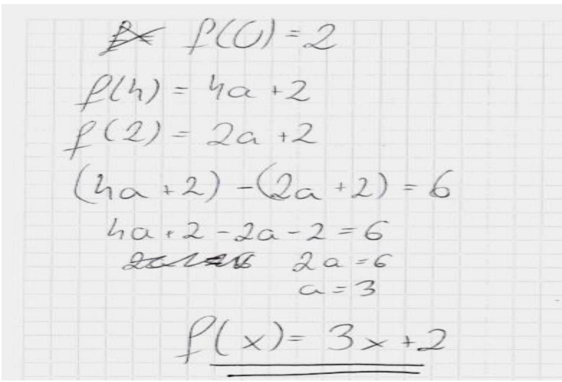
Modelowanie matematyczne to umiejętność opisywania w języku matematyki rzeczywistej sytuacji poprzez stworzenie/dobranie odpowiednich struktur i obiektów matematycznych wraz określeniem zależności/relacji między nimi. Stworzony model może mieć postać wzoru, równania, układu równań, funkcji, algorytmu, przestrzeni probabilistycznej itp., a ponadto powinien uwzględnić jedynie te aspekty rzeczywistej sytuacji, które wiążą się z postawionym problemem.

Na tegorocznym egzaminie na poziomie podstawowym przedmiotem rozważań w zadaniu 31. (poziom wykonania 35%) było wyznaczenie wzoru funkcji liniowej na podstawie informacji o tej funkcji. Zadanie to, oprócz dowodu, stanowiło poważne wyzwanie dla wielu zdających.

Aby poprawnie wyznaczyć wzór funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ należało poprawnie zinterpretować informację, że funkcja przyjmuje wartość 2 dla argumentu 0 oraz właściwie zinterpretować równanie z treści zadania $f(4) - f(2) = 6$.

Znaczna część zdających, którzy poprawnie rozwiązali to zadanie, najpierw korzystała z własności funkcji liniowej, że punkt przecięcia prostej będącej wykresem tej funkcji z osią OY ma współrzędne $(0, b)$. Na podstawie tego wnioskowali, że $b = 2$ i $f(x) = ax + 2$. Kolejnym etapem było wyznaczenie wartości funkcji dla argumentów 4 i 2, czyli $f(4) = 4a + 2$ i $f(2) = 2a + 2$ oraz ich podstawienie do danego równania $f(4) - f(2) = 6$. I w końcu, otrzymaną po rozwiązaniu równania $4a + 2 - (2a + 2) = 6$ wartość współczynnika kierunkowego $a = 3$, podstawić do wzoru funkcji f i zapisać $f(x) = 3x + 2$ (przykład 55.).

Przykład 55.



$f(0)=2$

$f(4)=4a+2$

$f(2)=2a+2$

$(4a+2)-(2a+2)=6$

$4a+2-2a-2=6$

$2a=6$

$a=3$

$\underline{f(x)=3x+2}$

Liczna grupa zdających najpierw poprawnie wyznaczała wartości funkcji liniowej dla argumentów 4 i 2: $f(4) = 4a + b$ oraz $f(2) = 2a + b$ i wyznaczone wartości funkcji podstawiali do danego w treści zadania równania $f(4) - f(2) = 6$. Po rozwiązaniu tego równania z niewiadomą a otrzymywali wartość współczynnika kierunkowego $a = 3$ i zapisywali $f(x) = 3x + b$. Następnie poprawnie interpretowali informację, że funkcja f przyjmuje wartość 2 dla argumentu 0 i zapisywali równanie $2 = 3 \cdot 0 + b$. Po rozwiązaniu otrzymywali $b = 2$ i zapisywali poprawny wzór funkcji liniowej $f(x) = 3x + 2$ (przykład 56.).

Przykład 56.

$f(x) = ax+b$

$f(4) = a \cdot 4 + b = 4a+b$

$f(2) = a \cdot 2 + b = 2a+b$

$f(4) - f(2) = 6$

$4a+b - (2a+b) = 6$

$4a+b-2a-b = 6$

$2a = 6$

$a = 3$

$f(x) = 3x+b$

$f(0) = 3 \cdot 0 + b = 2$

$b = 2$

$f(0) = 2$

$a \cdot 0 + b = 2$

$f(x) = 3x+2$

Niektórzy zdający poprawnie zinterpretowali obie informacje podane w treści zadania i obliczali współczynniki a i b niezależnie (przykład 57.).

Przykład 57.

$y = ax + b$ — równanie ogólne funkcji liniowej

Dane:

$f(0) = 2$, $f(4) - f(2) = 6$

Rozwiązanie:

$2 = a \cdot 0 + b \Rightarrow \underline{b = 2}$

$4a + b - (2a + b) = 6$

$4a + b - 2a - b = 6$

$2a = 6 \quad |:2$

$\underline{a = 3}$

$a = 3$, $b = 2$, zatem równanie funkcji f dane jest wzorem:

$\underline{\underline{y = 3x + 2}}$

Część zdających poprawnie interpretowała informację, że funkcja f przyjmuje wartość 2 dla argumentu 0, a następnie właściwie zinterpretowała równanie $f(4) - f(2) = 6$ i obliczyła współczynnik kierunkowy a jako iloraz różnicowy $a = \frac{f(4)-f(2)}{4-2}$, uzasadniając obliczenie a własnością funkcji liniowej o stałym stosunku przyrostu wartości funkcji do przyrostu argumentu (przykład 58.).

Przykład 58.

$f(0) = 2 \Rightarrow b = 2$

$f(4) = f(2) + 6$ ⇒ wzrost argumentu o 2 powoduje wzrost wartości o 6

$\Rightarrow a = \frac{6}{2} = 3$

$\boxed{y = 3x + 2}$

Wśród zdających byli i tacy, którzy poprawnie obliczyli współczynnik b, natomiast współczynnik kierunkowy a wyznaczyli metodą prób i błędów, a wskazaną wartość sprawdzili z warunkami zadania. Takie rozwiązanie prezentujemy w przykładzie 59.

Przykład 59.

$f(0) = 2$

$f(4) - f(2) = 6$

$Ax + By + C = 0$

$\cancel{0x + 2y + C = 2}$

$y = ax + b$

$f(x) = 0x + 2$

$f(2) = 2x + 2$

$f(4) = 4x + 2$

$\cancel{4x + 2 - 2x + 2 = 6}$

$\cancel{2x + 4 = 6}$

$\cancel{2x = 2}$

$\cancel{x = 1}$

$f(x) = 3x + 2$

$b = 2$

~~dla~~ dla $ax + 2$

dla $a = 1$ $x + 2$

$f(4) - f(2) = 6 - 4 \neq 6$

dla $a = 2$ $2x + 2$

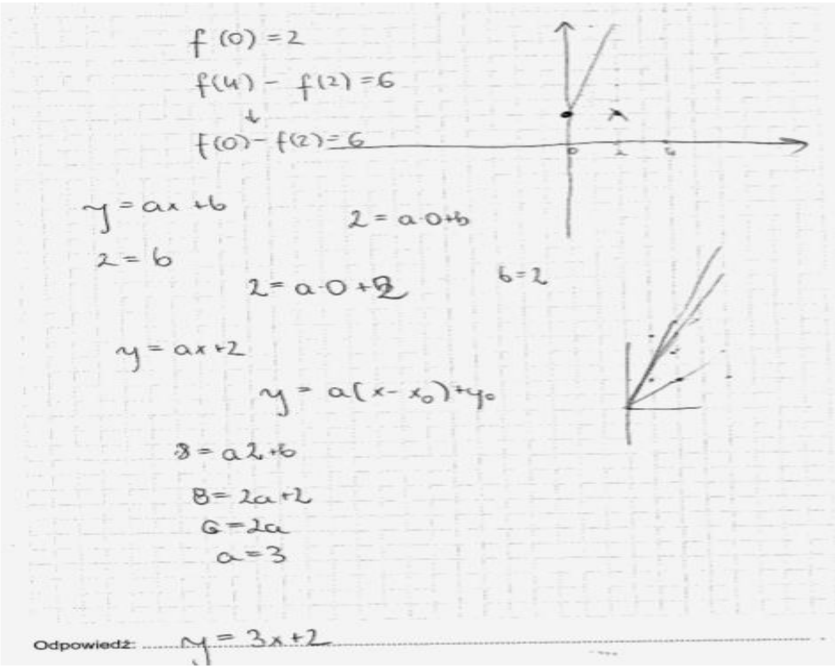
$f(4) - f(2) = 10 - 6 \neq 6$

dla $a = 3$ $3x + 2$

$f(4) - f(2) = 14 - 8 = 6$

Część zdających, w modelowaniu wykorzystała własność funkcji liniowej, że stosunek przyrostu wartości do przyrostu argumentu jest stały. Ci zdający właściwie zinterpretowali dane w treści zadania równanie $f(4) - f(2) = 6$ i poprawnie wnioskowali, że każdy przyrost argumentu o dwa implikować będzie przyrost wartości funkcji o sześć. Następnie sporządzali ilustrację graficzną do zadania – rysowali układ współrzędnych, kreślili prostą i, korzystając z rysunku, podejmowali próbę dopasowania współczynników a i b wzoru funkcji f, po czym sprawdzali, czy punkty prostej spełniają zależność $f(4) - f(2) = 6$ (przykład 60.).

Przykład 60.



$f(0)=2$

$f(4)-f(2)=6$

$f(0)-f(2)=6$

$y=ax+b$

$2=b$

$2=a\cdot 0+b$

$b=2$

$2=a\cdot 0+2$

$y=ax+2$

$y=a(x-x_0)+y_0$

$8=a2+b$

$8=2a+2$

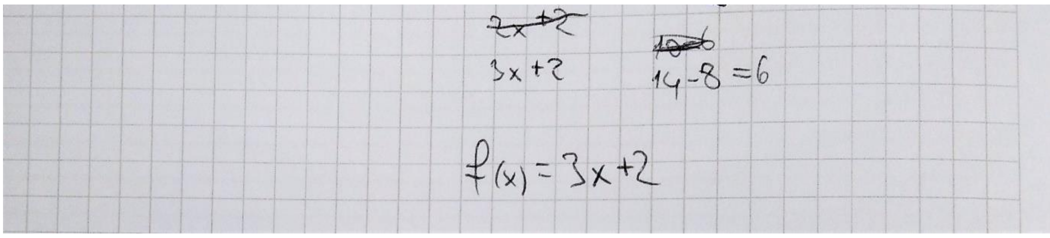
$6=2a$

$a=3$

Odpowiedź: $y=3x+2$

Niektórzy zdający podawali poprawny wzór funkcji od razu – bez żadnych obliczeń (przykład 61.). Jednak za takie rozwiązanie zdający mógł otrzymać tylko 1 punkt.

Przykład 61.



$\cancel{2x+2}$

$3x+2$

$\cancel{10-6}$

$14-8=6$

$f(x)=3x+2$

Zagadnienia wymagające przeprowadzenia modelowania w kilku etapach są istotnym wyzwaniem dla zdających. Nierzadko, pomimo bezbłędnego wykonania pierwszego etapu rozwiązania, zdający nie doprowadzali poprawnie modelowania do końca.
Jakie są zatem prawdopodobne przyczyny niskiego wyniku w zadaniu, które nie należało do zadań szczególnie opuszczanych, jak zadanie typu „wykaż, że”, a w podanych w treści zadania informacjach wyraźnie wskazano na wydzielone obiekty i relacje między nimi, z czego jasno wynikała droga postępowania? Oto możliwe odpowiedzi.

Największą trudność dla zdających stanowiło zinterpretowanie danej w treści zadania informacji, że funkcja przyjmuje wartość 2 dla argumentu 0.
Liczna grupa zdających myliła argument funkcji z jej wartością i błędnie zapisywała tę informację jako $f(2) = 0$, co świadczy o braku znajomości podstawowych pojęć związanych z funkcją (przykład 62.).

Przykład 62.

$$f(2) = 0$$
$$f(4) - f(2) = 6$$
$$f(4) - 0 = 6$$
$$f(4) = 6$$
$$f(x) = ax + 6$$
$$\begin{cases} 0 = 2a + 6 \\ 6 = 4a + 6 \end{cases}$$
$$6 = 2a$$
$$a = 3$$
$$-6 = 2a$$
$$\cancel{b = 6} \quad b = -6$$
$$f(x) = 3x - 6$$

Z dalszego rozwiązania zdającego wynika, że rozumie zapis $f(4)$ i $f(2)$, ponieważ właściwie zinterpretował dane w treści zadania równanie $f(4) - f(2) = 6$.
Niemałej części maturzystów, pomimo zrozumienia istoty zagadnienia, znajomości i rozumienia pojęcia funkcji liniowej, zapisania poprawnego równania z niewiadomą a, popełniony błąd rachunkowy w jego rozwiązaniu uniemożliwiał otrzymanie poprawnego wzoru funkcji f.
W wielu przypadkach, w których zdający prawidłowo wyznaczyli współczynnik b, o braku poprawności wyznaczenia wzoru funkcji liniowej decydowały błędy w dalszym etapie rozwiązania zadania. Typowe błędy popełniane przez maturzystów ilustrują przykłady 63. i 64. Wprawdzie w przedstawionych poniżej rozwiązaniach wyznaczono poprawnie współczynnik b, lecz potem zapisano niepoprawne równanie z niewiadomą a, co uniemożliwiło uzyskanie poprawnej wartości współczynnika kierunkowego.

Przykładem 63. ilustrujemy bardzo częsty błąd zdających polegający na pominięciu nawiasu w zapisie równania z niewiadomą a.

Przykład 63.

$f(0) = 2$ $\qquad f(4) - f(2) = 6$ $\qquad y = ax + b$

$\cancel{2 = b}$ $\qquad \cancel{4a + 2 - 2a + 2 = 6}$

$\cancel{2a + 4 = 6}$

$\cancel{2a = 2}$

$\cancel{a = 1}$

$\cancel{y = x + 2}$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(4) - f(2) = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = b \\ 4a + 2 - 2a + 2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2 \\ 2a = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

$y = x + 2$

W przykładzie 64. zdający nie wyznaczył poprawnej wartości funkcji f dla argumentu 2 i w konsekwencji otrzymał błędną wartość współczynnika kierunkowego a.

Przykład 64.

$y = ax + b$

$2 = 0a + b$

$\underline{b = 2}$

$f(4) - f(2) = 6$

$4a + 2 - 2 = 6$

$4a = 6$

$a = \frac{6}{4}$

$a = \frac{3}{2}$

$\underline{y = \frac{3}{2}x + 2}$

Część zdających, pomimo obliczenia poprawnej wartości współczynnika b oraz właściwej interpretacji równania danego w treści zadania, zapisywała błędne równanie z niewiadomą a, przestawiając odjemną i odjemnik (przykład 65.).

Przykład 65.

$f(0)=2$
$f(4)-f(2)=6$

$f(x)=ax+b$
$f(0)=0+b$
$2=0+b$
$\underline{b=2}$

$2=a+2$
$a=0$
$\underline{f(x)=2}$

$f(4)=4a+2$
$f(2)=2a+2$

$2a+2-4a-2=6$
$-2a=6$
$\underline{a=-3}$

$\underline{f(x)=-3x+2}$

Część zdających poprawnie wyznaczyła wartość współczynnika b, ale błędnie zinterpretowała równanie $f(4)-f(2)=6$, ponieważ sformułowała błędny wniosek, że $f(4)=8$ i $f(2)=2$ i na tym błędnym wniosku oparła dalsze rozwiązanie. Wśród zdających byli i tacy, którzy nie potrafili zinterpretować danego w treści zadania równania i tylko zapisali $f(0)=2$, więc $b=2$ i na tym kończyli rozwiązanie.

Duża grupa zdających, którzy właściwie zinterpretowali równanie z treści zadania $f(4)-f(2)=6$ i rozpoczynali rozwiązywanie zadania od obliczenia współczynnika kierunkowego a funkcji liniowej f i otrzymali $a=3$, popełniała błędy w obliczeniu współczynnika b. Przykładem 66. ilustrujemy takie błędne rozwiązanie.

Przykład 66.

$f(0)=2$
$f(4)-f(2)=6$

$\cancel{b=2}$
$x_0=2$

$0=3(0-2)+b$
$0=-6+b$
$b=6$

$y=ax+b$
$y=a(x-2)+b$
$f(4)=a(4-2)+b$
$f(2)=a(2-2)+b$
$2a+b=b+6$
$2a=6$
$a=3$
$y=3(x-2)+b$
$\cancel{y=3(x-2)+6}$
$f(x)=3(x-2)+6$

Niektórzy spośród zdających, którzy właściwie zinterpretowali dane równanie i zapisali poprawne równanie z niewiadomą a, popełniali błąd rachunkowy w jego rozwiązaniu. Następnie błędnie interpretowali informację, że funkcja f przyjmuje wartość 2 dla argumentu 0 i zapisywali niepoprawne równanie $0 = 2a + b$ (przykład 67.).

Przykład 67.

$F(x) = ax + b$ $\qquad$ $f(0)$: $0 = 2a + b$

$F(4) - F(2) = 6$

$F(4) = 4a + b$

$F(2) = 2a + b$

$F(4) - F(2) = 6$

$(4a + b) - (2a + b) = 6$

$2a + 2b = 6$

$a + b = 3$

$y = ax + b$

$\underline{y = -3x + 6}$

$\begin{cases} a + b = 3 & / \cdot (-1) \\ 2a + b = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -a - b = -3 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$

$a = -3$

$2(-3) + b = 0$ $\qquad$ $\underline{b = 6}$

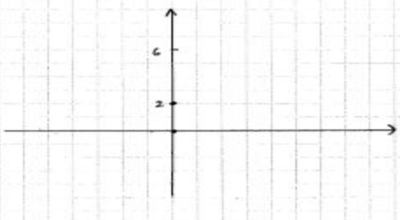
$-6 + b = 0$

Odpowiedź: Wzór funkcji $y = -3x + 6$

Wśród rozwiązań były również takie, w których zdający właściwie zinterpretowali dane równanie, zapisali poprawne równanie z niewiadomą a, poprawnie zinterpretowali informację, że funkcja f przyjmuje wartość 2 dla argumentu 0, ale popełniali błąd rachunkowy w obliczeniu iloczynu a oraz 0 i zapisywali błędne równanie $2 = a + b$ (przykład 68.).

Przykład 68.

$f(0) = 2$ $\qquad$ $f(4) - f(2) = 6$



$y = ax + b$

$2 = a + b$

$b = 2 - a$

$y = ax + 2 - a$

$2 = -1$

$\begin{cases} 2 = a + b \\ (4a + b) - (2a + b) = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} b = 2 - a \\ (4a + 2 - a) - (2a + 2 - a) = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} b = 2 - a \\ 3a + 2 - a - 2 = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} b = 2 - a \\ 2a = 6 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} b = -1 \\ a = 3 \end{cases}$

$y = 3x - 1$

$\boxed{11 - 5 = 6}$

Odpowiedź: $y = 3x - 1$

Niektórzy maturzyści w procesie konstrukcji modelu matematycznego danej sytuacji, przeprowadzali jej badanie, a następnie dokonywali wydzielenia obiektów i relacji między nimi, zapisywali dostrzeżone związki i zależności, ale nie potrafili ich odpowiednio połączyć, by osiągnąć choćby niewielki postęp na drodze do rozwiązania zadania. Przykład 69. stanowi takie właśnie rozwiązanie. Zdający poprawnie zinterpretował informację, że funkcja przyjmuje wartość 2 dla argumentu 0, ale nie wywnioskował z tego, że $b = 2$, obliczył wartości funkcji dla argumentów 4 i 2, ale nie zapisał poprawnego równania z niewiadomą a.

Przykład 69.

$f(0)=2 \qquad f(4)-f(2)=6$

$f(x)=ax+b \qquad 4a+b-2a+b=6$

$f(4)=4a+b \qquad 2a+2b=6 \quad |-2b$

$f(2)=2a+b \qquad 2a=6-2b \quad |:2$

$a=\frac{6-2b}{2}$

$\overset{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{6-2b}{\cancel{2}_1}+b-\overset{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{6-2b}{\cancel{2}_1}+b=6$

$2(6-2b)+b-1(6-2b)+b=6$

$12-\underline{4b}+\underline{b}-6+\underline{2b}+\underline{b}=6$

$0=0$

Inni zdający nie potrafili skorygować własnego rozwiązania pomimo refleksji nad sprzecznością między otrzymanym wynikiem a treścią zadania. Takie rozwiązania ilustrujemy przykładem 70., w którym zdający sporządził ilustrację graficzną do otrzymanego wyniku i zauważył sprzeczność, że dla otrzymanego współczynnika kierunkowego a, nie będzie spełniony warunek $f(4) - f(2) = 6$. Podjął zatem ponownie próbę rozwiązania zadania, ale nie był świadomy, że błędnie zapisał równanie z niewiadomą a.

Przykład 70.

$y = ax + b \qquad f(4) - f(2) = 6$

$f(0) = 2$

$a \cdot 4 + 2 - a \cdot 2 + 2 = 6$

$4a \underbrace{+2} - 2a \underbrace{+2} = 6$

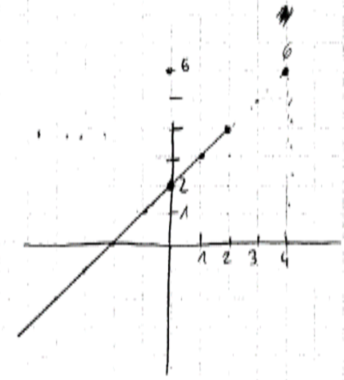
$2 = a \cdot 0 + b$

$2 = b$

$2a = 2 \quad |:2$

$a = 1$

$y = x + 2$



$\cancel{f(4) \quad 4a + b + 2a + b = 6}$

$\cancel{6a + 2b = 6 \quad |:2}$

$\cancel{3a + b = 3}$

$\cancel{3a + 2 = 3}$

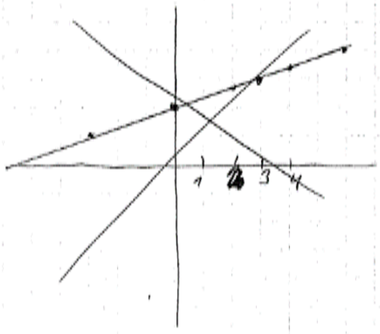
$\cancel{3a = 1}$

$\cancel{a = \frac{1}{3}}$

$\cancel{y = \frac{1}{3}x + 2}$

$\cancel{f(4) - f(2) = \left(\frac{4}{3} + 2\right) - \left(\frac{2}{3} + 2\right)}$

$\cancel{\frac{10}{3} - \frac{8}{3} = \frac{2}{3}}$



$\begin{cases} 2 = a0 + b \\ 4a + b - 2a + b = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} 2 = b \\ 2a + 2b = 6 \quad |:2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2 = b \\ a + b = 3 \end{cases}$

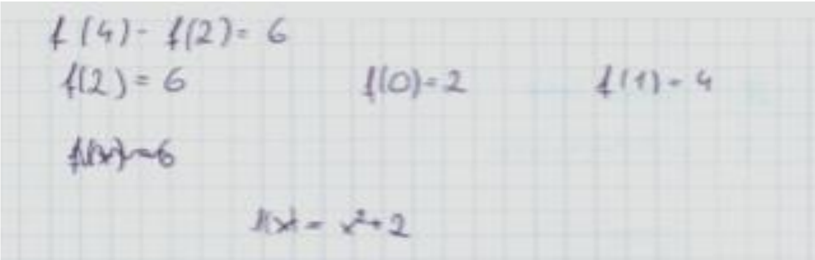
$a + 2 = 3$

$a = 1$

Odpowiedź: $y = x + 2$

Przykładem 71. ilustrujemy nieliczne rozwiązania, które świadczą o nieznajomości pojęcia funkcji liniowej.

Przykład 71.



$f(4)-f(2)=6$

$f(2)=6$ $f(0)=2$ $f(1)=4$

$f(x)=6$

$f(x)=x^2+2$

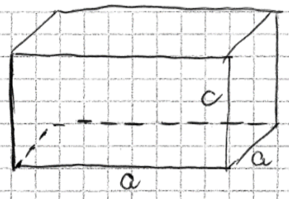
Maturzystom na poziomie rozszerzonym trudność sprawiło zadanie 15. – optymalizacyjne, wymagające zbudowania modelu matematycznego dla sytuacji realistycznej. W dużym stopniu na taki wynik wpłynął brak umiejętności budowania modelu matematycznego sytuacji realistycznej (wyznaczenie funkcji kosztu), wyznaczania dziedziny, uzasadniania, że wartość minimalna jest wartością najmniejszą, oraz fakt opuszczenia zadania przez niemały odsetek zdających. Kolejna duża grupa zdających była w stanie poprawnie wykonać tylko jeden z etapów zadania.

Zadanie optymalizacyjne, badające umiejętność modelowania matematycznego z wykorzystaniem rachunku różniczkowego, funkcjonuje w arkuszu egzaminacyjnym dla poziomu rozszerzonego od początku istnienia nowej formuły egzaminu, tj. od roku 2015. W poprawnym rozwiązaniu takiego zadania występują stałe elementy: określenie – najczęściej przez opis wzorem funkcji – konkretnego modelu matematycznego rozważanej sytuacji, uwzględnienie ograniczeń i zastrzeżeń wynikających z uwarunkowań geometrycznych lub algebraicznych, na przykład przez wyznaczenie dziedziny funkcji, zastosowanie rachunku różniczkowego do wyznaczenia wartości ekstremalnych przyjmowanych przez funkcję, ustalenie wartości największych lub najmniejszych z uwzględnieniem dziedziny badanej funkcji. Zadania te dotyczą zawsze badania sytuacji, w której występuje możliwość zmiany wartości lub rozmiarów pewnego obiektu.
Na tegorocznym egzaminie przedmiotem rozważań było poszukiwanie wymiarów prostopadłościennego pojemnika o podstawie kwadratowej o najmniejszym możliwym koszcie jego wykonania (zadanie 15.). Zdający mieli ustalić zakres wartości liczbowych dla podstawy i wysokości pojemnika, przy których zadany pojemnik istnieje, zbudować matematyczny model realnej sytuacji opisanej w postaci funkcji opisującej zależność kosztu wytworzenia pojemnika od krawędzi podstawy pojemnika, wyznaczyć wymiary pojemnika z najmniejszym możliwym kosztem jego wytworzenia. Zatem do poprawnego rozwiązania, po zbudowaniu modelu matematycznego danej sytuacji, wystarczyło konsekwentnie zrealizować strategię, uwzględniającą typowe etapy rozwiązania zadania optymalizacyjnego.

Oto poprawne rozwiązanie zadania (przykład 72.). Zdający w pierwszej kolejności rozważył właściwe geometryczne uwarunkowania oraz ograniczenia co do wymiarów pojemnika podane w treści zadania i wyznaczył zakres wartości, które mogą być przyjmowane jako krawędź podstawy prostopadłościanu o podstawie kwadratowej. Następnie wykorzystał informację o kosztach wytworzenia poszczególnych ścian pojemnika i wyznaczył zależność kosztu wytworzenia pojemnika od krawędzi jego podstawy. Na koniec wykorzystał rachunek różniczkowy do wyznaczenia wartości ekstremalnych, ustalił wartość zmiennej, przy której funkcja kosztu przyjmuje wartość najmniejszą i wyznaczył wymiary prostopadłościennego pojemnika o podstawie kwadratowej o najmniejszych kosztach wytworzenia.

Przykład 72.

Oblicz wymiary zbiornika, dla którego tak ustalony koszt wykonania będzie najmniejszy.



$abc = 144$

$a^2c = 144$

$c = \frac{144}{a^2}$

$0 < a \le 9$

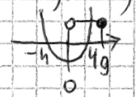
$0 < c \le 9$

i $\frac{144}{a^2} \le 9$

$144 \le 9a^2$

$9a^2 - 144 \ge 0$

$(3a-12)(3a+12) \ge 0$



$a \ge 4$ i $a \le 9$

$a \in \langle 4, 9\rangle$

$K(a) = a^2 \cdot 100 + 4 \cdot a \cdot c \cdot 75$

$K(a) = 100a^2 + 300a \cdot \frac{144}{a^2}$

$K(a) = 100a^2 + \frac{300 \cdot 144}{a}$

$D = \langle 4, 9\rangle$

$K'(a) = 200a - \frac{300 \cdot 144}{a^2}$

$K'(a) = 0 \iff 2\cancel{00}a = \frac{3\cancel{00} \cdot 144}{a^2}$

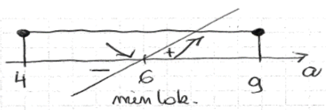
$2a^3 = 3 \cdot 144$

$a^3 = 3 \cdot 72$

$a^3 = 3 \cdot 2 \cdot 36$

$a^3 = 216$

$a = 6 \in D$



$K'(a) > 0$ dla $a \in (6, 9\rangle$
$K'(a) < 0$ dla $a \in \langle 4, 6)$ $\Rightarrow$ w punkcie $a = 6$ funkcja K ma minimum lokalne

$K \searrow$ w $\langle 4, 6\rangle$
$K \nearrow$ w $\langle 6, 9\rangle$ $\Rightarrow$ minimum lokalne jest jednocześnie wartością najmniejszą

Odp: $a = 6$ m
$c = \frac{144}{36} = 4$ m

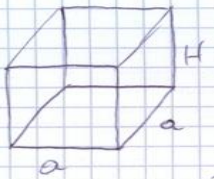
Wśród rozwiązań zadania optymalizacyjnego dominowały takie, w których zdający podawali błędną dziedzinę funkcji (przykład 73.) oraz rozwiązania bez poprawnego uzasadnienia istnienia wartości najmniejszej badanej funkcji (przykład 74.).

Przykład 73.

$V = 144\,m^3$ $\qquad V = P_p \cdot H = a^2 \cdot H$

$144 = a^2 \cdot H \qquad a, H > 0$

$H = \frac{144}{a^2} \qquad a, H \in (0, 9)$



koszt ← najmniejszy $\qquad P_c = a^2 + 4aH =$

$= a^2 + 4a \cdot \frac{144}{a^2} = a^2 + \frac{576}{a}$

$\cancel{P_c(a) = a^2 + 576 \cdot a^{-1}}$ $\qquad$ koszt $= a^2 100 + \frac{43200}{a}$

$\cancel{P_c'(a) = 2a - 576a^{-2} =}$ $\qquad$ koszt $= f(a)$

$f(a) > 0$

$200\ f'(a) = 200a - \frac{43200}{a^2} = \frac{200(a^3 - 216)}{a^2}$

$\underbrace{\frac{200}{a^2}} \cdot (a^3 - 216) > 0$

ten iloraz jest zawsze dodatni więc nie ma wpływu na znak nierówn

$a^3 - 216 > 0$

$a^3 > 216$

$a > 6$

	$(0, 6)$	6	$(6, 9)$
$f'(a)$	$-$	0	$+$
$f(a)$	↘	min	↗

najmniejszy kosz jest dla $a = 6$

$H = \frac{144}{36} = 4$

wymiary tego zbiornika to

$6 \times 6 \times 4$

Przykład 74.

Zadanie 15. (0–7)

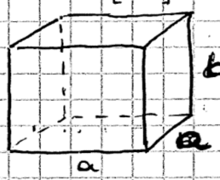
Pewien zakład otrzymał zamówienie na wykonanie prostopadłościennego zbiornika (całkowicie otwartego od góry) o pojemności $144\ m^3$. Dno zbiornika ma być kwadratem. Żaden z wymiarów zbiornika (krawędzi prostopadłościanu) nie może przekraczać 9 metrów. Całkowity koszt wykonania zbiornika ustalono w następujący sposób:

– 100 zł za $1\ m^2$ dna

– 75 zł za $1\ m^2$ ściany bocznej.

Oblicz wymiary zbiornika, dla którego tak ustalony koszt wykonania będzie najmniejszy.

$V = 144\ [m^3]$



~~a, b, c < 9 m~~

$a, b \leq 9\ [m]$

$D: \begin{cases} a \leq 9 \\ a > 0 \end{cases}$

$a \in (0; 9\rangle$

$a^2 \cdot b = 144 \Rightarrow b = \frac{144}{a^2}$

koszt całkowity $\rightarrow K(a) = 100 \cdot a^2 + 75 \cdot 4 \cdot a \cdot \frac{144}{a^2}$

$K(a) = 100a^2 + 43200 \cdot a^{-1}$

$K'(a) = 200a - 43200 \cdot a^{-2}$

WKIE $K'(a) = 0 \Leftrightarrow 200a - 43200a^{-2} = 0 \quad / \cdot a^2$

$200a^3 - 43200 = 0$

$a^3 = 216$

$a = 6 \in D$

$a = 6 \Rightarrow b = \frac{144}{36}$

$b = 4$

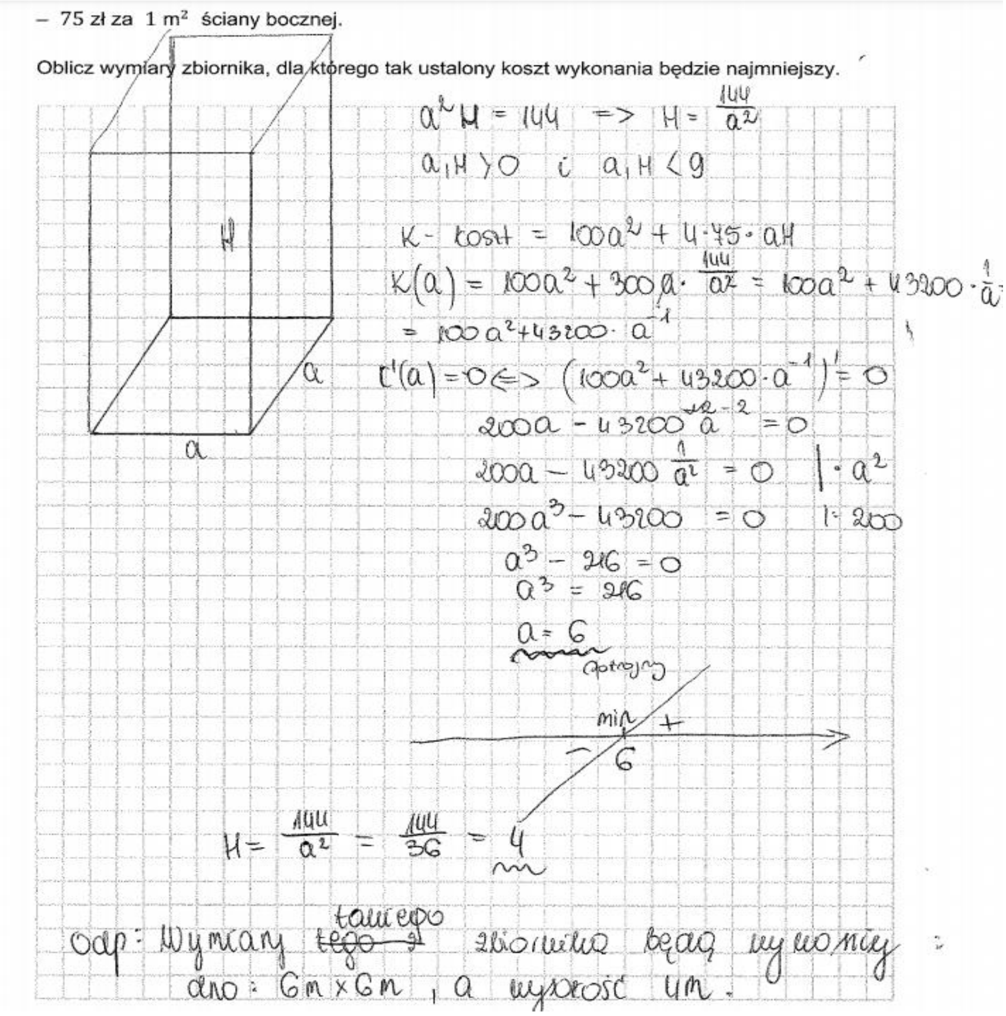
a	$(-\infty; 6)$	6	$(6; \infty)$
$K'(a)$	$-$	0	$+$
$K(a)$	$\searrow$	$K(6)$ min	$\nearrow$

wymiary: $6 \times 6\ m \times 4\ m$

Zdający wyznaczył błędną dziedzinę funkcji kosztu jako przedział $(0,9]$, a w uzasadnieniu najmniejszej wartości określa monotoniczność funkcji kosztu w $\mathbb{R}$.

Inni zdający, na etapie rozwiązania zadania wymagającym wykazania się umiejętnością zastosowania analizy matematycznej, byli w stanie wykonać tylko tę część rozwiązania, w której należy wyznaczyć pochodną funkcji i ustalić własności pochodnej potrzebnych do wnioskowania o ekstremach funkcji, a pomijali w swoich rozwiązaniach istotną część rozwiązania zadania optymalizacyjnego – uzasadnienie, że wartość ekstremalna jest wartością najmniejszą. Przykładem może być rozwiązanie prezentowane poniżej (przykład 75.). W przedstawionej sytuacji zdający koncentruje się na tej części rozwiązania, w której może wykazać się jedynie znajomością rachunku różniczkowego i zastosowaniem pochodnych do wyznaczania wartości ekstremalnych funkcji. Wyznaczenie możliwych wartości dla argumentów funkcji, dla których analizowane zagadnienie ma sens nie zostało przeprowadzone poprawnie, a uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji opisującej model w rozwiązaniu nie pojawiło się.

Przykład 75.



– 75 zł za 1 m² ściany bocznej.

Oblicz wymiary zbiornika, dla którego tak ustalony koszt wykonania będzie najmniejszy.

$a^2H = 144 \Rightarrow H = \frac{144}{a^2}$

$a, H > 0$ i $a, H < 9$

K – koszt $= 100a^2 + 4\cdot 75\cdot aH$

$K(a) = 100a^2 + 300a\cdot\frac{144}{a^2} = 100a^2 + 43200\cdot\frac{1}{a}$

$= 100a^2 + 43200\cdot a^{-1}$

$K'(a) = 0 \Leftrightarrow (100a^2 + 43200\cdot a^{-1})' = 0$

$200a - 43200\, a^{-2} = 0$

$200a - 43200\,\frac{1}{a^2} = 0 \quad |\cdot a^2$

$200a^3 - 43200 = 0 \quad |:200$

$a^3 - 216 = 0$

$a^3 = 216$

$a = 6$

optymalny

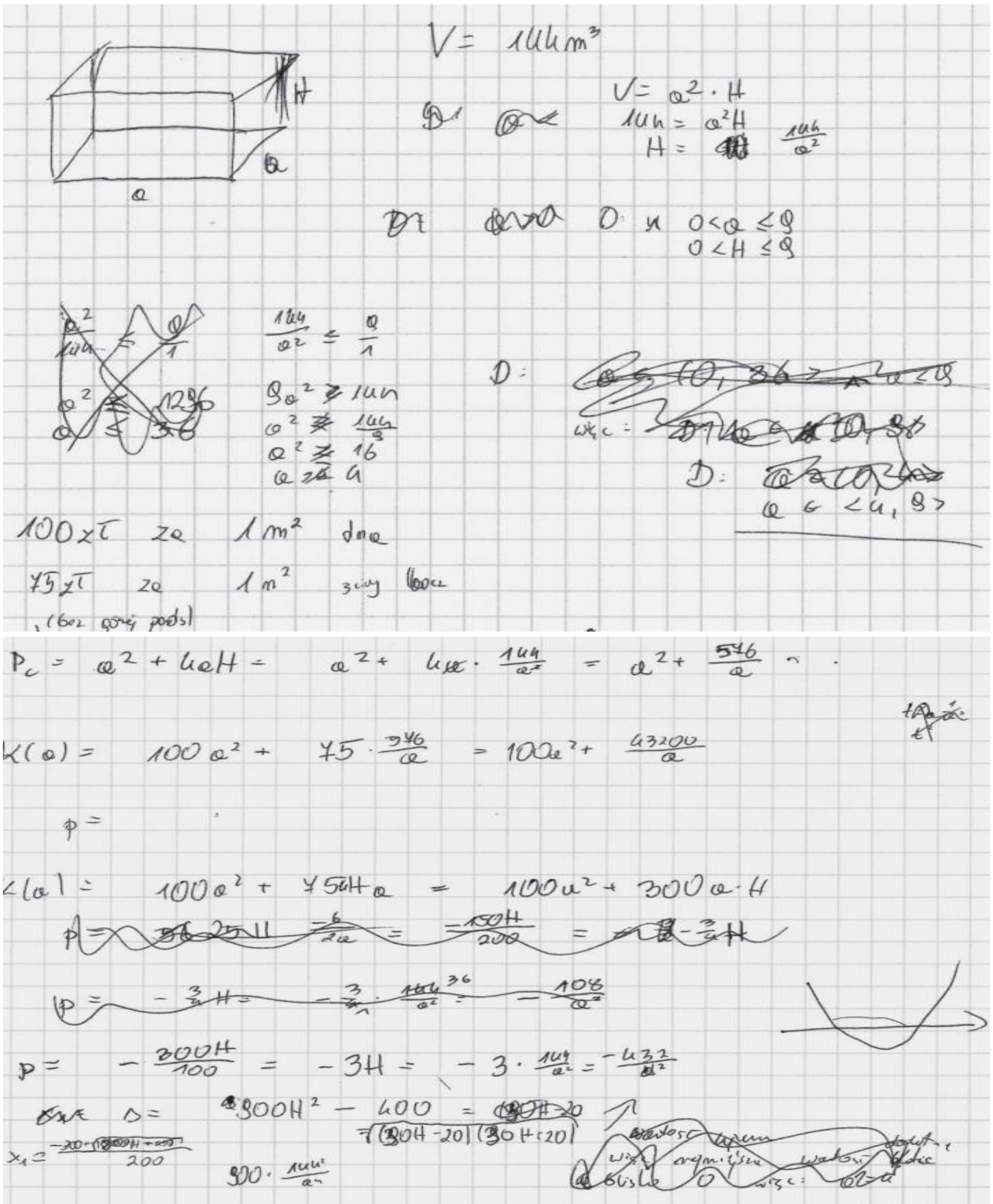
min + − 6

$H = \frac{144}{a^2} = \frac{144}{36} = 4$

Odp: Wymiary ~~tego~~ takiego zbiornika będą wynosiły: dno: 6m × 6m, a wysokość 4m.

Wśród zdających, którzy zbudowali poprawny model matematyczny opisanej sytuacji, na etapie rozwiązania zadania wymagającym wykazania się umiejętnością zastosowania analizy matematycznej, byli tacy, którzy stosowali, niewłaściwą w tym zadaniu, metodę prób i błędów, na podstawie wyników której wnioskowanie o najmniejszej wartości nie było uprawnione (przykład 76.).

Przykład 76.



$V = 144 m^3$

$V = a^2 \cdot H$

$144 = a^2 H$

$H = \frac{144}{a^2}$

$0 < a \le 9$

$0 < H \le 9$

$\frac{144}{a^2} \le \frac{9}{1}$

$9a^2 \ge 144$

$a^2 \ge \frac{144}{9}$

$a^2 \ge 16$

$a \ge 4$

D: $a \in \langle 4, 9 \rangle$

100 zł za $1 m^2$ dna

75 zł za $1 m^2$ ścian bocznych (bez górnej podst.)

$P_c = a^2 + 4aH = a^2 + 4a \cdot \frac{144}{a^2} = a^2 + \frac{576}{a}$

$K(a) = 100a^2 + 75 \cdot \frac{576}{a} = 100a^2 + \frac{43200}{a}$

$K(a) = 100a^2 + 75 \cdot 4Ha = 100a^2 + 300a \cdot H$

$p = -\frac{300H}{100} = -3H = -3 \cdot \frac{144}{a^2} = -\frac{432}{a^2}$

$\Delta = 300H^2 - 400 = (30H - 20)(30H + 20)$

$K(9) = 8100 + 4800 = 12900$

$K(5) = 2500 + 8640 = 1140$

$K(6) = 3600 + 7200 = 10800$

$K(4) = 4900 + 6171 = 11070$

$K(6,5)$ 4225 $+\cancel{10220} = \cancel{5247}$

$\cancel{6647} = \cancel{10871}$

$K(6,25) = 3906,25 + 6912 = 10818,75$

$K(5,5) = 3025 + 7854 = 10879$

$K(5,75)$ $3306,25$ 17513

42,25

38,0625

5,5 30,25

33,0625

$D: a \in \langle 4, 8 \rangle$ $V = 144\ m^3$ $H = \frac{144}{a^2}$

$P_c = a^2 + 4a \cdot H = a^2 + 4 \cdot a \cdot \frac{144}{a^2}$

$= a^2 + \frac{576}{a} = a^2 + \frac{576}{a}$

$K(a) = 100a^2 + 75 \cdot \frac{576}{a} = 100a^2 + \frac{43200}{a}$

$p = 6 \in D$

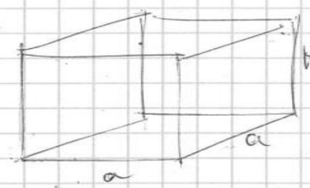
$K(6) = 3600 + 7200 = 10800 \leftarrow p(min)$

$a = 6$

$V = 6 \cdot 6 \cdot \frac{144}{36} = 144$ ✓

Warto podkreślić, że wśród maturzystów zdarzały się osoby poszukujące własnego sposobu rozwiązania, które zbudowały nieschematyczny, poprawny model matematyczny realnej sytuacji. Należy tym bardziej docenić takie działania, zwłaszcza w przypadku zadań postrzeganych przez większość zdających jako trudne. Przykład 77. jest ilustracją takiego rozwiązania. Zdający przedstawił model matematyczny opisanej sytuacji w postaci funkcji kosztów zapisanej z wykorzystaniem proporcji cen 1 i $\frac{3}{4}$, a nie 100 zł i 75 zł (niestety ustalił błędną dziedzinę funkcji i popełnił usterkę w zapisie uzasadnienia istnienia wartości najmniejszej).

Przykład 77.



$V = 144 \ m^3$

$0 < a, H < 9m$

100 zł – $1m^2$ dno

75 zł – $1m^2$ ść. b

Szukane:

a, H takie, żeby P było min

$P = a^2 + 4 \cdot a \cdot H$

$V = a^2 \cdot H = 144$, $H = \frac{144}{a^2}$ $\Rightarrow P(a) = a^2 + 4 \cdot a \cdot \frac{144}{a^2} = a^2 + \frac{576}{a}$

$f(x) = 1 \cdot a^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{576}{a} = a^2 + \frac{432}{a}$

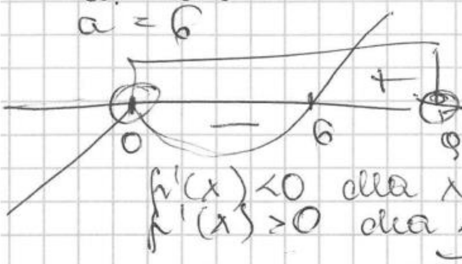
$f'(x) = 2a + \frac{-432}{a^2} = \frac{2a^3 - 432}{a^2} = 0$ $\quad D: a \in (0, 9)$

$(2a^3 - 432)a^2 = 0$

$2(a^3 - 216)a^2 = 0$

$a^3 = 216$

$a = 6$



$f'(x) < 0$ dla $x \in (0, 6) \Rightarrow f \downarrow$

$f'(x) > 0$ dla $x \in (6, 0) \Rightarrow f \nearrow$

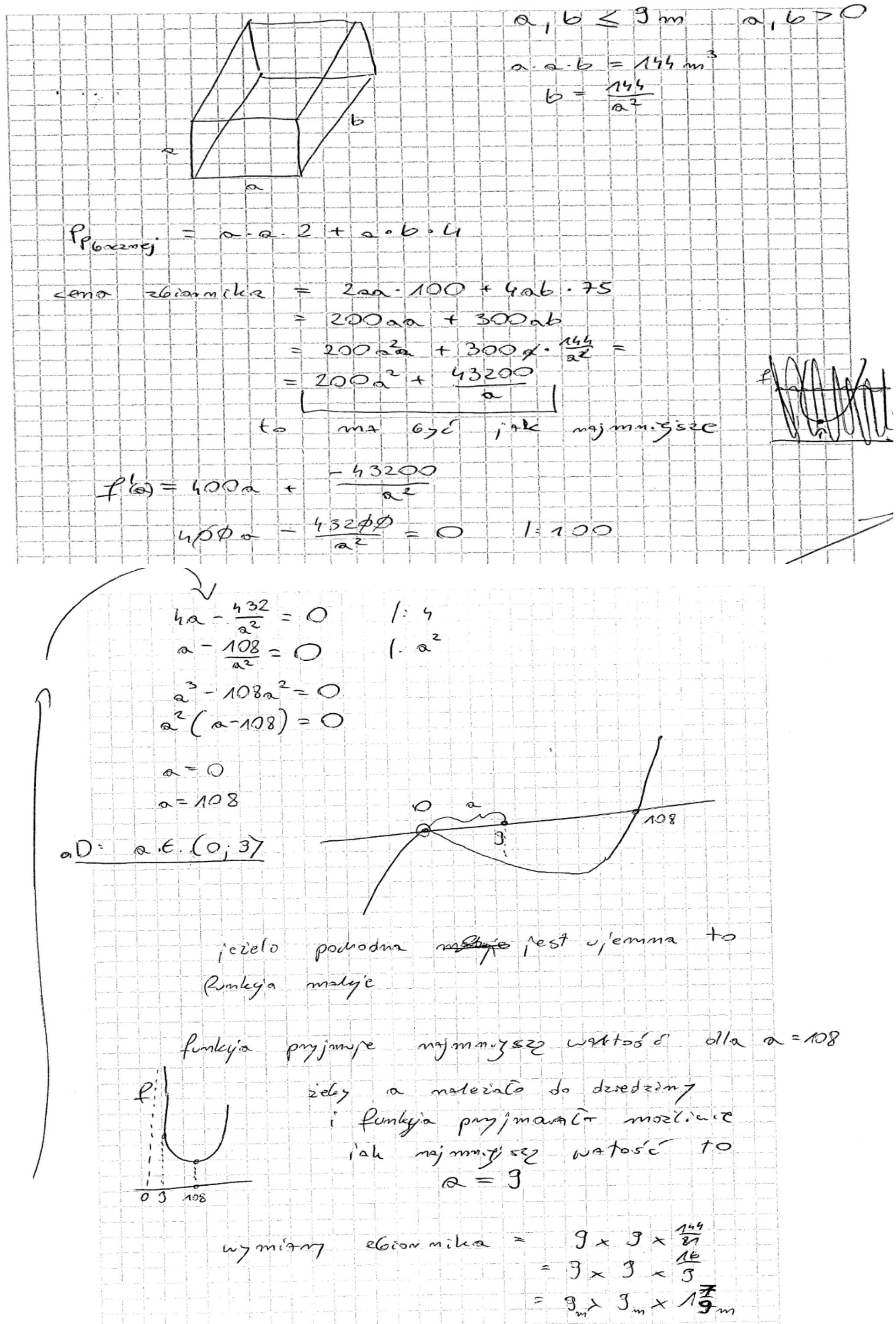
$f(6) = f_{min}$

$a = 6m \Rightarrow H = \frac{144}{36} = 4m$

Odp: $6m \times 6m$ – podstawa, $H = 4m$

Kolejna duża grupa zdających nieuważnie odczytała z treści zadania uwarunkowania dotyczące liczby ścian tworzonego pojemnika. Zdający albo nie uwzględniali informacji, że pojemnik miał być otwarty od góry i zbudowali model sytuacji w postaci funkcji kosztu wytworzenia pojemnika z obiema podstawami (przykład 78.), albo nie uwzględniali wszystkich ścian bocznych w swoim rozwiązaniu przy modelowaniu funkcji kosztu (przykład 79.).

Przykład 78.


$a, b \le 9\,m \quad a, b > 0$

$a \cdot a \cdot b = 144\,m^3$

$b = \frac{144}{a^2}$

$P_{P\,bocznej} = a \cdot a \cdot 2 + a \cdot b \cdot 4$

cena zbiornika $= 2aa \cdot 100 + 4ab \cdot 75$

$= 200aa + 300ab$

$= 200a^2 + 300\cancel{a} \cdot \frac{144}{a^2} =$

$= \underbrace{200a^2 + \frac{43200}{a}}$

to ma być jak najmniejsze

$f'(a) = 400a + \frac{-43200}{a^2}$

$40\cancel{0}a - \frac{432\cancel{00}}{a^2} = 0 \quad /:100$

$4a - \frac{432}{a^2} = 0 \quad /:4$

$a - \frac{108}{a^2} = 0 \quad /\cdot a^2$

$a^3 - 108a^2 = 0$

$a^2(a - 108) = 0$

$a = 0$

$a = 108$

$D: a \in (0; 3\rangle$

jeżeli pochodna ~~malejąc~~ jest ujemna to funkcja maleje

funkcja przyjmuje najmniejszą wartość dla $a = 108$

żeby a należało do dziedziny i funkcja przyjmowała możliwie jak najmniejszą watość to $a = 9$

wymiary zbiornika $= 9 \times 9 \times \frac{144}{81}$

$= 9 \times 9 \times \frac{16}{9}$

$= 9_m \times 9_m \times 1\frac{7}{9}m$

Przykład 79.

$V = 144\,m^3 \Rightarrow a^2 \cdot h = 144\,m^3$

$P_p = a^2$

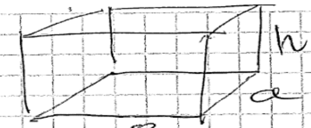
$P_b = ah$

$Koszt\ P_p = a^2 \cdot 100$

$Koszt\ P_b = ah\,75$

$Koszt_c = a^2 \cdot 100 + 75ah$

$h = \frac{144}{a^2}$



zał

$0 < a \le 9$

$0 < h \le 9$

$K_c = \cancel{144}\,100a^2 + \frac{75 \cdot 144}{a^2}\cancel{a} = 25\left(4a^2 + \frac{3 \cdot 144}{a}\right) =$

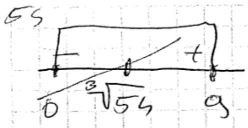
$= 100\underbrace{\left(a^2 + \frac{108}{a}\right)}_{G(a)}$

$G'(a) = 2a\cancel{4} - \frac{108}{a^2}$

$2a - \frac{108}{a^2} \ge 0$

$2a^3 - 108 \ge 0$

$a^3 \ge 54$



$G(a) \nearrow$ dla $a \in (0; \sqrt[3]{54}\rangle$

$G(a) \searrow$ dla $a \in \langle\sqrt[3]{54}; 9\rangle$

$\cancel{a = \sqrt[3]{54}}$

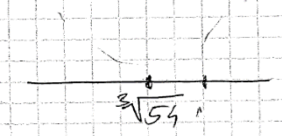
$\cancel{h = \frac{144}{\sqrt[3]{54^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{54}} = \frac{144\sqrt[3]{54}}{54} = \frac{8}{3}\sqrt[3]{54} > 9}$

zał. $9 = \frac{144}{a^2} \Rightarrow a^2 = \frac{144}{9}$

$a \le \frac{12}{3}$

$a \le 4$

$a \le \sqrt[3]{64}$



$\Rightarrow a = \sqrt[3]{54}$

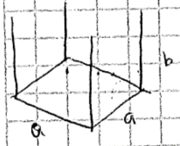
$h = \frac{144}{\sqrt[3]{54^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{54}} = \frac{144\sqrt[3]{54}}{54} = \frac{8}{3}\sqrt[3]{54}$

Niemała część zdających nie uwzględniła w modelowaniu funkcji kosztu, a tylko funkcję pola powierzchni pojemnika i przeprowadziła badanie takiej funkcji (przykład 80.).

Przykład 80.

$P_c = P_p + P_b$ $V = 144 m^3$ $V = a \cdot a \cdot b = a^2 \cdot b$

$a > 0$
$b > 0$
$a < 9$
$b < 9$



$P_c = a^2 + 4a \cdot b$

$P_c \to$ najmn

$144 = a^2 \cdot b$

$b = \frac{144}{a^2}$

$\frac{144}{a^2} > 0$ $\frac{144}{a^2} < 9$

144 $144 < 9a^2$

$a^2 > \frac{144}{9}$

$a^2 > 16$

$a^2 - 16 > 0$

$(a-4)(a+4) > 0$

$-4 \quad 0 \quad 4 \quad 9$

$\underbrace{D_{P(a)}: a \in (4; 9)}$

$P(a) = a^2 + 4 \cdot \frac{144}{a^2}$

$\underbrace{P(a) = \frac{a^4 + 576}{a^2}}$

$D_{P(a)} = D_{P'(a)}$

$P'(a) = \frac{4a^3 \cdot a^2 - 2a(a^4 + 576)}{a^4}$

$P'(a) = \frac{4a^5 - 2a^5 - 1152a}{a^4}$

$P'(a) = \frac{2a^5 - 1152a}{a^4}$

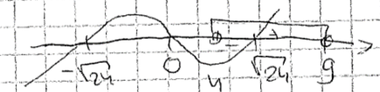
$2a^5 - 1152a = 0 \mid : 2$

$a^5 - 576a = 0$

$a(a^4 - 576) = 0$

$a(a^2 + 24)(a^2 - 24) = 0$

$a(a^2 + 24)(a - \sqrt{24})(a + \sqrt{24}) = 0$



a	4	$(4, \sqrt{24})$	$\sqrt{24}$	$(\sqrt{24}, 9)$	9
$P'(a)$	X	$-$	0	+	X
$P(a)$	X	$\searrow$		$\nearrow$	X

min lokalne

$P(a)$ będzie najmniejsze dla $a = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$a = \sqrt{24}\,m \in D_{P(a)}$

$b = \frac{144}{(\sqrt{24})^2} = \frac{144}{24} = 6\,m$

$a \times a \times b$

$\underline{2\sqrt{6}\,m \times 2\sqrt{6}\,m \times 6\,m}$ $\quad 2\sqrt{6}_m;\ 2\sqrt{6}_m;\ 6_m$

gdy $P(a) \to$ najmn to koszt wykonania najmniejszy

Powyższe przykłady wskazują na to, iż maturzyści niewłaściwie rozwiązywali zadanie optymalizacyjne przy wykorzystaniu rachunku pochodnych. Powszechnym zjawiskiem jest brak zrozumienia istoty zagadnień optymalizacyjnych, a w szczególności konieczności rozważania geometrycznych i algebraicznych uwarunkowań oraz kontekstów realistycznych przy określaniu modelu matematycznego, a także rozumienia właściwego zastosowania rachunku różniczkowego do badania własności funkcji.
Podkreślić należy, że materiały informacyjne dotyczące egzaminu maturalnego w formule obowiązującej od 2015 r. od początku zawierały zapis o zamieszczaniu w każdym arkuszu maturalnym dla poziomu rozszerzonego zadania z zagadnieniem optymalizacyjnym. Problematyka, którą te zadania poruszają, wymaga zbudowania matematycznego modelu rozważanej sytuacji lub wykazania poprawności podanego modelu, a następnie wieloetapowej strategii rozwiązania. Stąd wysoka liczba punktów możliwych do uzyskania za rozwiązanie tego typu zadania, znacząco decydująca o wyniku całego egzaminu.

Zagadnienia optymalizacyjne są często traktowane przez uczniów i nauczycieli jako swoisty algorytm postępowania, którego stałe elementy (etapy) wymagają każdorazowo specyficznej realizacji ze względu na różnorodność badanych sytuacji. Jednakże odmienność kolejnych rozważanych zagadnień od wcześniej zbadanych w rozwiązanych już zadaniach decyduje o tym, że maturzyści uważają ten typ zadań za trudny.

Kolejnym zadaniem na poziomie podstawowym wymagającym stworzenia modelu matematycznego było zadanie 34., sprawdzające umiejętność obliczania prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach i zastosowania klasycznej definicji prawdopodobieństwa. Zadanie dotyczyło dwukrotnego rzutu symetryczną sześcienną kostką do gry. Należało obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 4 lub 5, lub 6.
Zdający musiał obliczyć liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 36$, wyznaczyć wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, obliczyć ich liczbę i, korzystając z klasycznej definicji prawdopodobieństwa, obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. Liczbę elementów zdarzenia A zdający mógł wyznaczyć wypisując wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A:
$A = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\}$
(przykład 81.) i zliczyć je, bądź sporządzając tabelę ilustrującą sytuację opisaną w zadaniu (przykład 82.), badź rysując drzewo stochastyczne rozważanego doświadczenia (przykład 83.).

Przykład 81.

$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$
$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)$
$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)$
$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)$
$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)$
$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ $\qquad |\Omega| = 36$

$P(A) = \frac{12}{36}$ $\qquad |A| = 12$

Przykład 82.

$\overline{\overline{\Omega}} = 6 \cdot 6 = 36$

A – suma oczek równa 4 lub 5 lub 6

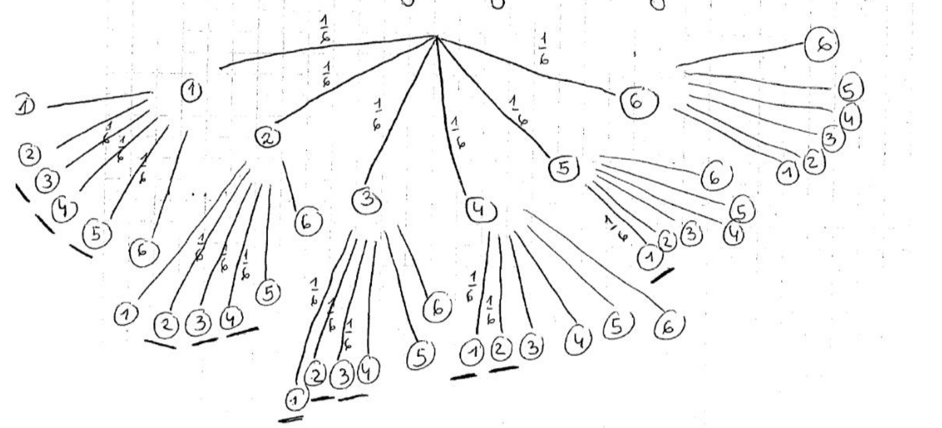
+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4.	5	6	7	8	9
4.	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$\overline{\overline{A}} = 12$

$P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

Przykład 83.

A - suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 4 lub 5 lub



$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$

$P(A) = \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) \cdot 12 = \frac{1}{36} \cdot \frac{12}{1} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

Część zdających pomijała niektóre zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A i otrzymywała błędny wynik. Przykładami 84. i 85. ilustrujemy takie błędne rozwiązania.

Przykład 84.

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$|\Omega| = 36$

$|A| = 11$

$P(A) = \frac{11}{36}$

$\underbrace{\{1,2,3,4,5,6\}}_{6}$ – cyfry z kostki

Dwukrotnie rzucamy $\rightarrow 6 \cdot 2 = 36$

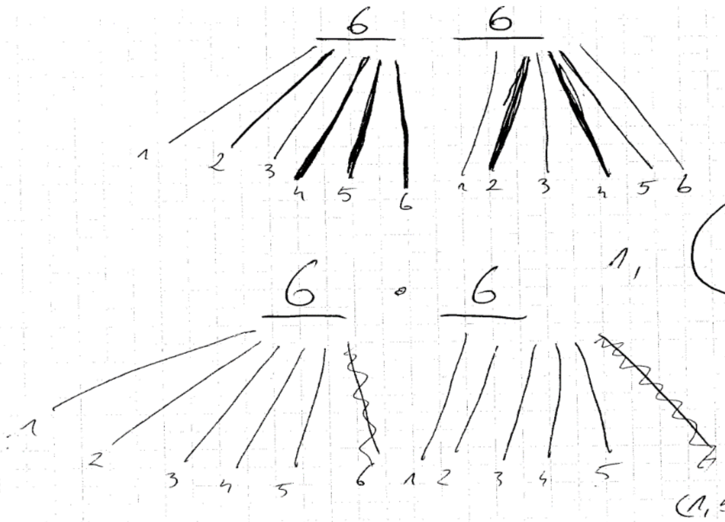
+ suma	1	2	3	4	5	6		
1			X	X	X		✓	3
2		X	X				✓	2
3	X	X	X				✓	3
4	X	X					✓	2
5	X						✓	1
6								

$\left.\begin{matrix}3\\2\\3\\2\\1\end{matrix}\right\} 11$

Suma 4, 5 lub 6

Odpowiedź: $P(A) = \frac{11}{36}$ Prawdopodobieństwo wynosi $\frac{11}{36}$.

Przykład 85.



1,

$\frac{7}{36}$

(1,5) (2,2)
(2,3) (4,2) (1,3)
(1,4) (3,3 (

(1,5) = 6
(1,4) = 5
(1,3) = 4
(2,3) (3,3)
(2,4)
(2,2)

Odpowiedź: prawdopodobieństwo wynosi $\frac{7}{36}$

Niektórzy zdający błędnie wyznaczali zbiór zdarzeń elementarnych multiplikując rzuty kostką w danym doświadczeniu i obliczali liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych jako 72, co świadczy o braku umiejętności budowania modelu przestrzeni probabilistycznej.

Kolejnym zadaniem, które sprawiło problemy tegorocznym maturzystom zdającym egzamin na poziomie rozszerzonym, wymagające od zdających umiejętności modelowania matematycznego, było zadanie 9. Poziom wykonania tego zadania to 30%. Maturzyści zmierzyli się w tym zadaniu z zagadnieniem prawdopodobieństwa warunkowego. Zdający musiał prawidłowo obliczyć liczbę wszystkich liczb czterocyfrowych podzielnych przez 18 oraz liczb podzielnych przez 18 i 15 (czyli przez 90) oraz zastosować wzór na prawdopodobieństwo warunkowe.
Aby obliczyć liczbę wszystkich liczb czterocyfrowych podzielnych przez 18, zdający mógł skorzystać z faktu, że co osiemnasta liczba czterocyfrowa jest podzielna przez 18 (przykład 86.) lub zastosować wzór na ciąg arytmetyczny (przykład 87.). Poniżej zamieszczamy poprawne rozwiązania tego zadania.

Przykład 86.

$X/15 \to X/3 \wedge X/5$

suma cyfr ~~równa się~~ jest podzielna przez 3

ostatnia cyfra to 0 lub 5

$X/18 \to X/9 \wedge X/2$

suma cyfr jest podzielna przez 9

ostatnia cyfra przyjęta $\{0,2,4,6,8\}$

X – liczby czterocyfrowe o sumie cyfr podzielnej przez 9 i ostatniej cyfrze równej 0

Liczb 4 cyfrowych jest $9999 - 999 = 9000$

Co 18 dzieli się przez 18 czyli $|\Omega| = 500$

Liczby które dzielą się przez 18 i 15 to liczby podzielne przez 90, ~~bo NWD~~

$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$

NWW = 90

Liczb 4 cyfrowych podzielnych przez 90 jest 100, bo co 90 z nich dzieli 90. $\Rightarrow |A| = 100$

ilość zdarzeń gdy wylosowana liczba jest podzielna i przez 15 i 18.

~~P(A)~~

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{100}{500} = \frac{1}{5}$

Przykład 87.

Dośw: z liczb naturalnych, 4-cyfrowych losujemy 1 liczbę
A – wylosowana liczba jest podz. przez 15.
B – wylosowana liczba jest podz. przez 18.

S: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\overline{\overline{A \cap B}}}{\overline{\overline{B}}}$ $A \cap B$ – liczba podz. przez 15 i 18

od 1000 do 9999 ⟶ 9000 liczb

$a_1 = 1005 \mid 15$ $b_1 = 1008 \mid 18$

$a_n = 9990$ $b_n = 9990$

$1005 + (n-1) \cdot 15 = 9990$ $1008 + (n-1) \cdot 18 = 9990$

$15(n-1) = 8985$ $18(n-1) = 8982$

$n - 1 = 599$ $n - 1 = 499$

$n = 600$ liczb $n = 500$ liczb

$\overline{\overline{B}} = 500$

$1080/15$ $1080/18$

$c_1 = 1080$ $c_n = 9990$

$1080 - 990 = 90 = r$

$1080 + (n-1) \cdot 90 = 9990$

$90(n-1) = 8910$

$(n-1) = 99$

$n = 100$ liczb

$\overline{\overline{A \cap B}} = 100$

$P(A/B) = \frac{100}{500}$

$P(A/B) = \frac{1}{5}$

Część zdających zauważała, że liczby podzielne przez 15 i 18, to liczby podzielne przez 90 i na takim wniosku opierała dalsze rozwiązanie (przykład 88.).

Przykład 88.

ile przez 18

1008 – min

9990 – max

$a_1 = 1008$, $r = 18$, $a_n = 9990$

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$9990 - 1008 = 18(n-1)$

$8982 = 18n - 18$

$9000 = 18n$

$n = 500$

$\Omega = 500$

$P = \frac{100}{500} = \frac{1}{5}$

3·5 , 2·3·3

$NWW(15, 18) = 90$

czyli liczba musi być podzielna przez 90

1080 – najmniejsza liczba

9990 – największa liczba

jest to ciąg arytmetyczny gdzie $a_1 = 1080$, $r = 90$

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$9990 = 1080 + (n-1)90$

$8910 = 90n - 90$

$9000 = 90n$

$n = 100$

podzielnych przez 15 i 18 jest 100

$A = 100$

Niektórzy zdający ilustrowali sposób obliczania liczby liczb podzielnych przez 15 oraz przez liczby 15 i 18 poprzez wypisanie kilku początkowych liczb spełniających te warunki, a następnie odrzucali liczby trzycyfrowe oraz mniejsze i podawali poprawną liczbę (przykład 89.).

Przykład 89.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$\overline{\overline{B}}$ - prawd. wylosowania liczby podzielnej przez 18 ← (moc zdarzenia)

$\overline{\overline{A}}$ - prawd. wylosowania liczby podzielnej przez 15

$\overline{\overline{A\cap B}}$ - prawd. wylosowania liczby podzielnej przez 15 i 18

$\overline{\overline{A\cap B}}$ - 90, 180, 270, 360, ... => 111 takich liczb

$\overline{\overline{B}}$ - 18, 36, 54, ... => 555 takich liczb

$\overline{\overline{A\cap B}} = 111 - 11 = 100$

$\overline{\overline{B}} = 555 - 55 = 500$

ODJĄŁEM TRZYCYFROWE I MNIEJSZE

$P(A|B) = \frac{1}{5}$

Wśród zdających byli i tacy, którzy choć zastosowali poprawną metodę zliczania elementów zbioru A i $A \cap B$ oraz poprawnie obliczyli moce tych zdarzeń, to obliczając prawdopodobieństwo warunkowe do wzoru, podstawiali nieodpowiednie dane (przykład 90.).

Przykład 90.

1000 → 9999 $\quad$ 9999 − 1000 + 1 = 9000 możliwości

$|\Omega| = 9000$

1008 → 9990 ~~liczby podzielne przez 18~~

$a_1 = 1008$ $\quad$ $9990 = 1008 + (n-1) \cdot 18$
$a_n = 9990$ $\quad$ $8982 = 18n - 18$
$r = 18$ $\quad$ $9000 = 18n$
$n = ?$ $\quad$ $500 = n$ → 500 liczb podzielnych przez 18

NWD = 90 = 5 · 18 = 6 · 15

1080 → 9990

$a_1 = 1080$ $\quad$ $9990 = 1080 + (n-1)90$
$a_n = 9990$ $\quad$ $8910 = 90n - 90$
$r = 90$ $\quad$ $9000 = 90n$
$n = ?$ $\quad$ $100 = n$ → 100 liczb podzielnych przez 15 i 18

$|A| = 100$
A – liczba jest podzielna przez 15 i 18

$P(A) = \frac{100}{9000} = \frac{1}{90}$

Niektórzy ze zdających błędnie wyznaczali już sam zbiór zdarzeń elementarnych (przykład 91.).

Przykład 91.

Zadanie 9. (0–4)
Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 15, jeśli wiadomo, że jest ona podzielna przez 18.

$\Omega = 8999$

liczby ⟨1000, 9999⟩

~~Podzielne przez 18 są: 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, 180 itd. ...~~

B: Podzielne przez 18 są 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144 itd. | W 9900 jest 550 takich liczb w pozostałych 99 liczbach liczb podzielnych przez 18 jest jeszcze 5 takich liczb.

W pierwszym 1000 jest 55 takich liczb
⇒ liczb podzielnych przez 18 w tym przedziale jest 550 + 5 − 55 = 500 = A

A: liczby podzielne przez 15 i 18 w tym przedziale to wielokrotności liczby 90.
1080, 1170, 1260, 1350, 1440, 1530, 1620, 1710, 1800, 1890, 1980 w każdym tys. jest 11 takich liczb ⇒ 88 takich liczb w całym przedziale.

$P(B) = \frac{500}{8999}$ $\quad$ $P(A \cap B) = \frac{88}{8999}$

$P(A|B) = \frac{\frac{88}{8999}}{\frac{500}{8999}} = \frac{88}{500} = \frac{22}{125}$

Część zdających miało dobrą ideę na zbudowanie modelu probabilistycznego z wykorzystaniem ciągu arytmetycznego, ale błędnie stosowali wzór na n – ty wyraz ciągu arytmetycznego. Przykładem 92. ilustrujemy takie rozwiązanie.

Przykład 92.

$\Omega = \cancel{10000}\ 9000$

P(A) – wylosowana liczba jest podzielna przez 15 ~~i 18~~

liczba jest podzielna przez 18, jeśli jest podzielna przez 9 i 2

liczba jest podzielna przez 15, jeśli jest podzielna przez 3 i 5

a zatem liczba musi być podzielna przez: $9 \cdot 2 \cdot 5 = 90$

Pierwsza liczba podzielna przez 18 jest 1008.

Pierwsza liczba podzielna przez 15 i 18 jest 1080

Ciąg arytmetyczny: $a_1 + 90\ r$

$a_1 = 1080$ $r = 90$ n – liczba podzielnych liczb przez 15 i 18

$9999 = 1080 + n \cdot 90 + r$

$90n + r = 8919$

$r = 9$

$n = 99$

a zatem jest 99 liczb podzielnych przez 15 i 18.

Podzielne tylko przez 18: $a_{1_2} = 1008$ $r_2 = 18$

$9999 = 1008 + 18n_2 + r_2$

$8991 = 18n_2 + r_2$

$8991 = 499_{n_2} + 9$

A zatem jest 499 liczb podzielnych przez 18 $\Omega_2 = 499$

$P(A) = \frac{99}{499}$

Część zdających błędnie ustaliła pierwszy lub ostatni wyraz ciągu arytmetycznego, lub różnicę tego ciągu. Przykład 93. ilustruje takie rozwiązanie.

Przykład 93.

$|\Omega| = 9\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 9000$

$18:3$
$6:3$
$2:2$
1

A – podzielne przez 18 = podzielne przez 3.

$\cancel{a_1 = 1000}$

$a_1 = 1008$ } $r = 18$
$a_2 = 1026$

$a_n = 1008 + (n-1)18$

$a_n = 9000$

$9000 = 1008 + 18n - 18$

$\cancel{S_n = \frac{1008+9000}{2}\cdot n}$

$n = 445$

tyle jest liczb podzielnych przez 18

$b_1 = 1005$ } $r = 15$

$b_n = 9000$

b_n $9000 = 1005 + 15n - 15$

$n = 534$ liczb podzielnych przez 15

najmniejsza wspólna w 18 i $15 \to 90$

$c_1 = 1080$ } $r = 90$

$c_n = 9000$

$c_n =$

$9000 = 1080 + 90n - 90$

$n = 89$ wspólne

podzielne przez 18 i 15

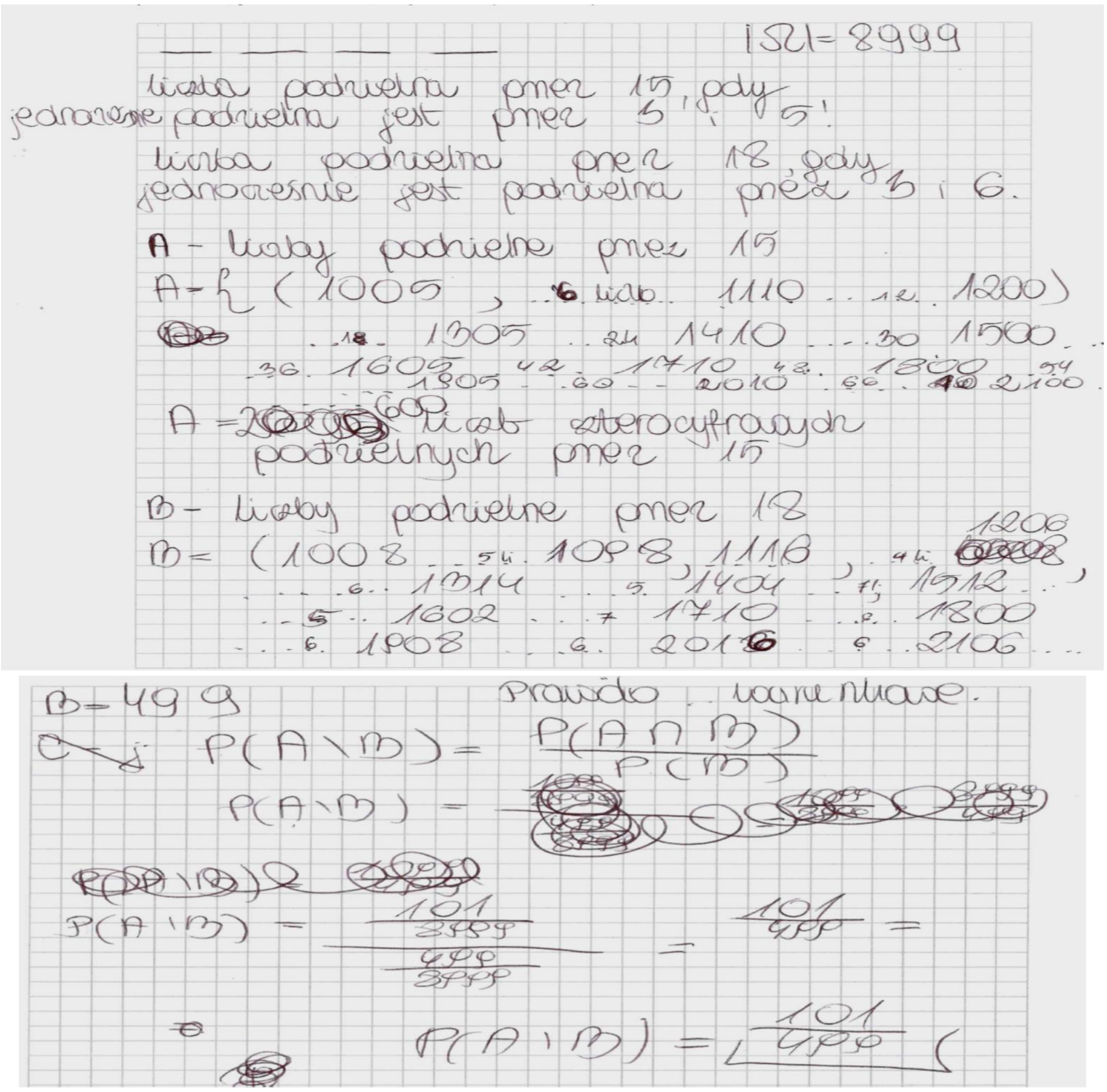
$534 - 89$

$\frac{89}{445} = \frac{1}{5}$ odp.

wszystkie podzielne przez 18

Niektórzy zdający dodatkowo popełniali błędy rachunkowe i nie otrzymywali poprawnej liczby zdarzeń.
Wśród zdających byli i tacy, którzy pomijali niektóre elementy zbioru liczb podzielnych przez 15, albo przez 18, albo przez 90. Przykład 94. jest ilustracją takich błędnych rozwiązań.

Przykład 94.


$|\Omega| = 8999$

liczba podzielna przez 15, gdy jednocześnie podzielna jest przez 5 i 5!

liczba podzielna przez 18 gdy jednocześnie jest podzielna przez 3 i 6.

A – liczby podzielne przez 15

A = { (1005 ... 6 liczb 1110 ... 12 1200) ... 18 1305 ... 24 1410 ... 30 1500 ... 36 1605 42 1710 48 1800 54 1905 ... 60 2010 ... 66 2100 ...

A = 600 liczb czterocyfrowych podzielnych przez 15

B – liczby podzielne przez 18

B = (1008 ... 54 1098, 1116, 46 1206 ... 6 1314 ... 5 1404, 71 1512 ... 5 1602 ... 7 1710 ... 8 1800 ... 6 1908 ... 6 2016 ... 6 2106 ...

B = 499

Prawdopodobieństwo warunkowe.

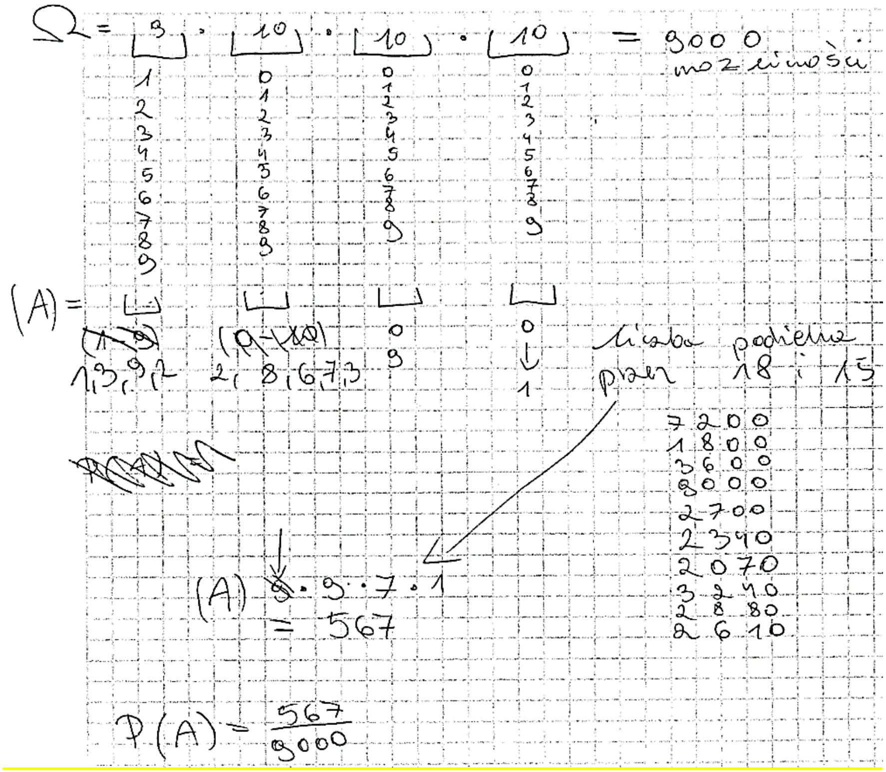
$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$P(A|B) = \frac{\frac{101}{8999}}{\frac{499}{8999}} = \frac{101}{499} =$

$P(A|B) = \frac{101}{499}$

Były również i takie rozwiązania, w których zdający próbowali wyznaczyć liczbę zdarzeń sprzyjających przez ustawianie, korzystając z reguły mnożenia, często zakończoną uzyskaniem niepoprawnej liczby zdarzeń sprzyjających (przykład 95.).

Przykład 95.


$\Omega = \boxed{9} \cdot \boxed{10} \cdot \boxed{10} \cdot \boxed{10} = 9000$ możliwości

1 2 3 4 5 6 7 8 9 | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

$(A) = \boxed{\ } \ \boxed{\ } \ \boxed{\ } \ \boxed{\ }$

1, 3, 9, 2 | 2, 8, 6, 7, 3 | 0, 9 | 0 ↓ 1

liczba podzielna przez 18 i 15

7200
1800
3600
9000
2700
2340
2070
3240
2880
2610

$(A)\ 8 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 1 = 567$

$P(A) = \frac{567}{9000}$

Na podstawie przedstawionej analizy można sformułować wniosek, że część zdających nie ma problemu z modelowaniem matematycznym, potrafi dobrać odpowiedni model do sytuacji opisanej w treści zadania, poprawnie operuje obiektami matematycznymi, potrafi poprawnie wydzielić obiekty i ustalić relacji między nimi. Jednakże, wcale niemała część zdających, zarówno na poziomie podstawowym, jak i rozszerzonym, nie opanowała umiejętności budowania i dobierania modelu matematycznego.

Wnioski i rekomendacje

1. Egzamin maturalny z matematyki na **poziomie podstawowym** potwierdził, że maturzystom nie sprawiają trudności zadania sprawdzające pojedyncze, mało skomplikowane umiejętności, wymagające wykonania jednej lub dwóch czynności.
2. Najlepsze wyniki na **poziomie podstawowym** zdający uzyskali w zadaniach zamkniętych, które sprawdzały umiejętności: wykonywania obliczeń procentowych, stosowania wzoru na n-ty wyraz i na sumę n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, stosowania twierdzenia Pitagorasa, wyznaczania średniej i mediany zestawu danych oraz korzystania z własności kątów i przekątnych w równoległobokach. Tym samym potwierdza się teza, że zdający osiągają bardzo dobre wyniki w zadaniach krótkich, wymagających jedynie zastosowania wzorów. Trzeba zaznaczyć, że do zadań z dobrym wynikiem należą też takie, które wymagały przeprowadzenia krótkiego rozumowania lub połączenia kilku własności obiektów matematycznych.
3. Na **poziomie rozszerzonym** dla tegorocznych maturzystów nie było zadań łatwych, a jedynie trzy zadania były umiarkowanie trudne. Najlepsze wyniki zdający uzyskali w zadaniu, które sprawdzało umiejętność obliczania granic ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów i zakodowania otrzymanego wyniku, a także w zadaniu z geometrii analitycznej, przy rozwiązywaniu którego należało wykazać się umiejętnością wyznaczenia równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty, obliczenia odległości punktu od prostej, jak też wyznaczenia współrzędnych punktu styczności okręgu i prostej. W odróżnieniu od lat ubiegłych tylko jedno zadanie zamknięte okazało się umiarkowanie trudne dla zdających. Było to zadanie z trygonometrii, w którym należało wykorzystać wzór na cosinus kąta podwojonego i wyznaczyć wartość funkcji cosinus kąta o mierze wyrażonej w stopniach.
4. Podobnie jak w latach ubiegłych maturzyści lepiej radzą sobie z rozwiązaniem zadań, w których należy wykorzystać znany algorytm, niż z zadaniami wymagającymi zaplanowania strategii rozwiązania, modelowania matematycznego czy uzasadnieniem postawionej tezy. Wyniki egzaminu maturalnego wyraźnie wskazują, że najwięcej trudności na egzaminie z matematyki sprawiają maturzystom zadania wymagające uzasadnienia prawdziwości tezy. Zadania wymagające przeprowadzenia rozumowania i przytoczenia poprawnej argumentacji są znacznie częściej od innych pomijane, a wśród tych zdających, którzy podejmują próbę ich rozwiązania, jest wielu wnioskujących o prawdziwości tezy na podstawie sprawdzenia poprawności dla kilku wybranych wartości albo nieuprawnionym przyjmowaniu szczególnych założeń o rozważanych obiektach matematycznych. Często też zdający pomijają istotną część rozumowania lub nie podają jakiegokolwiek komentarza w kluczowych miejscach przedstawianego uzasadnienia. Częste są również rozwiązania, w których zdający poprawnie rozpoczynają rozwiązywanie zadania, zauważając istotne zależności w obiektach matematycznych, jednak nie doprowadzają rozwiązania do końca, ponieważ nie potrafią powiązać ze sobą otrzymanych zależności. Umiejętności z obszaru *Rozumowanie i argumentacja* okazały się najtrudniejszymi zadaniami zarówno na **poziomie podstawowym** jak i **rozszerzonym** (na poziomie podstawowym najtrudniejszym było zadanie polegające na przeprowadzeniu dowodu

algebraicznego, a na poziomie rozszerzonym najniższy poziom wykonania osiągnęło zadanie, w którym należało przeprowadzić dowód geometryczny).

5. Zarówno na **poziomie podstawowym**, jak i **poziomie rozszerzonym**, egzamin ujawnił niski poziom opanowania przez zdających umiejętności z zakresu geometrii na płaszczyźnie kartezjańskiej. Dotyczy to głównie zadań rozszerzonej odpowiedzi, w których należało użyć lub stworzyć strategię rozwiązania, łącząc w spójną, logicznie uporządkowaną całość kilka pojedynczych umiejętności. Przyczyn niepowodzeń zdających w takich zadaniach należy upatrywać w braku umiejętności czytania treści zadania ze zrozumieniem i poprawnej jej interpretacji. Opanowanie tych umiejętności umożliwia stworzenie całościowej koncepcji rozwiązania. Jednak warto zwrócić uwagę, że większość maturzystów chętnie, i na ogół poprawnie, rozwiązywała krótkie zadania geometryczne, w których zamieszczono rysunek, oraz takie, w których sporządzenie rysunku ułatwiało rozwiązanie.
6. Na wyniki egzaminu z matematyki najczęściej znacząco wpływa brak sprawności rachunkowej oraz problemy z poprawnym wykonywaniem obliczeń rachunkowych. W rozwiązaniach zadań otwartych błędy rachunkowe nierzadko utrudniają lub uniemożliwiają dokończenie rozwiązania albo doprowadzają do otrzymania wyników niespełniających warunków zadania. Najczęściej zdający w wyniku popełnianych błędów nie mają szansy rozstrzygać kwestii, które pozwoliłyby na sprawdzenie opanowania przez nich umiejętności potrzebnych do prawidłowego rozwiązania zadania. Brak odpowiedniej sprawności rachunkowej doprowadza często do otrzymania wyników, których maturzyści nie potrafią właściwie zinterpretować, ujawniając brak zrozumienia pojęć i własności obiektów matematycznych, który jest najczęstszą przyczyną niepowodzeń. Trudności w wykonywaniu obliczeń sygnalizują konieczność zwrócenia uwagi w trakcie nauki na staranne ich wykonywanie. Jest to ważne na każdym etapie edukacyjnym, a trzeba podkreślić, że wiele popełnianych błędów to efekt niewłaściwego opanowania treści nauczania w szkole podstawowej czy w gimnazjum. Konieczne jest także weryfikowanie poprawności otrzymanego wyniku, a w przypadku wyników sprzecznych z treścią zadania nie do przecenienia jest wskazywanie tych niezgodności, by kształtować umiejętność określania obiektów matematycznych wyznaczonych przez konkretne wartości liczbowe lub umiejętność wykazywania braku istnienia obiektów, które są konsekwencją uzyskanych wyników.
7. Niemniejszy wpływ na wyniki egzaminu ma relatywnie niski poziom umiejętności rozumienia tekstu matematycznego. Świadczą o tym nieudane próby podjęcia rozwiązania zadań, gdzie już w początkowej fazie tworzenia strategii rozwiązania zdający przystępują do rozważania sytuacji odmiennych od wynikających z treści zadań. W trakcie procesu kształcenia nauczyciele powinni nadać duże znaczenie początkowej fazie rozwiązania zadania, tj. precyzyjnemu ustaleniu istoty rozwiązywanego problemu i rozumieniu opisanej sytuacji, a także zwracać uwagę na to, że pozornie drobna zmiana w treści zadania wymaga zastosowania zupełnie innego rozumowania. Należy ćwiczyć z uczniami rozwiązywanie zadań różnymi sposobami, ukazując tym samym rozmaitość strategii rozwiązywania problemów matematycznych.
8. W trakcie nauki należy koniecznie zwracać uwagę na staranne i sprawne wykonywanie przekształceń i obliczeń. Nieodzowne jest weryfikowanie poprawności otrzymanego wyniku, a w przypadku wyników niezgodnych z treścią zadania wyjaśnianie sprzeczności, aby kształtować umiejętność określania obiektów matematycznych wyznaczonych przez konkretne wartości liczbowe. Ten aspekt był

istotny m. in. w zadaniu z równaniem trygonometrycznym, w którym część zdających rozwiązywała je metodą analizy starożytnych i nie potrafiła wybrać właściwych rozwiązań równania, a odrzucić rozwiązań obcych.

9. W nauczaniu geometrii należy zwrócić szczególną uwagę na poprawną interpretację treści zadań i rozważanie właściwych figur geometrycznych oraz ich elementów. Przegląd rozwiązań zdających prowadzi do wniosku, aby w zadaniach z geometrii na płaszczyźnie kartezjańskiej doskonalić umiejętność analizy zadania, doboru adekwatnej strategii rozwiązania wynikającej wprost z treści zadania (**poziom podstawowy**), a na **poziomie rozszerzonym** doskonalić umiejętność samodzielnego tworzenia przez uczniów strategii na podstawie wnikliwej analizy treści zadania i identyfikowania istotnych dla rozwiązania etapów.