CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

OKRĘGOWA KOMISJA EGZAMINACYJNA W POZNANIU

Rodzaj dokumentu:	**Sprawozdanie za rok 2020** **województwo wielkopolskie**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy** **Poziom rozszerzony**
Termin egzaminu:	Termin główny – czerwiec 2020 r.
Data publikacji dokumentu:	30 października 2020 r.

Opracowanie
dr Roman Wosiek (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Ewa Ludwikowska (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku)
Joanna Berner (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie)
Mariusz Mroczek (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Hubert Rauch (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Redakcja
dr Wioletta Kozak (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Opracowanie techniczne
Andrzej Kaptur (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Współpraca
Beata Dobrosielska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Agata Wiśniewska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Pracownie ds. Analiz Wyników Egzaminacyjnych okręgowych komisji egzaminacyjnych

Opracowanie dla województwa wielkopolskiego

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
Izabela Szafrańska
Anna Sperling
Andrzej Popiół
Michał Pawlak

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. 022 536 65 00, fax 022 536 65 04
e-mail: sekretariat@cke.gov.pl
www.cke.gov.pl

Spis treści

Poziom podstawowy. Opis arkusza egzaminu maturalnego

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie podstawowym składał się z 25 zadań zamkniętych wyboru wielokrotnego z jedną poprawną odpowiedzią oraz 9 zadań otwartych, w tym 6 krótkiej odpowiedzi i 3 rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności opisane w pięciu obszarach wymagań ogólnych podstawy programowej z matematyki:

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji (cztery zadania zamknięte i jedno zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi).
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (szesnaście zadań zamkniętych i jedno zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi).
III. Modelowanie matematyczne (trzy zadania zamknięte, jedno zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi).
IV. Użycie i tworzenie strategii (dwa zadania zamknięte, dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi, dwa zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi).
V. Rozumowanie i argumentacja (dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi).

Zdający mogli korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych,* cyrkla, linijki oraz kalkulatora prostego. Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 50 punktów.

Poziom podstawowy. Dane dotyczące populacji zdających

TABELA 1. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZU STANDARDOWYM*

Liczba zdających		23584
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	14042
	z techników	9542
	ze szkół na wsi	1176
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	4644
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	9893
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	7871
	ze szkół publicznych	21938
	ze szkół niepublicznych	1646
	kobiety	12932
	mężczyźni	10652
	bez dysleksji rozwojowej	21877
	z dysleksją rozwojową	1707

* Dane w tabeli dotyczą tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 3 osoby − laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

TABELA 2. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZACH DOSTOSOWANYCH

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	41
	słabowidzący	23
	niewidomi	2
	słabosłyszący	33
	niesłyszący	7
	Ogółem	**106**

Poziom podstawowy. Przebieg egzaminu

TABELA 3. INFORMACJE DOTYCZĄCE PRZEBIEGU EGZAMINU

<table>
<tr><td colspan="3">Termin egzaminu</td><td>9 czerwca 2020</td></tr>
<tr><td colspan="3">Czas trwania egzaminu dla arkusza standardowego</td><td>170 minut</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba szkół</td><td>440</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba zespołów egzaminatorów</td><td>13</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba egzaminatorów</td><td>338</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba obserwatorów[1] (§ 8 ust. 1)</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Liczba unieważnień[2]</td><td colspan="3">w przypadku:</td></tr>
<tr><td>art. 44zzv pkt 1</td><td>stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>art. 44zzv pkt 2</td><td>wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego</td><td>1</td></tr>
<tr><td>art. 44zzv pkt 3</td><td>zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu</td><td>0</td></tr>
<tr><td>art. 44zzw ust. 1</td><td>stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>art. 44zzy ust. 7</td><td>stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego</td><td>3</td></tr>
<tr><td>art. 44zzy ust. 10</td><td>niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba wglądów[2] (art. 44zzz)</td><td>461</td></tr>
</table>

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 21 grudnia 2016 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu przeprowadzania egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2016 r. poz. 2223, ze zm.).
[2] Ustawa o systemie oświaty (tekst jedn. Dz.U. z 2020 r. poz. 1327).

Poziom podstawowy. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających

WYKRES 1. ROZKŁAD WYNIKÓW ZDAJĄCYCH

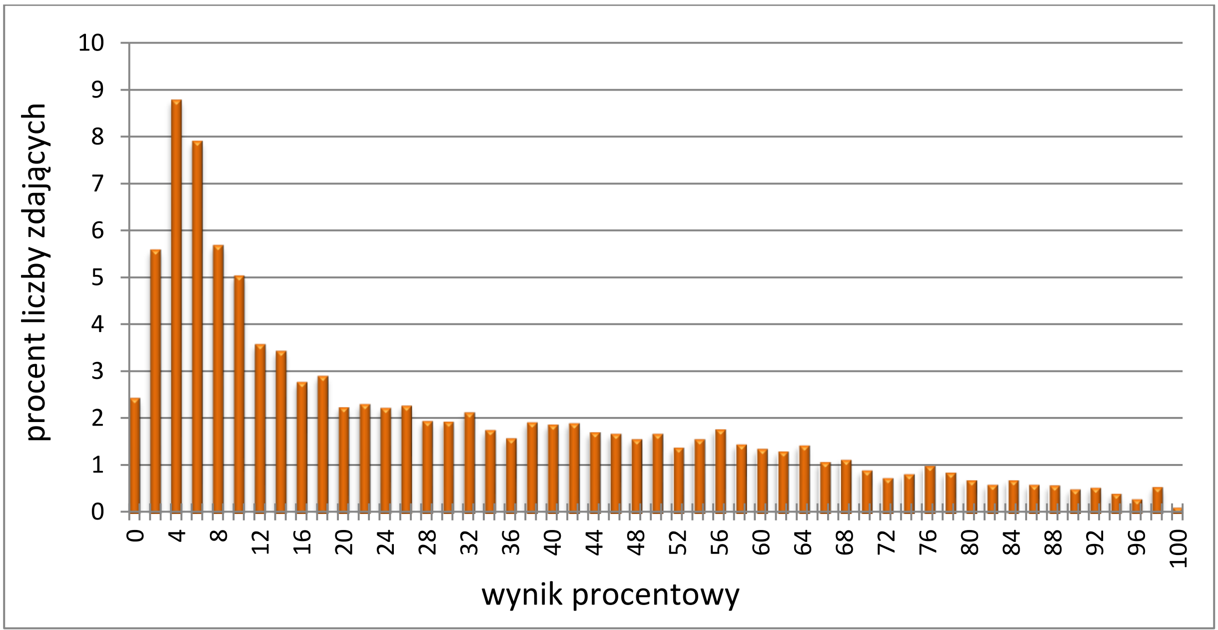


TABELA 4. WYNIKI ZDAJĄCYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
ogółem	**23584**	**0**	**100**	**48**	**52**	**50,39**	**23,85**
w tym:							
z liceów ogólnokształcących	14042	2	100	54	52	55,51	24,80
z techników	9542	0	100	40	26	42,86	20,15

* Dane dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów. Parametry statystyczne są podane dla grup liczących 30 lub więcej zdających.

Poziom wykonania zadań

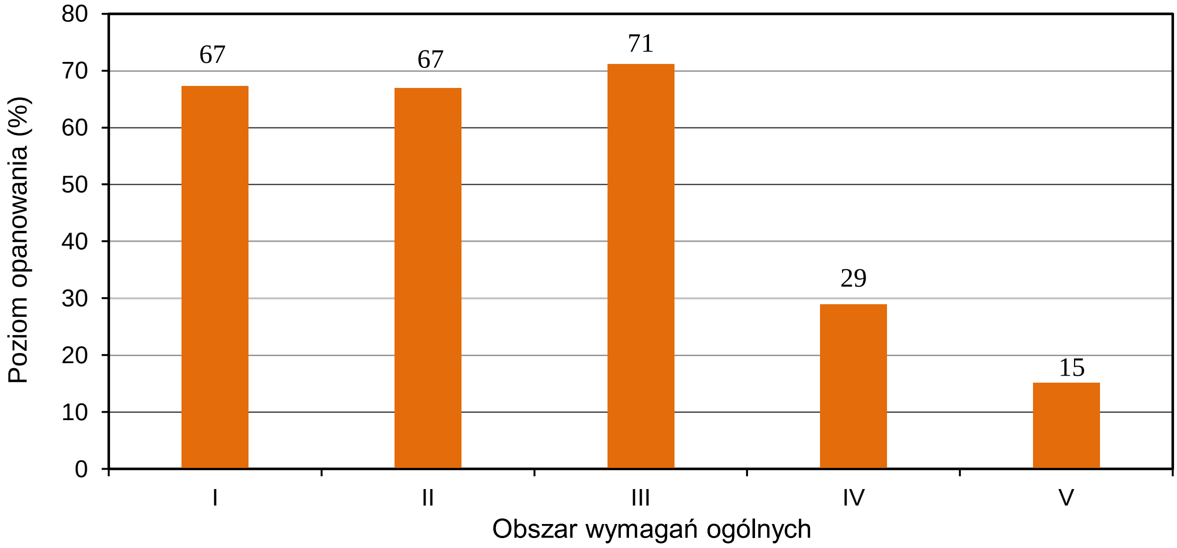
TABELA 5. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ

Nr zad.	**Wymagania ogólne**	**Wymagania szczegółowe** *Gdy wymaganie szczegółowe dotyczy materiału III etapu edukacyjnego – dopisano (G), gdy II etapu edukacyjnego – dopisano (SP).*	**Poziom wykonania zadania (%)**
1.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).	72
2.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (1.4).	59
3.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.6).	75
4.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (1.9).	78
5.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą (3.3).	65
6.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$ (3.7).	64
7.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieją) (4.10).	64
8.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym (4.11).	78
9.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym) (4.12).	76
10.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności (3.1).	76
11.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej (4.7).	59
12.	II. Wykorzystanie	4. Funkcje. Zdający oblicza ze wzoru wartość funkcji	66

	i interpretowanie reprezentacji.	dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość (4.2).	
13.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.2).	77
14.	III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym (5.1).	79
15.	III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n*-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).	87
16.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie (4.6).	68
17.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym (7.1).	79
18.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej) (8.1).	74
19.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180° (6.1).	66
20.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość dwóch punktów (8.6).	63
21.	III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania (10.2).	83
22.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	G10. Figury płaskie. Zdający oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów (G10.9).	57
23.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Zdający wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych (G9.4).	67
24.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G11. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym) (G11.2).	63

25.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G11. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym) (G11.2).	68
26.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą (3.5).	55
27.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$ (3.7).	61
28.	V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia $(a\pm b)^2$ oraz a^2-b^2 (2.1).	18
29.	V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów (7.1). SP9. Wielokąty, koła, okręgi. Zdający rozpoznaje i nazywa trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne, równoboczne i równoramienne (SP9.1).	13
30.	III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).	53
31.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, oraz $\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$ (6.4).	35
32.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt (8.3). Zdający oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych (8.4). Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka (8.5).	20
33.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4).	29
34.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów (9.2). 6. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180° (6.1).	18

WYKRES 2. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ W OBSZARZE WYMAGAŃ OGÓLNYCH



Poziom rozszerzony. Opis arkusza egzaminu maturalnego

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie rozszerzonym zawierał 4 zadania zamknięte wielokrotnego wyboru, 11 zadań otwartych, w tym 7 zadań krótkiej i 4 zadania rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności opisane w pięciu obszarach wymagań ogólnych podstawy programowej z matematyki:

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji (jedno zadanie zamknięte).
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (dwa zadania zamknięte).
III. Modelowanie matematyczne (jedno zadanie zamknięte i trzy zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi).
IV. Użycie i tworzenie strategii (dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi i trzy zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi).
V. Rozumowanie i argumentacja (dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi i jedno zadanie otwarte rozszerzonej odpowiedzi).

Zdający mogli korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych,* cyrkla, linijki oraz kalkulatora prostego. Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 50 punktów.

Poziom rozszerzony. Dane dotyczące populacji zdających

TABELA 1. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZU STANDARDOWYM*

Liczba zdających		**6169**
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	3554
	z techników	2615
	ze szkół na wsi	121
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	997
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	2617
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	2434
	ze szkół publicznych	5946
	ze szkół niepublicznych	223
	kobiety	2325
	mężczyźni	3844
	bez dysleksji rozwojowej	5657
	z dysleksją rozwojową	512

* Dane w tabeli dotyczą tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 3 osoby − laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

TABELA 2. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZACH DOSTOSOWANYCH

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	10
	słabowidzący	5
	niewidomi	1
	słabosłyszący	11
	niesłyszący	1
	Ogółem	**28**

Poziom rozszerzony. Przebieg egzaminu

TABELA 3. INFORMACJE DOTYCZĄCE PRZEBIEGU EGZAMINU

Termin egzaminu			15 czerwca 2020
Czas trwania egzaminu dla arkusza standardowego			180 minut
Liczba szkół			316
Liczba zespołów egzaminatorów			8
Liczba egzaminatorów			194
Liczba obserwatorów[2] (§ 8 ust. 1)			1
Liczba unieważnień[3]	w przypadku:		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	0
	art. 44zzv pkt 3	zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu	0
	art. 44zzw ust. 1	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego	0
	art. 44zzy ust. 10	niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)	0
Liczba wglądów[3] (art. 44zzz)			82

[2] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 21 grudnia 2016 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu przeprowadzania egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2016 r. poz. 2223, ze zm.).

[3] Ustawa o systemie oświaty (tekst jedn. Dz.U. z 2020 r. poz. 1327).

Poziom rozszerzony. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających

WYKRES 1. ROZKŁAD WYNIKÓW ZDAJĄCYCH

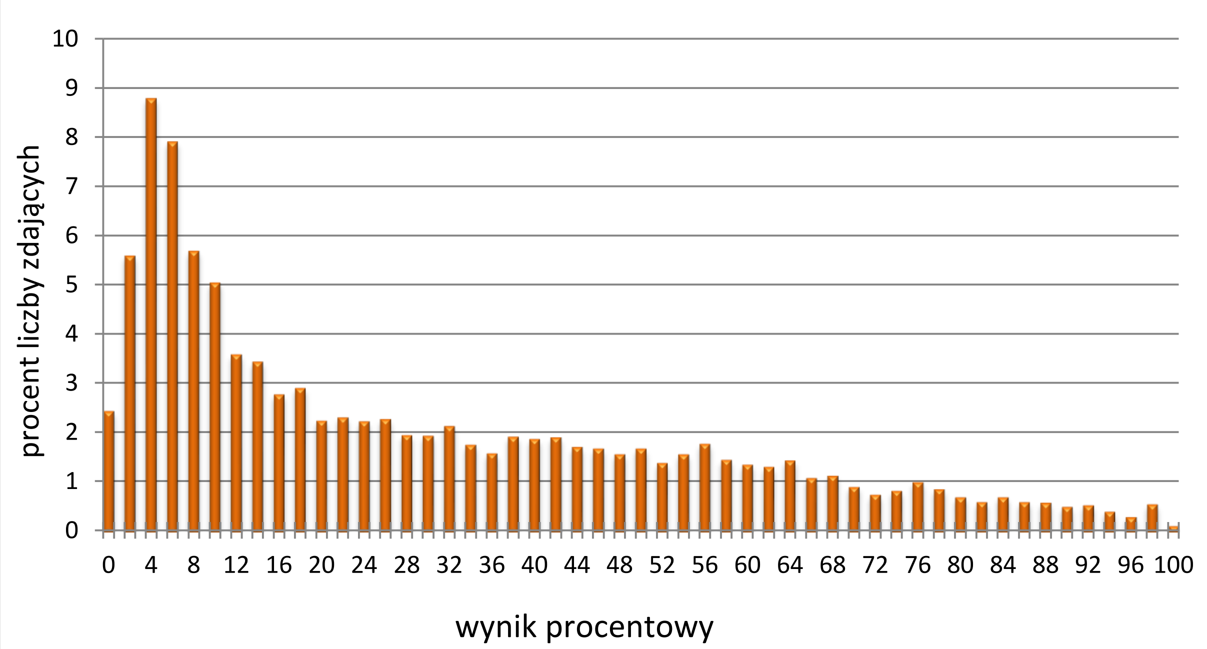


TABELA 4. WYNIKI ZDAJĄCYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
ogółem	**6169**	**0**	**100**	**20**	**4**	**29,06**	**25,44**
w tym:							
z liceów ogólnokształcących	3554	0	100	38	6	39,87	25,68
z techników	2615	0	94	8	4	14,38	16,01

* Dane dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów. Parametry statystyczne są podane dla grup liczących 30 lub więcej zdających.

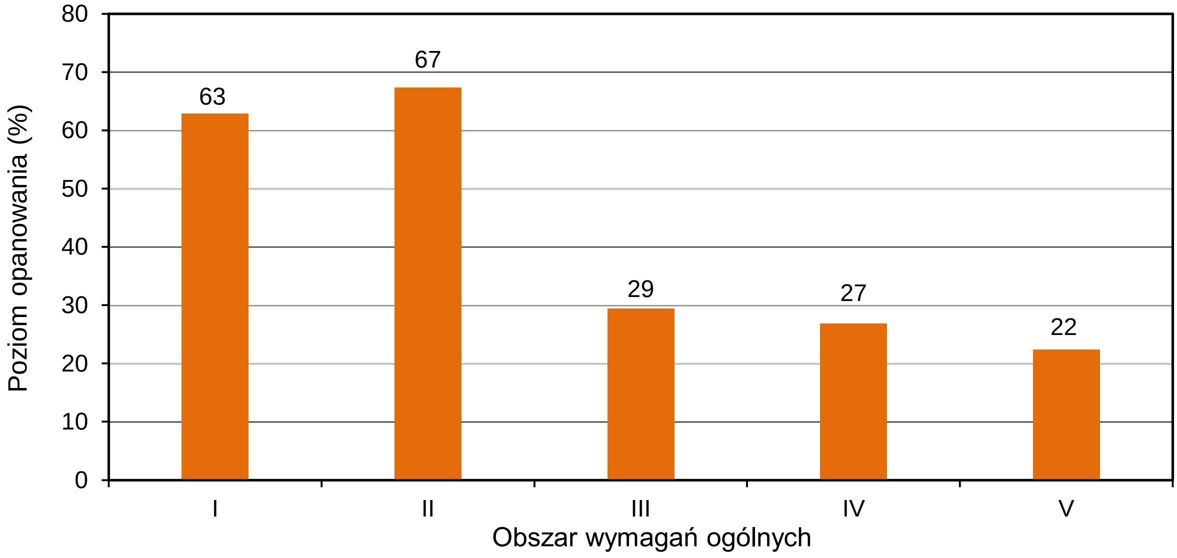
Poziom wykonania zadań

TABELA 5. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ

Nr zad.	Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poziom wykonania zadania (%)
1.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian x – a (R3.4).	63
2.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	5. Ciągi. Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów (R5.2).	82
3.	III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym (10.R.3)	78
4.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia $a \pm b\ ^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1). Zdający używa wzorów skróconego mnożenia $a \pm b\ ^3$ oraz $a^3 \pm b^3$ (R2.1).	52
5.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów (R7.5).	30
6.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bez względnej i jej interpretację geometryczną (R1.1). 4. Funkcje. Zdający szkicuje wykres funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami; odczytuje własności takiej funkcji z wykresu (R4.4).	25
7.	V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów (7.3).	14
8.	V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia $a \pm b\ ^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).	21
9.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne (R6.6).	38
10.	V. Rozumowanie i argumentacja.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę	28

		n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3). Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n*-początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4).	
11.	III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a (R3.1).	37
12.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w jednokładności (odcinka, trójkąta, czworokąta itp.) (R7.3). 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności (R8.5).	28
13.	III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych (R10.1).	14
14.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6). 7. Planimetria. Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu (R9.1).	19
15.	III. Modelowanie matematyczne.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6).	27

WYKRES 2. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ W OBSZARZE WYMAGAŃ OGÓLNYCH



Komentarz

Analiza jakościowa zadań

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najsłabiej

Na poziomie podstawowym można zauważyć, że nadal największe trudności sprawiają maturzystom zadania dotyczące udowodnienia twierdzenia. Względnie trudne dla maturzystów okazały się zadania 28. i 29. (dowód algebraiczny i dowód geometryczny). Były to zadania z obszaru *Rozumowanie i argumentacja*. Rozumowanie matematyczne i argumentacja to umiejętność podawania matematycznych argumentów uzasadniających poprawność przeprowadzonego rozumowania. O prowadzeniu rozumowania świadczy fakt, że zdający wyjaśniania, dostrzega związki, zależności i prawidłowości, dostrzega podobieństwa między obiektami, zdarzeniami, pojęciami, wykorzystuje prawidłowości, uogólnia, uzasadnia, dobiera trafne argumenty, stosuje trafne obiekty matematyczne, reprezentacje i narzędzia matematyczne oraz zapisuje dowód.

W zadaniu 29. zdający osiągnęli poziom wykonania 13%, zaś w zadaniu 28. – 18%. Przyczyną tak niskich wyników jest zarówno niski poziom opanowania umiejętności przeprowadzania i zapisania prostego rozumowania składającego się z kilku kroków, jak również opuszczenia obu zadań typu „wykaż” przez, ciągle niemałą, część maturzystów. Zauważyć jednak trzeba, że coraz większy odsetek zdających podejmuje się rozwiązania tego typu zadań. Przeanalizujmy zatem poprawne sposoby rozwiązań oraz błędy, jakie wystąpiły w dwóch zadaniach o najniższych wskaźnikach łatwości. Najtrudniejsze było zadanie 29., które wymagało od maturzysty uzasadnienia, że długość odcinka *CF* zawartego w boku *BC* trójkąta równobocznego *ABC* stanowi $\frac{9}{16}$ długości boku tego trójkąta.

Aby wykazać, że długość rozważanego odcinka CF jest równa $\frac{9}{16}$ długości boku trójkąta *ABC*, przy założeniu, że odcinek *CE* stanowi $\frac{3}{4}$ wysokości *CD* tego trójkąta, można było zauważyć, że trójkąt *CDB* jest połową danego trójkąta równobocznego o boku *BC*, więc $|CD| = |BC| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Z tej zależności oraz wobec założenia $|CE| = \frac{3}{4}|CD|$ wynika, że długość odcinka *CE* jest równa $|CE| = |BC| \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8}$. Następnie należało zauważyć, że również trójkąt CEF jest połową trójkąta równobocznego o boku *CE*, a odcinek *CF* jest wysokością tego trójkąta. Wobec tego $|CF| = |CE| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Pozostało podstawić wyrażenie $|BC| \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8}$ za *CE*, co prowadziło do otrzymania zależności $|CF| = \frac{9}{16}|BC|$ (przykład 1.).

Drugi sposób polegał na zauważeniu, że trójkąt *BCD* jest trójkątem prostokątnym o kątach ostrych $30°$ i $60°$ i o przeciwprostokątnej *BC* oraz zapisaniu wysokości *CD* tego trójkąta w zależności od długości boku *BC* jako $|CD| = |BC| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Następnie przeprowadzeniu analogicznego rozumowania jak w sposobie pierwszym, że trójkąt *CEF* jest połową trójkąta równobocznego o wysokości *CF*, z czego wynika, że bok *CE* tego trójkąta ma długość

$\frac{2|CF|\sqrt{3}}{3}$. Wobec tego oraz założenia $|CE| = \frac{3}{4}|CD|$, po podstawieniu otrzymanych wyrażeń za *CE* oraz *CD*, otrzymujemy zależność $|CF| = \frac{9}{16}|BC|$ (przykład 2.).

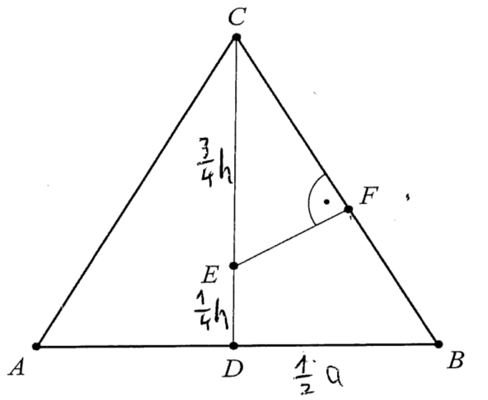
Trzeci sposób rozwiązania był analogiczny do sposobu drugiego. Polegał na zauważeniu, że trójkąt *BCD* jest trójkątem prostokątnym o kątach ostrych $30°$ i $60°$ oraz o przeciwprostokątnej *BC*. Następnie wykorzystaniu zależności między bokami tego typu trójkąta oraz zapisaniu długości przeciwprostokątnej *BC* i wysokości *CD* tego trójkąta w zależności od długości przyprostokątnej *BD* jako $|BC| = 2 \cdot |BD|$ i $|CD| = |BD|\sqrt{3}$. Wobec tego oraz założenia $|CE| = \frac{3}{4}|CD|$, po podstawieniu wyrażenia za *CD*, otrzymujemy $|CE| = \frac{3}{4}|BD|\sqrt{3}$. Następnie przeprowadzeniu analogicznego rozumowania jak w sposobie pierwszym, że trójkąt *CEF* jest połową trójkąta równobocznego, więc wysokość $|CF| = \frac{9}{8}|BD|$. A stąd $\frac{|CF|}{|BC|} = \frac{9}{16}$, co prowadziło do otrzymania zależności $|CF| = \frac{9}{16}|BC|$ (przykład 3.)

W sposobie czwartym rozwiązania wystarczyło zauważyć na mocy cechy (kąt, kąt, kąt) podobieństwo trójkątów *BCD* i *ECF,* zatem $\frac{|BC|}{|CE|} = \frac{|CD|}{|CF|}$. Następnie wykorzystać fakt, że trójkąt *ABC* *j*est równoboczny, więc wysokość *CD* tego trójkąta jest równa $|CD| = \frac{|BC|\sqrt{3}}{2}$. I, wobec tego oraz założenia $|CE| = \frac{3}{4}|CD|$, skala *k* podobieństwa trójkątów *BCD* i *ECF* jest równa: $k = \frac{BC}{|CE|} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$. Dalej, zauważeniu, że również $\frac{|CD|}{|CF|} = k$, więc $|CF| = \frac{|CD|}{\frac{8\sqrt{3}}{9}}$. Podstawienie otrzymanych wyrażeń za *CD* i *CE*, prowadziło do otrzymania zależności $|CF| = \frac{9}{16}|BC|$ (przykład 4.).

Sposób z wykorzystaniem podobieństwa trójkątów był najczęściej stosowanym przez zdających sposobem przeprowadzenia rozumowania (przykład 4.).

Poniżej zamieszczamy poprawne rozwiązania tego zadania wykorzystujące omówione sposoby (przykład 1., przykład 2., przykład 3., przykład 4.).

Przykład 1.



Wykaż, że $|CF| = \frac{9}{16}|CB|$.

$\cancel{|CB| = h^2 + \frac{1}{4}a^2}$

$\sphericalangle ABC = 60^\circ$

$\sphericalangle BDC = 30^\circ$

$\sphericalangle CEF = 60^\circ$

z własności trójkąta 30-60-90

$|CB| = a$

$|CD| = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

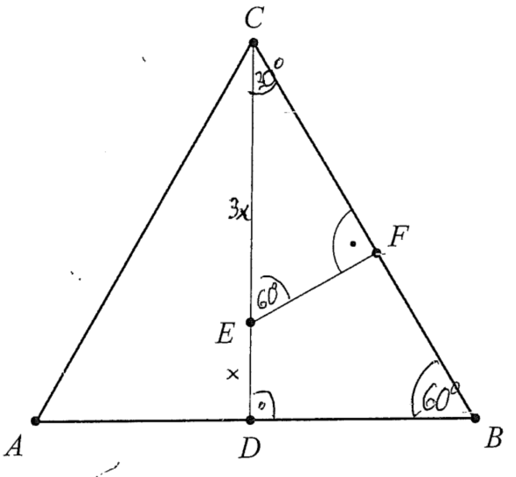
$|CE| = \frac{3}{4}h = \frac{a\cdot 3\sqrt{3}}{8}$

$|CF| = \frac{|CE|\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{a\cdot 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{8\cdot 2} = \frac{9a}{16} = \frac{9}{16}|CB|$

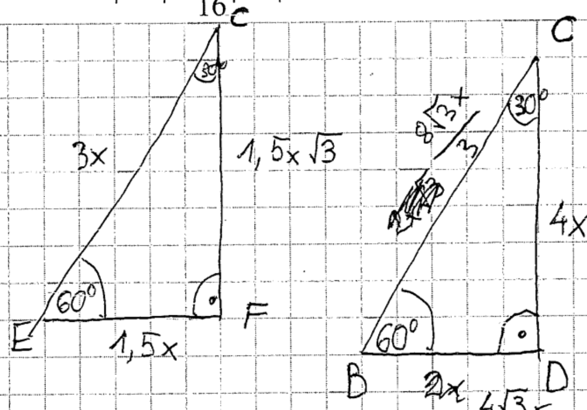
$|CF| = \frac{9}{16}|CB|$

Zdający wykazał się umiejętnością przeprowadzania i zapisania prostego rozumowania składającego się z kilku kroków oraz w dowodzie podał poprawną argumentację, wykorzystując odpowiednie związki między obiektami.

Przykład 2.



Wykaż, że $|CF| = \frac{9}{16}|CB|$.



$a = \frac{4\sqrt{3}x}{3}$

$4x = a\sqrt{3} \quad /:\sqrt{3}$

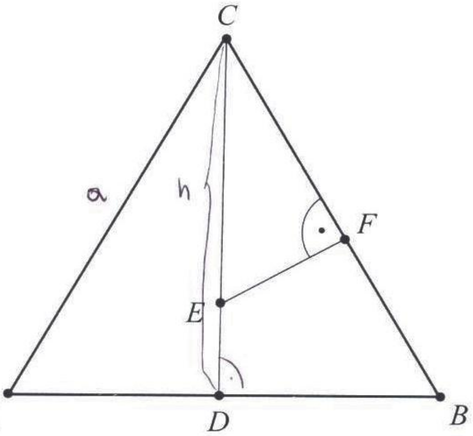
$\frac{4x}{\sqrt{3}} = a$

$a = \frac{4\sqrt{3}x}{3}$

$\frac{|CF|}{|CB|} = \frac{1{,}5\sqrt{3}x}{\frac{8\sqrt{3}x}{3}} = 1{,}5\sqrt{3}x \cdot \frac{3}{8\sqrt{3}x} = \frac{4{,}5\cancel{\sqrt{3}x}}{8\cancel{\sqrt{3}x}} = \frac{4{,}5}{8} = \frac{9}{16}$ c.n.d.

Zdający zauważył, że trójkąty *BDC* i *EFC* są trójkątami prostokątnymi o kątach ostrych 30° i 60° oraz poprawnie wyznaczył długości boków w każdym z tych trójkątów. Następnie obliczył stosunek długości boków $\frac{|CF|}{|CB|} = \frac{9}{16}$ i stwierdził zakończenie dowodu.

Przykład 3.



Wykaż, że $|CF| = \frac{9}{16}|CB|$.

$|AC| = |AB| = |BC| = a$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = |CD|$

$|CE| = \frac{3}{4}|CD| = \frac{3}{4}h = \frac{3}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$

$\cancel{\Delta EFC \sim \Delta DBC}$

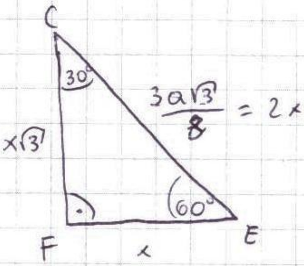
Δ ~~EFC ~ Δ BDC (cecha kąt kąt kąt)~~

$\cancel{\frac{|CF|}{|CD|} = \frac{|CE|}{|CB|}}$ $\cancel{\frac{|CF|}{|CE|} = \frac{|CD|}{|CB|}}$

$\cancel{|CF| = \frac{|CD| \cdot |CE|}{|CB|}}$ $\cancel{\frac{|CF|}{\frac{3}{4}|CD|} = \frac{|CD|}{|CB|}}$

$\cancel{|CF| = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{8}}$

$|CB| = a$



$2x = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$

$x = \frac{3a\sqrt{3}}{16}$

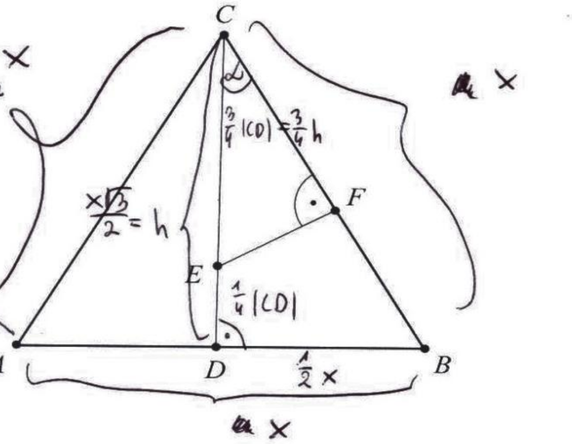
$|CF| = x\sqrt{3} = \frac{3a\sqrt{3}}{16} \cdot \sqrt{3} = \frac{9a}{16}$

$|CF| = \frac{9}{16}a = \frac{9}{16}|CB|$

cnd

Zdający zauważył, że trójkąt *ABC* jest trójkątem równobocznym, uwzględnił założenie i zapisał związek między odcinkiem *CE* a długością boku *BC* trójkąta *ABC*. Następnie zauważył, że trójkąt *CEF* jest trójkątem prostokątnym o kątach ostrych $30°, 60°$ i skorzystał z zależności między długościami boków takiego trójkąta. W ostatnim etapie rozwiązania wyznaczył długość boku *CF* trójkąta *CEF* w zależności od długości boku trójkąta równobocznego *ABC.*

Przykład 4.



Wykaż, że $|CF| = \frac{9}{16}|CB|$.

Skoro $|CE| = \frac{3}{4}|CD| \Rightarrow |DE| = \frac{1}{4}|CD|$ $\quad |CB| = x$

$|CD| = h$

ΔCDB jest podobny do ΔEFC na podstawie zasady kąt - kąt - kąt

$\sphericalangle CDB = 90° = \sphericalangle EFC$

$\sphericalangle ECF = \sphericalangle BCD$

$\sphericalangle DBC = 90 - \alpha = \sphericalangle FEC$

Skoro jest to trójkąt równoboczny to

$h^2 = x^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \qquad h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

$h^2 = x^2 - \frac{1}{4}x^2$

$h^2 = \frac{3}{4}x^2$

$h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

$\frac{x}{\frac{3}{4}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2}} = k$

$k = \frac{x}{\frac{3x\sqrt{3}}{8}}$

$k = x \cdot \frac{8}{3\cdot x\cdot\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \Rightarrow$

$|CF| \cdot k = h$

$|CF| = \frac{h}{k}$

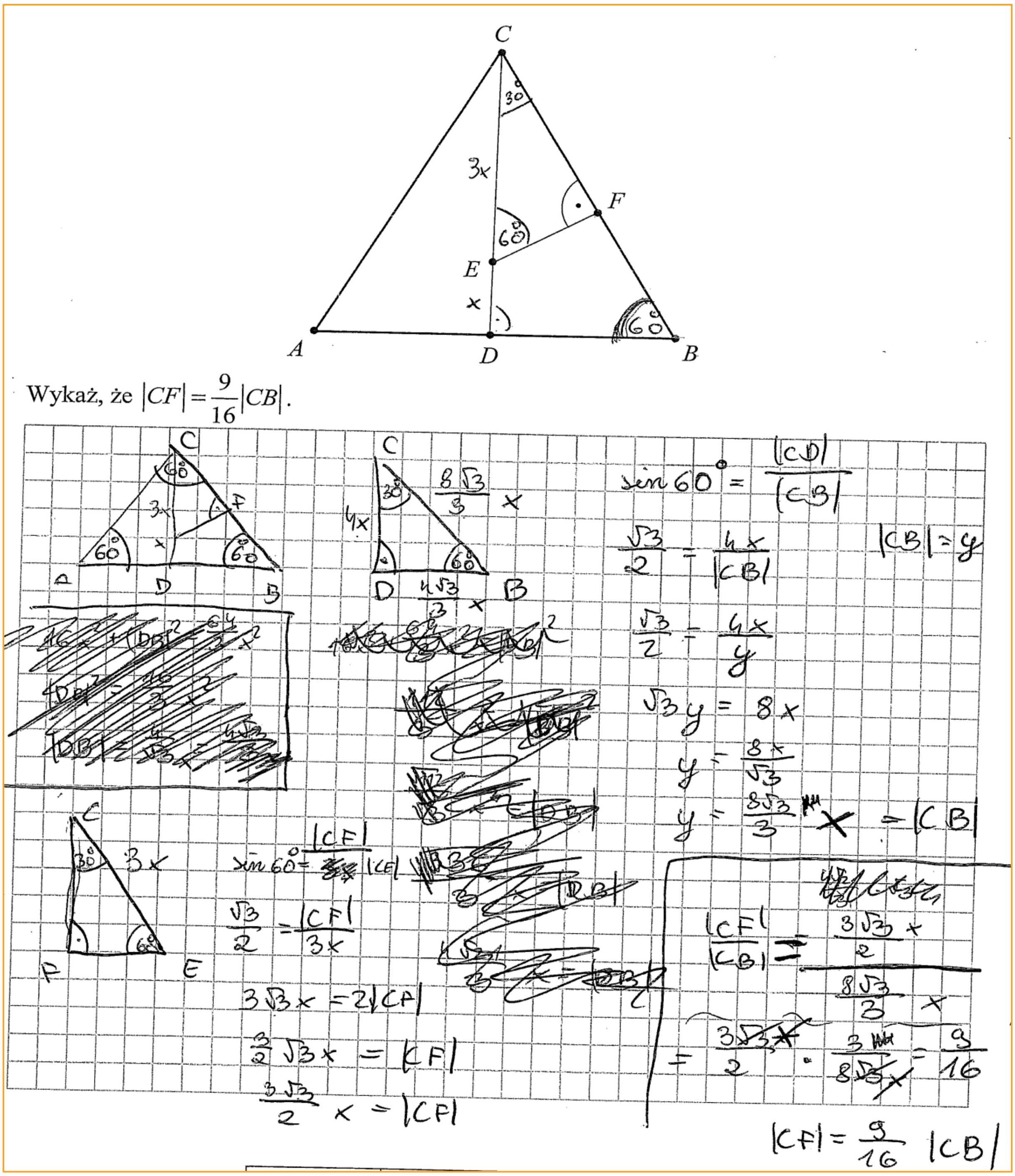
$|CF| = \frac{x\sqrt{3}}{2} : \frac{8\sqrt{3}}{9}$

$|CF| = \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9}{8\sqrt{3}} = \frac{9}{16}x = \frac{9}{16}|CB|$

Zdający oznaczył długość boku *BC* przez *x*, zauważył, że trójkąty *BCD* i *EFC* są podobne na mocy cechy (*kąt, kąt, kąt*) i wyznaczył długości odpowiednich boków w zależności od *x*. Nastepnie obliczył skalę podobieństwa trójkątów $k = \frac{8\sqrt{3}}{9}$, zapisał zależność między odpowiednimi przyprostokątnymi trójkątów podobnych $|CF| = \frac{|CD|}{k}$, co po podstawieniu wielkości doprowadziło do otrzymania tezy $|CF| = \frac{9}{16}|BC|$.

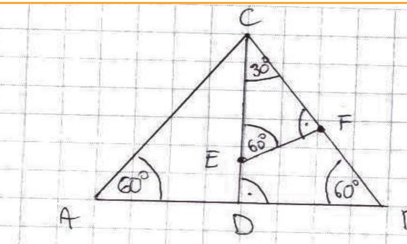
Niektórzy zdający do wyznaczenia zależności w trójkątach prostokątnych *BCD* i *CEF* korzystali z definicji funkcji trygonometrycznych (przykład 5.)

Przykład 5.



Szósty sposób rozwiązania podejmowany przez zdających polegał na łączeniu elementów kilku sposobów opisanych wcześniej. Zasadnicze trudności rozwiązania zadania zdający najczęściej pokonywali analogicznie jak w poprzednio omówionych przykładach (przykład 6. i przykład 7.).

Przykład 6.



$|CE| = \frac{3}{4}|CD|$ $|AB| = |AC| = |CB|$

W trójkącie równobocznym wszystkie kąty są równe, a wysokość tego trójkąta jest jednocześnie dwusieczną kąta znajdującego się przy wierzchołku, z którego jest poprowadzona

Stąd: $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle BAC| = 60^\circ$

$|\sphericalangle ECF| = 30^\circ$

Trójkąty $\triangle BDC$ i $\triangle FEC$ są do siebie podobne, ponieważ mają te same kąty. Stąd wiemy, że:

W trójkącie równobocznym o boku a, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Załóżmy, że $|CB| = a$, a $|CD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ więc $|CE| = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$

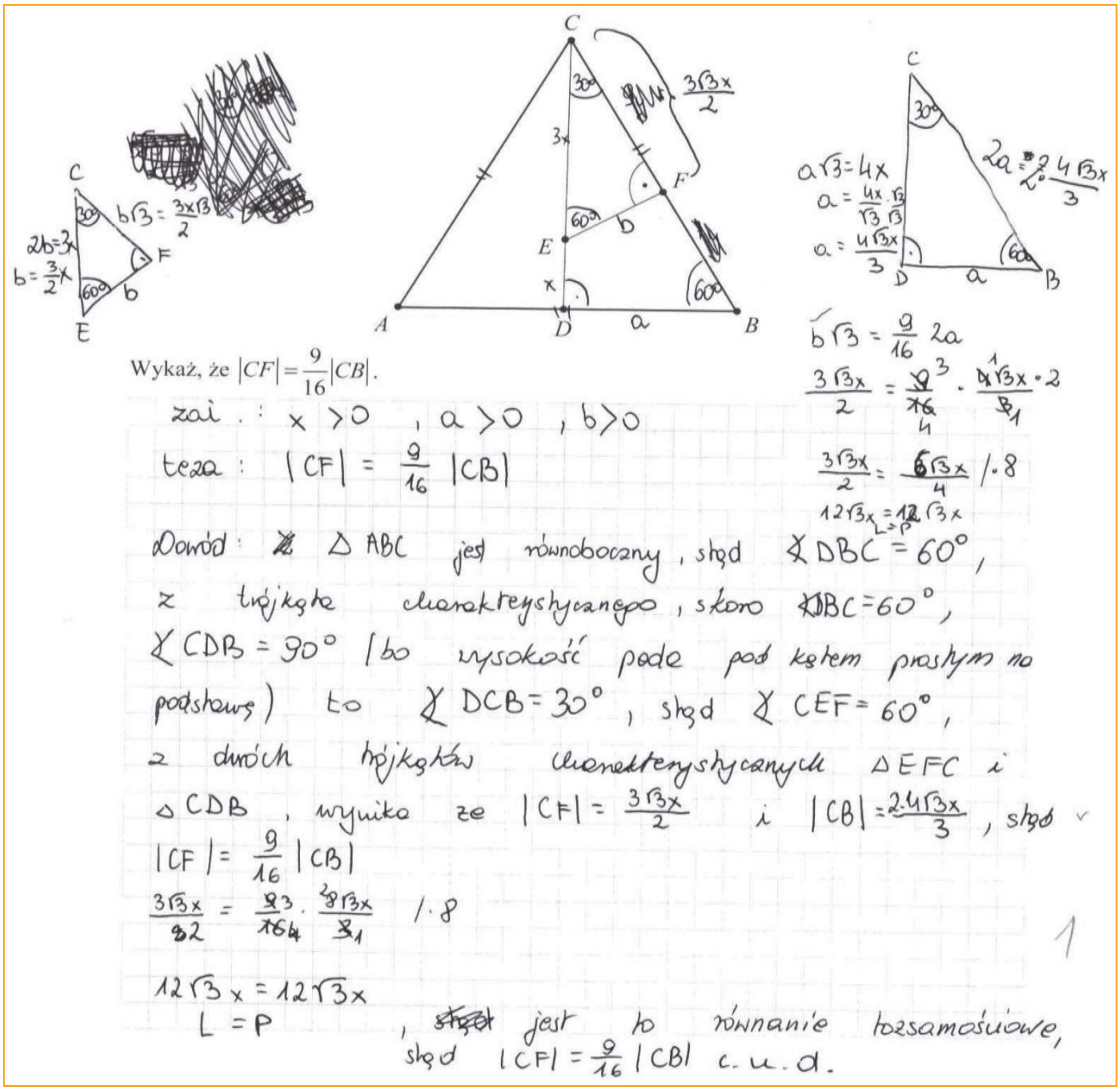
$\frac{|CD|}{|CB|} = \frac{|CF|}{|CE|}$ stąd $|CF| = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{3}}{8}}{a} = \frac{9}{16}a$

tak więc $\Rightarrow$ $|CF| = \frac{9}{16}|CB|$ #

Zdający najpierw wykorzystał zależność między wysokością i bokiem w trójkącie równobocznym, skorzystał z założenia i wyznaczył $|CE| = |BC| \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8}$. Następnie zauważył, że trójkąty *BDC* oraz *FEC* są podobne. Zapisał równość stosunków odpowiednich boków $\frac{|CD|}{|CB|} = \frac{|CF|}{|CE|}$, *z* proporcji wyznaczył *CF* i po podstawieniu wcześniej otrzymanych wyrażeń za *CE* oraz *CD*, otrzymał tezę $|CF| = \frac{9}{16}|BC|$.

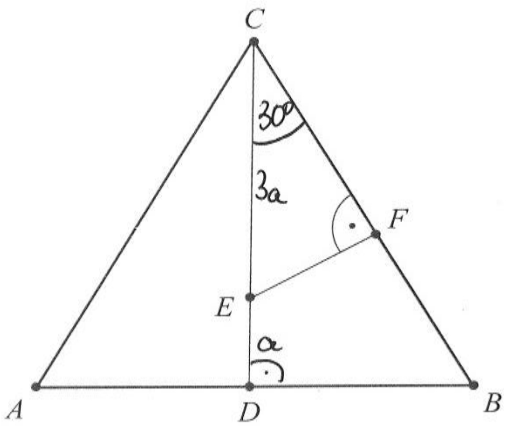
Przykładem 7. ilustrujemy rozwiązanie, w którym zdający skorzystał z założenia, ustalił poprawne związki między odcinkami trójkątów *BCD* oraz *CEF* i otrzymał $|CF| = \frac{3\sqrt{3}x}{2}$ oraz $|CB| = \frac{2 \cdot 4\sqrt{3}x}{3}$. Następnie sprawdził, że dla obliczonych wielkości zależność $|CF| = \frac{9}{16}|BC|$ jest prawdziwa.

Przykład 7.



Wśród rozwiązań były również takie, w których zdający zauważyli, że trójkąty *BCD* i *CEF* są prostokątne o kątach ostrych $30°, 60°$ i zastosowali funkcje trygonometryczne do wyznaczenia długości odcinków *BC* i *CF* (przykład 8.).

Przykład 8.



Wykaż, że $|CF| = \frac{9}{16}|CB|$.

$$|CF| = 3a \cdot \cos \sphericalangle FCE = \frac{3\sqrt{3}}{2}a$$

$$|CB| = \frac{4a}{\cos \sphericalangle BCD} = \frac{4a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\sqrt{3}}a$$

$$\frac{|CF|}{|CB|} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\cancel{a}}{\frac{8}{\sqrt{3}}\cancel{a}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{9}{16},$$ zatem

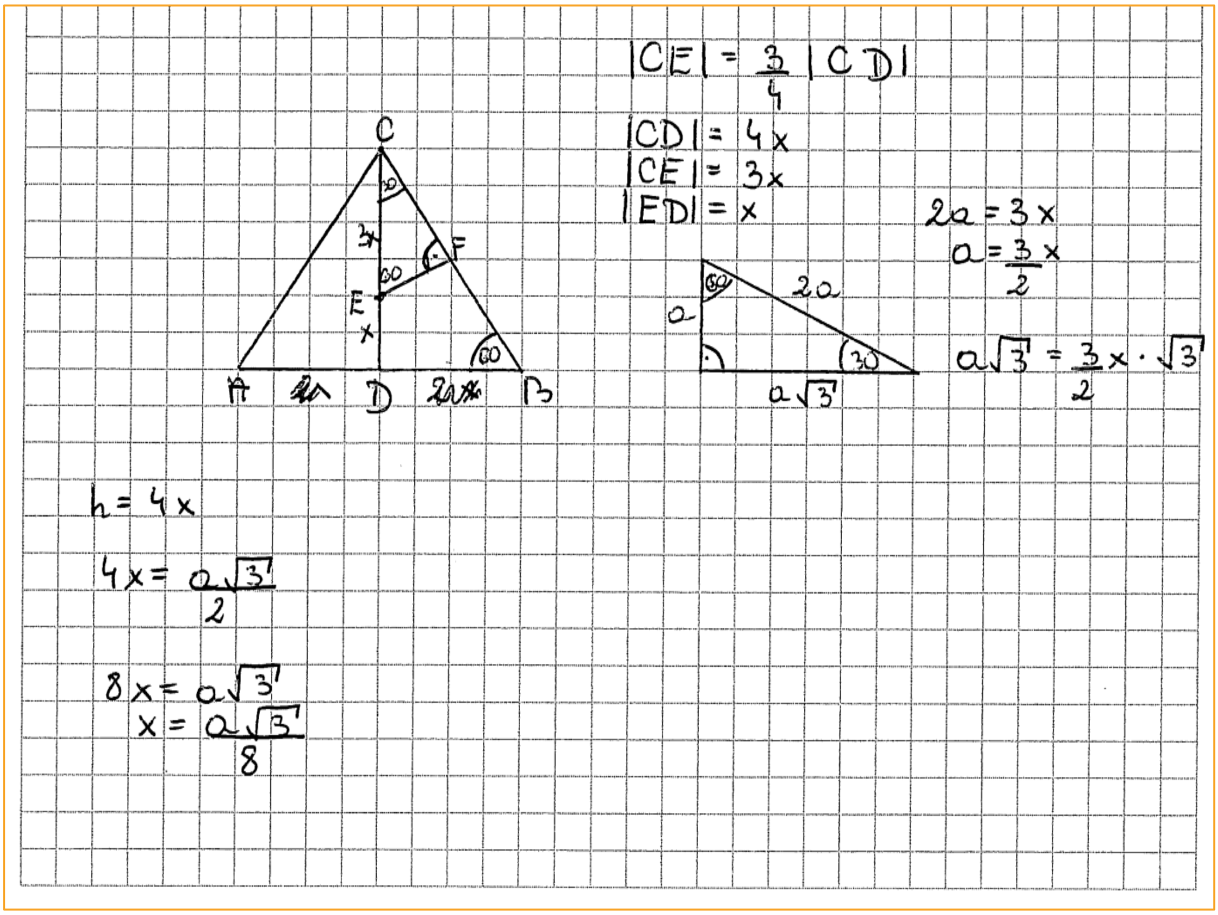
$$|CF| = \frac{9}{16}|CB|$$

Podkreślić należy, że w zadaniach, w których istotą jest uzasadnienie tezy, maksymalną liczbę punktów można otrzymać tylko za rozwiązanie zawierające pełne uzasadnienie. Oznacza to w szczególności, że w zadaniu 29. dwa punkty za rozwiązanie były przyznawane jedynie zdającym, którzy przedstawili w pełni poprawne rozumowanie wykazywanej prawidłowości.

Część zdających poprawnie rozpoczynała rozwiązywanie zadania, jednak albo nie potrafiła przedstawić pełnego rozumowania, pomijając istotne elementy dowodu, albo nie potrafiła doprowadzić rozumowania poprawnie do końca, albo też nie kończyła rozumowania. Prezentujemy przykłady takich niepełnych rozumowań.

W przykładzie 9. zdający zauważył, że trójkąty *BCD* oraz *CEF* są prostokątne o kątach ostrych $30°$ i $60°$, wykorzystał założenie i poprawnie zapisał zależności dla boków każdego z tych trójkątów z osobna. Jednak nie potrafił powiązać wzajemnych zależności między tymi trójkątami, podstawić i przekształcić do postaci $|CF| = \frac{9}{16}|BC|$.

Przykład 9.



$|CE| = \frac{3}{4}|CD|$

$|CD| = 4x$

$|CE| = 3x$

$|ED| = x$

$2a = 3x$

$a = \frac{3}{2}x$

$a\sqrt{3} = \frac{3}{2}x \cdot \sqrt{3}$

$h = 4x$

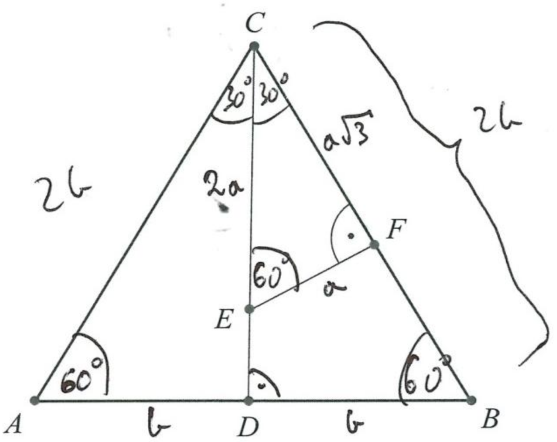
$4x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$8x = a\sqrt{3}$

$x = \frac{a\sqrt{3}}{8}$

Zdający, którego rozwiązanie prezentujemy w przykładzie 10., zapisał układ warunków, częściowo zaznaczając zależności na rysunku, jednak również nie potrafił doprowadzić rozwiązania do końca.

Przykład 10.



Wykaż, że $|CF| = \frac{9}{16}|CB|$.

$|CE| = \frac{3}{4}|CD|$

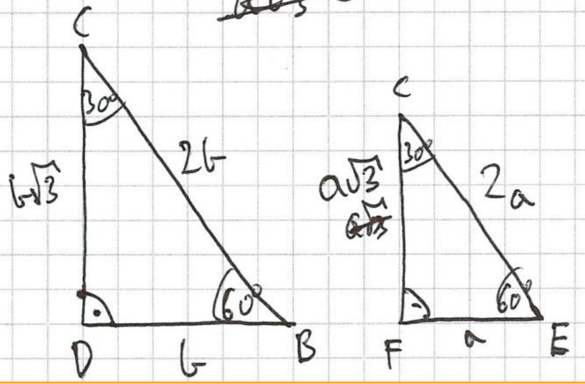
$|CE| = 2a$

$2a = \frac{3}{4}|CD| \quad |:2$

$a = \frac{3}{8}|CD|$

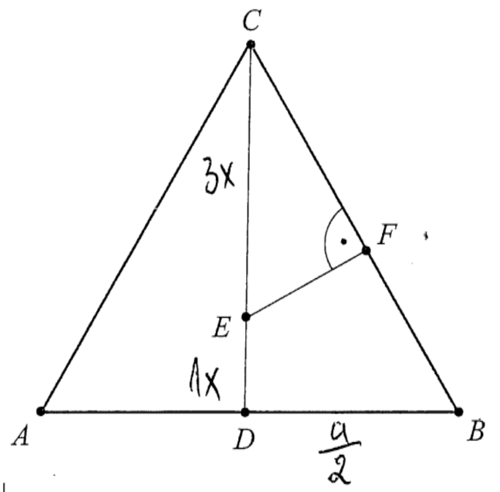
$|CF| = a\sqrt{3}$

$\cancel{a\sqrt{3}} =$



Przykładem 11. ilustrujemy rozwiązanie zdającego, który zauważył, że trójkąty *BCD* i *CFE* są trójkątami prostokątnymi o kątach ostrych $30°, 60°$ i zapisał, że wysokość *CD* trójkąta *BCD* jest równa $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, następnie skorzystał z założenia i zapisał, że wysokość *CD* trójkąta *BCD* jest czterokrotnie większa od długości odcinka *ED*. Jednak w dalszym rozumowaniu popełnił błąd, ponieważ przyjął, że długość odcinka *EF* stanowi $\frac{2}{3}$ wysokości *CD*, a prawdziwa jest zależność $|EF| = \frac{1}{2}|CE|$. W konsekwencji nie doprowadziło to zdającego do otrzymania tezy.

Przykład 11.



Wykaż, że $|CF| = \frac{9}{16}|CB|$.

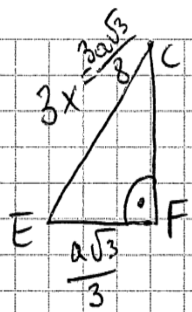
$|CD| = h = 4x$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$4x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \ / \cdot 2$

$8x = a\sqrt{3} \ / : 8$

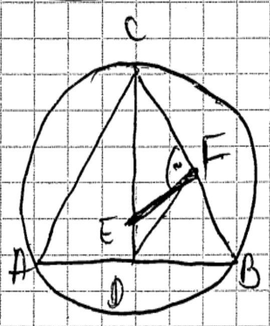
$\boxed{x = \frac{a\sqrt{3}}{8}}$



$|CE| = \frac{3}{1} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{8} = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$

$|EF| = \frac{2}{3} \cdot 4x = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{8} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + |FC|^2 = \left(\frac{3a\sqrt{3}}{8}\right)^2$



$|EF| = \frac{2}{3}h$

$\frac{3a^2}{9} + |FC|^2 = \frac{27a^2}{64}$

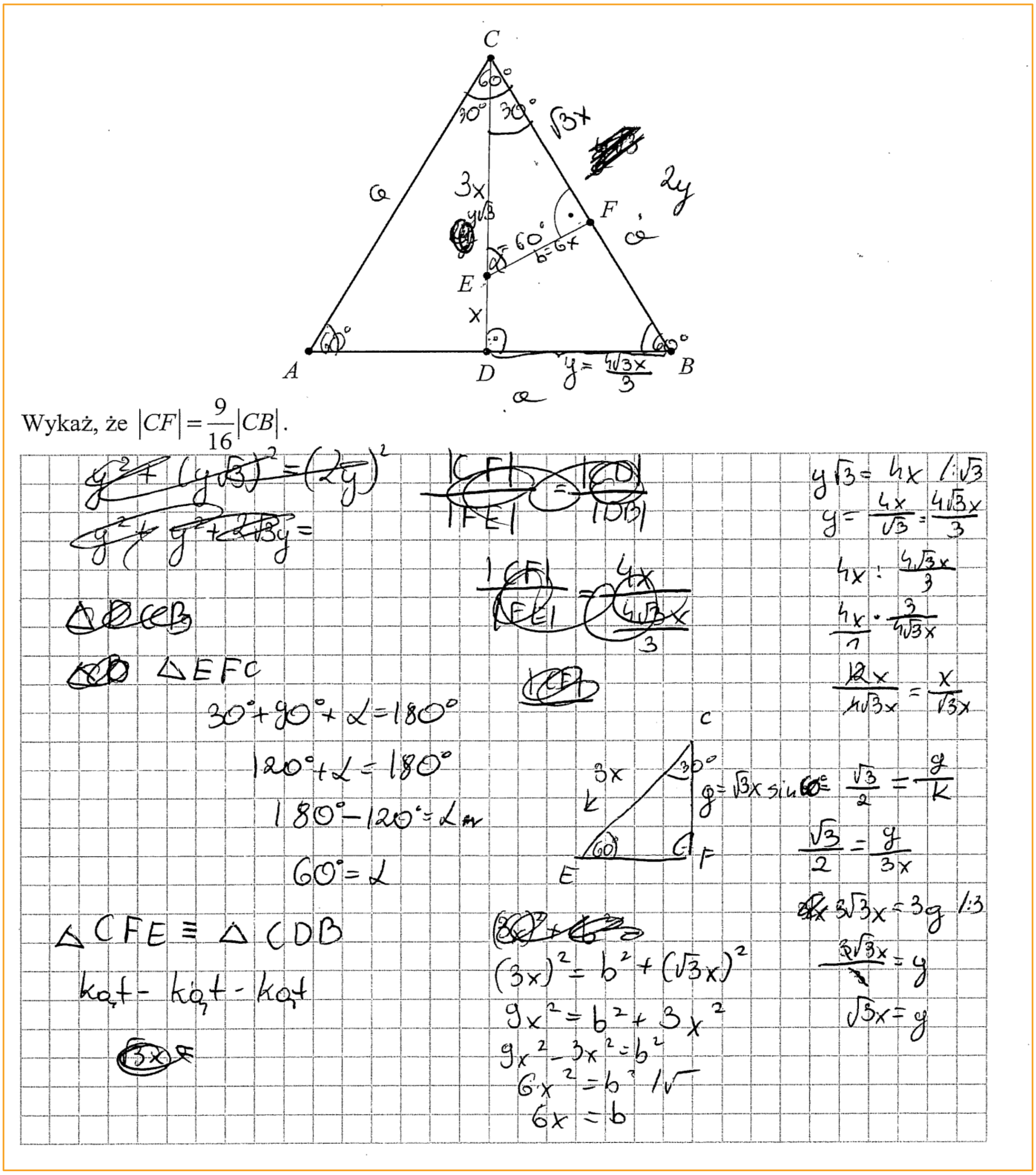
$|FC|^2 = \frac{27a^2}{64} - \frac{3a^2}{9} = \frac{243a^2}{576} - \frac{192a^2}{576} = \frac{51a^2}{576} \ / \sqrt{\ }$

$|FC| = \frac{\sqrt{51}\,a}{24}$

Część zdających popełniała błąd już w początkowym etapie rozumowania, gdy należało ustalić zależności między bokami w trójkącie prostokątnym o kątach ostrych $30°, 60°$.

W przykładzie 12. zdający błędnie wyznaczył długość przyprostokątnej *EF* w trójkącie prostokątnym *CEF.*

Przykład 12.

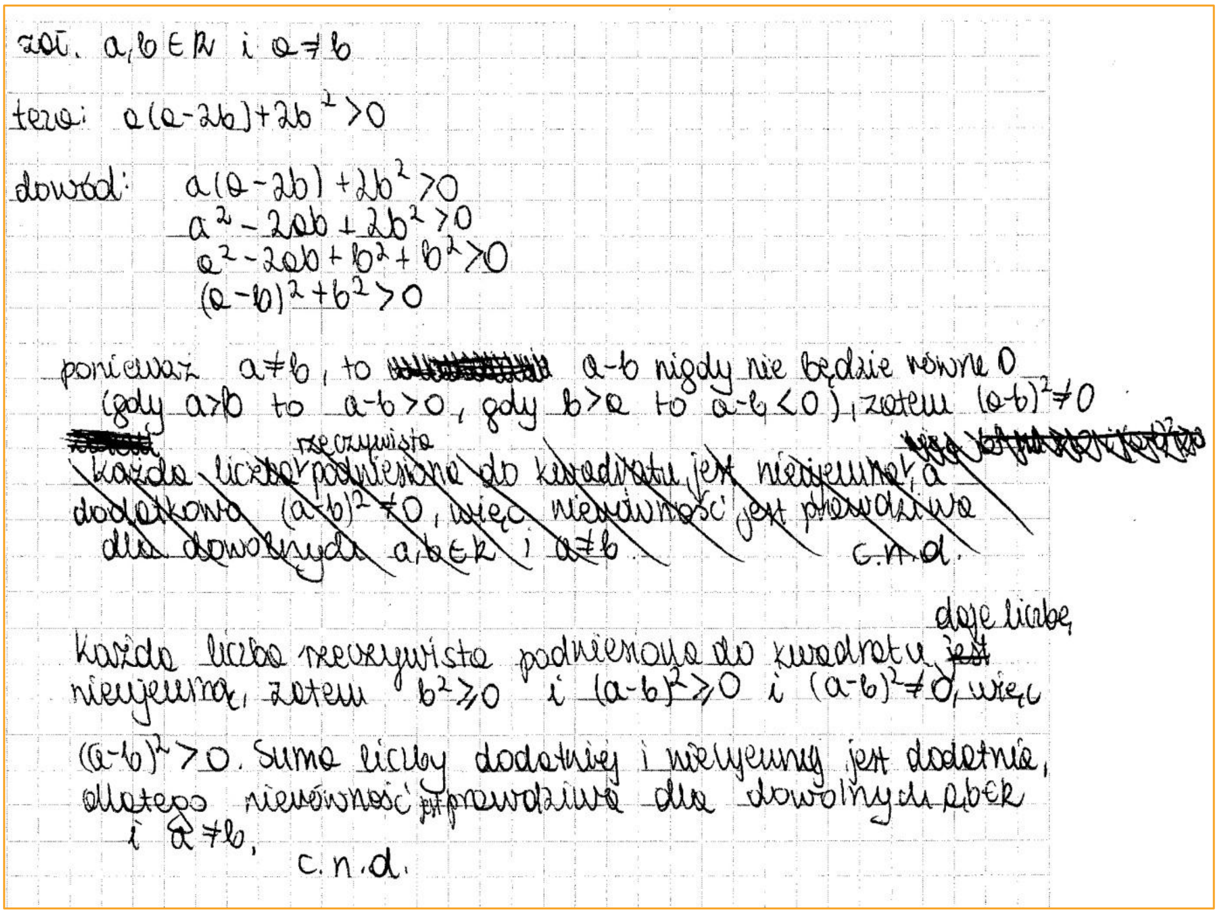


Wśród zdających, którzy podjęli rozwiązanie, była jeszcze nieliczna grupa, która popełniła błąd polegający na przyjęciu konkretnych długości boków. Takie próby rozwiązania są o tyle zaskakujące, że co roku w zasadach oceniania rozwiązania zadań zamieszczana jest uwaga o nieakceptowaniu rozwiązań, w których zdający sprawdza prawdziwość tezy jedynie dla konkretnych wartości. Uwagi zamieszczane w zasadach oceniania odnoszą się również do sytuacji rozważania przez zdających wyłącznie szczególnych przypadków figur geometrycznych. Niepokoi również fakt, że nadal wielu maturzystów nie podjęło nawet próby rozwiązania tego zadania.

Zadanie 28. było kolejnym, które sprawiło tegorocznym maturzystom najwięcej kłopotów. Poziom wykonania (18%) był o pięć punktów procentowych wyższy niż w przypadku omówionego powyżej zadania 29. Maturzyści zmierzyli się w nim z dowodem nierówności $a(a-2b)+2b^2>0$, której prawdziwość należało uzasadnić dla każdych dwóch różnych liczb rzeczywistych *a* i *b*.

Najczęściej stosowanym sposobem dowodzenia było równoważne przekształcanie tezy twierdzenia, mimo że wielu maturzystów tego w swoich rozwiązaniach nie zapisywało. Niżej poprawne rozwiązanie zdającego, który trafnie formułuje swoje uzasadnienie bez zapisu o równoważności przekształceń (przykład 13.).

Przykład 13.



zał. $a, b \in R$ i $a \neq b$

teza: $a(a-2b)+2b^2>0$

dowód: $a(a-2b)+2b^2>0$

$a^2-2ab+2b^2>0$

$a^2-2ab+b^2+b^2>0$

$(a-b)^2+b^2>0$

ponieważ $a \neq b$, to $a-b$ nigdy nie będzie równe 0 (gdy $a>b$ to $a-b>0$, gdy $b>a$ to $a-b<0$), zatem $(a-b)^2 \neq 0$

~~każda liczba rzeczywista podniesiona do kwadratu jest nieujemna, a dodatkowo $(a-b)^2 \neq 0$, więc nierówność jest prawdziwa dla dowolnych $a, b \in R$ i $a \neq b$. c.n.d.~~

Każda liczba rzeczywista podniesiona do kwadratu daje liczbę nieujemną, zatem $b^2 \geq 0$ i $(a-b)^2 \geq 0$ i $(a-b)^2 \neq 0$, więc $(a-b)^2>0$. Suma liczby dodatniej i nieujemnej jest dodatnia, zatem nierówność ~~jest~~ prawdziwa dla dowolnych $a, b \in R$ i $a \neq b$.

c.n.d.

Niemała część zdających, którzy potrafili przeprowadzić bezbłędne przekształcenia nierówności do postaci, z której można w łatwy sposób wnioskować o prawdziwości tezy, opatrzyła rozwiązanie niewłaściwym komentarzem. Istotna część takich niepoprawnych komentarzy wynikała z faktu, iż zdający nie uwzględniali założenia *dla każdych dwóch różnych liczb rzeczywistych a i b*; prawdopodobnie zdający nieuważnie czytali treść zadania lub w ogóle nie zauważali tego założenia bądź uznali je za nieistotne. Poniżej takie właśnie rozwiązania (przykład 14. i przykład 15.)

Przykład 14.

$a(a-2b)+2b^2>0$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$a^2-2ab+2b^2>0$

$a^2-2ab+b^2+b^2>0$

$\underbrace{(a-b)^2}+\underbrace{b^2}>0$

Każda liczba rzeczywista podniesiona do kwadratu jest dodatnia, a suma dwóch liczb dodatnich jest zawsze dodatnia. c.n.d.

Przykład 15.

$a(a-2b)+2b^2>0$

$a^2-2ab+2b^2>0 \quad / -b^2$

$a^2-2ab+b^2>-b^2$

wzór skróconego mnożenia

$(a-b)^2>(-1)b^2$

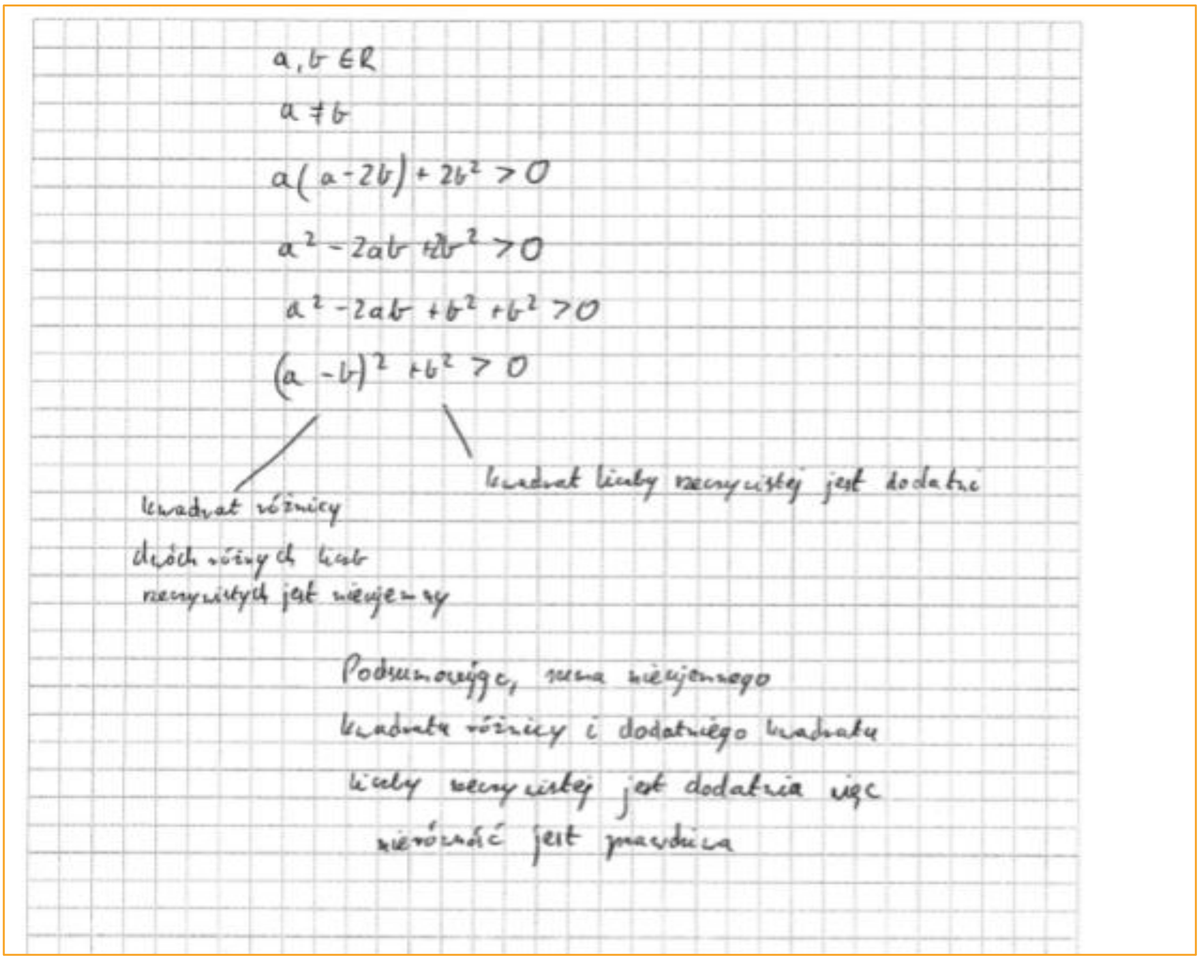
kwadrat każdej liczby jest nieujemny

iloczyn kwadratu każdej liczby (kwadrat jest nieujemny) i -1 jest ujemny

c.n.d.

Niektórzy zdający, mimo że w swoich rozwiązaniach zapisywali założenie $a \neq b$, nie uwzględnili go w formułowaniu uzasadnienia i zapisali niepoprawny wniosek o przyjmowaniu wartości nieujemnych przez kwadrat różnicy liczb rzeczywistych *a* i *b*, jednocześnie zapisując niepoprawny wniosek o przyjmowaniu tylko wartości dodatnich przez kwadrat każdej liczby rzeczywistej (przykład 16.).

Przykład 16.



$a, b \in R$

$a \neq b$

$a(a-2b)+2b^2>0$

$a^2-2ab+2b^2>0$

$a^2-2ab+b^2+b^2>0$

$(a-b)^2+b^2>0$

kwadrat różnicy dwóch różnych liczb rzeczywistych jest nieujemny

kwadrat liczby rzeczywistej jest dodatni

Podsumowując, suma nieujemnego kwadratu różnicy i dodatniego kwadratu liczby rzeczywistej jest dodatnia więc nierówność jest prawdziwa

Część zdających przedstawiła niepełne rozwiązanie zadania, najczęściej przerywając rozumowanie na etapie przekształcenia nierówności, na podstawie której można już sformułować komentarz uzasadniający przyjmowanie wyłącznie nieujemnych wartości przez wyrażenie b^2 oraz, wobec założenia $a \neq b$, wyłącznie dodatnich wartości przez wyrażenie $(a-b)^2$. Jednak zdający takich adekwatnych argumentów nie przytaczali i nie formułowali odpowiedniego wniosku o prawdziwości tezy. Takie rozwiązanie również nie pozwalało na przyznanie zdającym maksymalnej liczby punktów (przykład 17.).

Przykład 17.

$(a^2 - 2ab) + 2b^2 > 0$

$a^2 - 2ab + 2b^2 > 0$

$a^2 - 2ab + b^2 + b^2$

$(a-b)^2 + b^2 > 0$

Wśród niepełnych rozwiązań były również takie, w których zdający przekształcali lewą stronę nierówności do postaci, która wymagała rozważenia kilku przypadków. Poniżej przykład takiego rozwiązania, w którym zdający rozważył dwa przypadki: 1) gdy liczby rzeczywiste *a* i *b* są jednakowych znaków i 2) gdy liczby rzeczywiste *a* i *b* są różnych znaków. Brakuje tutaj trzeciego przypadku – gdy jedno z wyrażeń jest równe 0 (przykład 18.)

Przykład 18.

1. PRZYPADEK

a, b, tych samych znaków

$a^2+2b^2-2\sqrt{2}ab > 2ab-2\sqrt{2}ab$

$\underbrace{(a-\sqrt{2}b)^2}_{\geq 0} > \underbrace{\underbrace{2ab}_{>0}\underbrace{(1-\sqrt{2})}_{<0}}_{<0}$

ckol

2. PRZYPADEK

a, b, różnych znaków

$a^2+2b^2+2\sqrt{2}ab > 2ab+2\sqrt{2}ab$

$\underbrace{(a+\sqrt{2}b)^2}_{\geq 0} > \underbrace{\underbrace{2ab}_{<0}\underbrace{(1+\sqrt{2})}_{>0}}_{<0}$

ck.ol.

Za takie rozwiązania można było otrzymać tylko 1 punkt.

Analizując rozwiązania błędne, zaprezentowane przez maturzystów, można było dostrzec również takie, w których błąd powstawał już na etapie przekształcania nierówności. Typowym dla tegorocznych maturzystów błędem było zapisywanie wyrażenia po lewej stronie nierówności w postaci kwadratu różnicy liczby *a* oraz liczby $b\sqrt{2}$ (przykład 19.), albo kwadratu różnicy liczby $a\sqrt{2}$ oraz liczby $b\sqrt{2}$ (przykład 20.). Część zdających zapisywała lewą stronę nierówności tylko w postaci $a-b\ ^{2}$, pomijając składnik b^2 (jak w przykładzie 21.). Powodowało to istotne uproszczenie problemu.

Przykład 19.

zał: $a, b \in R$
$a \neq b$
teza: $a(a-2b)+2b^2 > 0$

dowód: $a(a-2b)+2b^2 > 0$
$a^2-2ab+2b^2 > 0$
$(a-\sqrt{2}b)^2 > 0$

kwadrat wyrażenia zawsze jest liczbą dodatnią więc
$(a-\sqrt{2}b)^2 > 0$ jest prawdziwe dla ~~każdego~~ $a, b \in R$
c.n.d.

Przykład 20.

$a^2-2ab+2b^2 > 0 \quad |\cdot 2$
$2a^2-4ab+2b^2 > 0$
$(\sqrt{2}a-\sqrt{2}b)^2 > 0$
dla $a \neq b$

~~Liczba pod~~

Jakie ~~kolwiek~~ dwie liczby rzeczywiste podniesione do kwadratu różnice się od siebie stanowią wartości większą od 0.

Przykład 21.

zał.

$a \neq b \quad a$ i $b \in \mathbb{R}$

$a^2 - 2ab + 2b^2 > 0$

$(a-b)^2 > 0$

dowolna liczba rzeczywista podniesiona do kwadratu da liczbę dodatnią, ponieważ $(-b)^2 = (-b)\cdot(-b) = b^2$

Nawet gdy $a-b < 0$, to wynik a-b podniesione do kwadratu da l. dodatnią

minus z minusem daje plus

W każdym z tych przypadków błąd popełniony przez zdających doprowadził do sytuacji, w której zrealizowali oni rozumowanie pomijające konieczność sprowadzenia lewej strony nierówności do sumy kwadratu różnicy liczb rzeczywistych *a* i *b* oraz kwadratu liczby *b*, co było istotą dowodu wyjściowego twierdzenia i wymagało przytoczenia odpowiedniego komentarza uzasadniającego prawdziwość nierówności.

Po analizie rozwiązań niektórych zdających, którzy popełnili błędy przy przekształcaniu nierówności, wnioskować można o rozumieniu przez nich znaczenia założenia $a \neq b$ do uzasadnienia prawdziwości twierdzenia (przykład 22.). Jednak istotne uproszczenie problemu poprzez pominięcie b^2 w przekształconej nierówności powodowało, że za takie rozwiązania zdający nie otrzymywali punktów.

Przykład 22.

$a(a-2b)+2b^2 > 0$ $\quad a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$

$a^2 - 2ab + 2b^2 > 0$

$(a-b)^2 > 0$

~~różnica licz~~

Kwadrat różnicy liczb będzie $=0$ gdy dwie liczby będą miały identyczną wartości

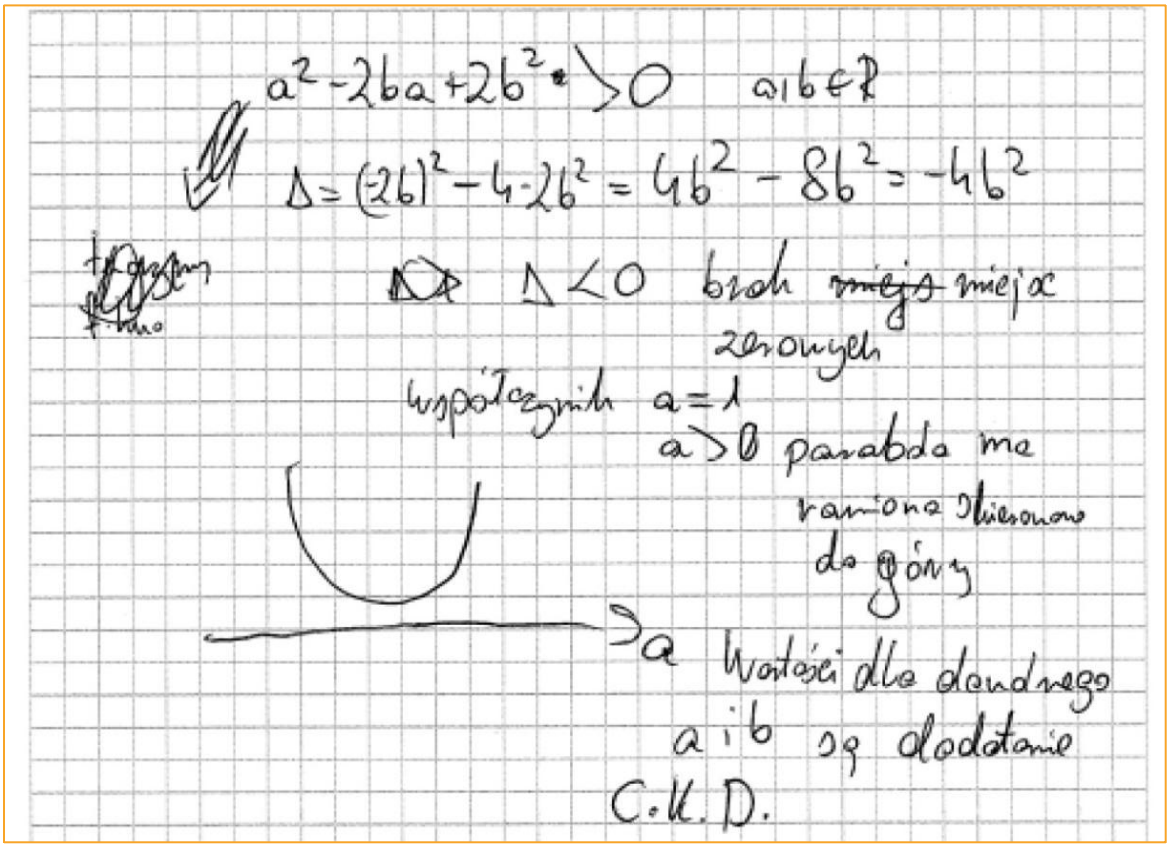
~~co jest równoznaczne z tym że $(a-b)^2 > 0$~~

Lecz gdy liczby $a \neq b$ i $a;b \in \mathbb{R}$ to kwadrat różnicy liczb a i b nie może być równy 0, a więc $(a-b)^2 > 0$ dla dla $a \neq b$, $a,b \in \mathbb{R}$

Należy podkreślić, że wśród maturzystów zdarzają się osoby poszukujące własnych sposobów rozwiązań, prowadzący nieschematyczne rozumowanie. Warto docenić takie działania, zwłaszcza w przypadku zadań postrzeganych przez większość zdających jako trudne.

W poniższym przykładzie 23. zdający potraktował lewą stronę nierówności jako trójmian kwadratowy zmiennej *a* z parametrem *b*, obliczył wyróżnik tego trójmianu, ale rozważył tylko jeden z przypadków, gdy $\Delta < 0$, pominął drugi, gdy $\Delta = 0$. Przeprowadzenie rozumowania w tym właśnie przypadku wymagało od zdającego uwzględnienia założenia $a \neq b$.

Przykład 23.


$a^2-2ba+2b^2>0 \quad a,b\in R$

$\Delta=(-2b)^2-4\cdot 2b^2=4b^2-8b^2=-4b^2$

$\Delta<0$ brak ~~miejs~~ miejsc zerowych

współczynnik $a=1$

$a>0$ parabola ma ramiona skierowane do góry

Wartości dla dowolnego a i b są dodatnie

C.K.D.

Niektórzy maturzyści podejmowali próbę rozwiązania zadania, łącząc dwie metody. W poniższym przykładzie 24. można zauważyć, że zdający poprawnie przekształcił lewą stronę nierówności do postaci umożliwiającej wnioskowanie o jej znaku. Następnie zapisał wniosek o przyjmowaniu przez kwadraty liczb rzeczywistych wartości nieujemnych i zauważył, że otrzymana suma jest nieujemna. Potem traktuje lewą stronę nierówności jako trójmian kwadratowy zmiennej *a* z parametrem *b* i stara się wykazać, że nie może on przyjmować wartości równej zero. Jednak w końcowym wniosku nie jest konsekwentny w stosowaniu wzorów skróconego mnożenia.

Przykład 24.

zał $a \neq b \wedge a, b \in R$

Teza $a(a-2b)+2b^2>0$

Dowód

$a(a-2b)+2b^2>0$

$a^2-2ab+2b^2>0$

$a^2-2ab+b^2+b^2>0$

$(a+b)^2+b^2>0$

zauważmy że:

$(a+b)^2 \geq 0$

$\wedge$

$b^2 \geq 0$ $\Rightarrow$ I $(a+b)^2+b^2 \geq 0$

Sprawdźmy czy to wyrażenie ~~ma~~ może być równe 0

$a^2-2ab+2b^2=0$, b traktujemy jako parametr

$\Delta=4b^2-8b^2=-4b^2 \wedge b^2 \geq 0$

$\Delta \leq 0$

jest 1 bądź 0 rozw.

0 rozw to wyrażenie jest wtedy dodatnie (współczynnik przy a=1)

1 rozw $\Leftrightarrow \Delta=0 \Rightarrow -4b^2=0 \Rightarrow b=0$

$a^2-0+0=0$

$a^2=0 \Leftrightarrow a=0$

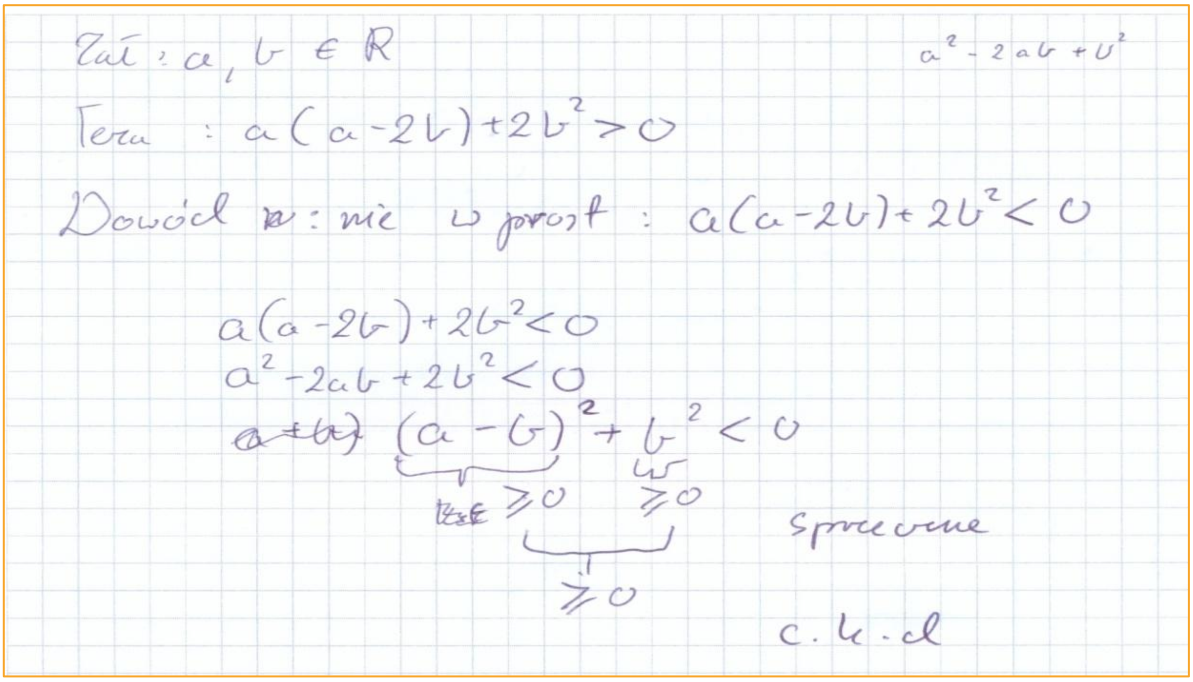
$a=0 \wedge b=0 \wedge a\neq b$ – sprzeczność

II $a^2-2ab+2b^2 \neq 0$

I $\wedge$ II $\Rightarrow (a+b)^2+b^2>0$ cnd.

Niewielka liczba zdających podjęła próbę dowodu twierdzenia nie wprost. Przykładem 25. ilustrujemy takie rozwiązanie, w którym jednak zdający zapisał niepoprawne zaprzeczenie tezy, co w konsekwencji znacznie ułatwiło jego rozumowanie, ponadto nie uwzględnił w rozumowaniu założenia $a \neq b$.

Przykład 25.



Zał: $a, b \in R$ $a^2 - 2ab + b^2$

Teza: $a(a-2b)+2b^2 > 0$

Dowód ~~w~~: nie wprost: $a(a-2b)+2b^2 < 0$

$a(a-2b)+2b^2<0$

$a^2-2ab+2b^2<0$

$\cancel{a \neq b}$ $\underbrace{\underbrace{(a-b)^2}_{\geq 0} + \underbrace{b^2}_{\geq 0}}_{\geq 0} < 0$

sprzeczne

c.k.d

Wśród błędnych rozwiązań, niestety jeszcze często, były również takie, w których wielu zdających wykonywało sprawdzanie poprawności nierówności jedynie dla konkretnych wartości liczb *a* i *b* (przykład 26.). Co roku w zasadach oceniania na stronie internetowej Centralnej Komisji Egzaminacyjnej zamieszczana jest uwaga o nieakceptowaniu rozwiązań, w których zdający sprawdza prawdziwość tezy jedynie dla wybranych wartości, więc tym bardziej niepokoi fakt stosowania przez zdających takiego niepoprawnego sposobu rozwiązania zadania na dowodzenie.

Przykład 26.

$a=2 \quad b=2$

$a(a-2b)+2b^2>0$

$2(2-2\cdot 2)+2\cdot 2^2>0$

$2(2-4)+2\cdot 4>0$

$4-8+8>0$

$4>0$

$a=3 \quad b=3$

$3(3-2\cdot 3)+2\cdot 3^2>0$

$3(3-6)+2\cdot 9>0$

$9-18+18>0$

$9>0$

Zdarzały się również rozwiązania, w których zdający podejmowali próbę przekształcenia nierówności, jednak w końcowej fazie rozwiązania podstawiali konkretne liczby, które w ich mniemaniu miały świadczyć o prawdziwości tezy (przykład 27.).

Przykład 27.

$a(a-2b)+2b^2>0$

$a^2-2ab+2b^2>0$

$a^2+2b^2>2ab$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{dla każdego } a,b\in R \quad a^2+2b^2>2ab \text{ jest nierównością prawdziwą}}$

c.n.d. //

spr: np. 1. $a=1$, $b=3$

$1^2+2\cdot 3^2>2\cdot 1\cdot 3$

$1+18>6$

$19>6$ ✓ prawda

2. $a=5$, $b=-3$

$5^2+(-3)^2>2\cdot 5\cdot(-3)$

$25+9>-30$

$34>-30$ ✓ prawda

W powyższym rozwiązaniu wystarczyło, po doprowadzeniu nierówności do postaci $a^2+2b^2>2ab$, zapisać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych *a* i *b* prawdziwe są nierówności $a^2+2b^2\ge a^2+b^2$ oraz $a^2+b^2\ge 2ab$ i uwzględniając założenie $a\ne b$ zapisać, że $a^2+b^2>2ab$, skąd $a^2+2b^2\ge a^2+b^2>2ab$.

Należy podkreślić, że na poziomie podstawowym niski poziom wykonania mają również zadania: 34. (18%) oraz 32. (20%), w których maturzyści musieli wykazać się umiejętnością zastosowania strategii wynikającej wprost z treści zadania. W przypadku tych zadań, w odróżnieniu od dwóch zadań na dowodzenie, to nie opuszczenia wpłynęły na wskaźnik łatwości. Główną przyczynę niskich wyników stanowił brak całościowej koncepcji rozwiązania zadania, błędy w interpretacji treści tych zadań oraz brak funkcjonalnego opanowania pojęcia kątów w przestrzeni (zadanie 34.) oraz własności przekątnych kwadratu (zadanie 32.). W poprawnym rozwiązaniu zadania wymagającego umiejętności stosowania i tworzenia strategii występują stałe elementy: analiza zadania (określenie relacji między wielkością poszukiwaną a danymi), ustalenie kolejnych kroków prowadzących do rozwiązania (ułożenie planu działania), realizacja przyjętej strategii i zweryfikowaniu wyniku. Chodzi o to, aby zdający potrafił podzielić dany problem na kilka mniejszych problemów cząstkowych i nadał im taką strukturę, która pozwoli mu, w wyniku rozwiązania kolejnych problemów cząstkowych, rozwiązać wyjściowy problem.

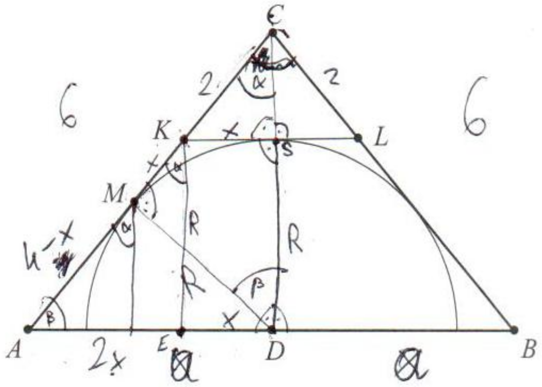
Na poziomie rozszerzonym najwięcej trudności tegoroczni maturzyści mieli z rozwiązaniem zadania 7., o czym świadczy niski poziom wykonania tego zadania – 14%. Sprawdzało ono umiejętności z obszaru *Rozumowanie i argumentacja*, a wymagało przeprowadzenia dowodu geometrycznego z wykorzystaniem podobieństwa trójkątów i twierdzenia o odcinkach stycznych.

Aby udowodnić, że $\frac{|AM|}{|MC|}=\frac{4}{5}$, wystarczyło z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wywnioskować, że odcinek *KL* jest równoległy do odcinka *AB*. Zauważyć, że trójkąty *CKP* (gdzie *P* jest punktem styczności odcinka *KL* z okręgiem) i *CAD* są na mocy cechy (*kat, kąt, kąt*) podobne w skali 1:3, jak również, że trójkąty *CPK* i *CMD* są podobne na mocy cechy (*kat, kąt, kąt*). Następnie zapisać zależności między długościami odpowiednich boków $\frac{|PK|}{|CK|}=\frac{|MD|}{|CD|}$, czyli $\frac{|PK|}{2}=\frac{2x}{3x}$. A stąd po przekształceniach i wykorzystaniu $|AC|=6$ otrzymać tezę $\frac{|AM|}{|MC|}=\frac{4}{5}$.

Drugi sposób dowodu polegał na skorzystaniu z twierdzenia o równości odcinków stycznych. Należało z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wywnioskować, że odcinek *KL* jest równoległy do odcinka *AB*. Zauważyć, że $|KM|=|KP|$ (na mocy twierdzenia o równości odcinków stycznych, łączących punkt leżący poza okręgiem z punktami styczności), gdzie *P* jest środkiem odcinka *KL*. Następnie dostrzec, że trójkąt *ADM* jest podobny do trójkąta *ACD*, na mocy cechy (kąt, kąt, kąt), i zapisać zależność między długościami odpowiednich boków: $\frac{|AM|}{|AD|}=\frac{|AD|}{|AC|}$. Wreszcie wyznaczyć długości *AM* i *AD* w zależności od długości odcinka *KM* i rozwiązać równanie, którego rozwiązanie po podstawieniu prowadziło do otrzymania tezy.

Zdający mógł wybierać różne drogi rozumowania. Zdecydowana większość maturzystów, którzy rozwiązali to zadanie, poprawnie skorzystała z twierdzenia o odcinkach stycznych, łączących punkt leżący poza okręgiem z punktami styczności, a następnie wykorzystała podobieństwo, powołując się na cechę podobieństwa (*kąt*, *kąt*, *kąt*) i zapisała właściwe proporcje, z których to wyprowadzała tezę (przykład 28.).

Przykład 28.



Wykaż, że $\dfrac{|AM|}{|MC|} = \dfrac{4}{5}$.

$\triangle ADC \sim \triangle KSC$ (k,k,k)

S to ~~...~~ punkt w połowie $|KL|$

$\measuredangle ACD = \measuredangle ACD$

$\measuredangle ADC = \measuredangle KSC = 90^\circ$

$\measuredangle CAD = \measuredangle CKS$ – odpowiadające

więc

$\dfrac{x}{2} = \dfrac{a}{6}$

$\dfrac{2+x}{R} = \dfrac{R}{2x}$

$R^2 = 4x + 2x^2 = 2(x^2+2x)$

$R = \sqrt{2x^2+4}$

$\triangle AEK \sim \triangle KSC$ (k,k,k)

$\measuredangle AEK = \measuredangle KSC = 90^\circ$

$\measuredangle KAE = \measuredangle CKS$ – odpow.

$\measuredangle AKE = \measuredangle KCS$ – odpow.

$R^2 = 2(x+1)^2 - 2$

$\cancel{R = \sqrt{2}(x+1)}$

$\dfrac{x}{2} = \dfrac{2x}{\cancel{x+y}\,4}$

$$\frac{4-x}{R} = \frac{R}{2+x}$$

$$R^2 = 8+4x-2x-x^2$$

$$R^2 = -x^2+2x+8$$

$$4^2 = -x^2+2x+8+4x^2$$

$$\cancel{3x^2+2x+8^2=0}$$

$$3x^2+2x-8=0$$

$$\Delta = 4+96$$

$$\sqrt{\Delta} = 10 \qquad x>0$$

$$x_1 = \frac{-2-10}{6} = -2 \notin D$$

$$x_2 = \frac{-2+10}{6} = \frac{4}{3}$$

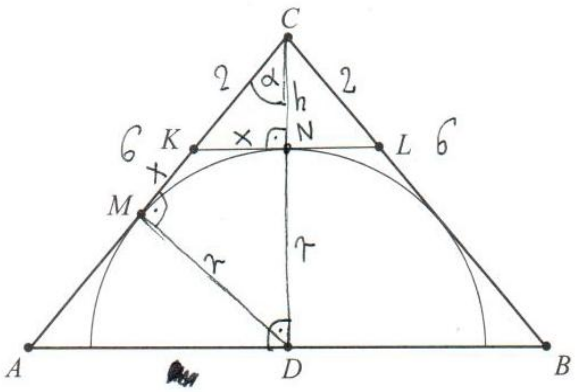
$$\frac{4}{3}+\frac{6}{3} = \frac{10}{3} = |MC|$$

$$|AM| = \frac{4\cdot 3}{3} - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \qquad \frac{|AM|}{|MC|} = \frac{\frac{8}{\cancel{3}}}{\frac{10}{\cancel{3}}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

c.n.d.

Część zdających w rozwiązaniu skorzystała z podobieństwa trójkątów oraz twierdzenia o odcinkach stycznych (przykład 29.)

Przykład 29.



Wykaż, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$.

$\Delta ADC \sim \Delta KNC \sim \Delta DMC$ (kkk)

z podobieństwa układam równania

$$\frac{r+h}{x+2} = \frac{6}{r+h} = \frac{2}{h}$$

$x = |KM| = |KN|$ bo są to styczne przecinające się

$\Delta KNC \sim \Delta DMC$

$$\frac{2}{x} = \frac{r+h}{r} \qquad 2r = x(r+h) \rightarrow (r+h) = \frac{2r}{x}$$

$$(r+h)(r+h) = 6x+12$$

$$\frac{x}{h} = \frac{r}{x+2}$$

$|NC| = h$

$|DN| = r = |DM|$

$|AC| = 6$

$|KC| = 2$

$|MK| = x$

$|AM| = 6 - (x+2)$

$|MC| = x+2$

(2)

z tw. Pitagorasa:

$x^2+h^2=4$

$(x+2)^2+r^2=(r+h)^2$

$\cancel{(x+2)^2+r^2=6x+12}$

$\frac{6}{r+h}=\frac{2}{h}$

$6h=2r+2h$

$4h=2r$

$r=2h \quad (1)$

z (1)

$(x+2)^2+4h^2=9h^2$

$(x+2)^2=5h^2$

$\frac{r+h}{x+2}=\frac{6}{r+h}$

z (1)

$3h\cdot 3h=6(x+2)$

$9h^2=6(x+2)$

$\underline{x+2=a}$ $\qquad a^2=5h^2 \qquad 6a=9h^2$

$a^2=\frac{5}{\cancel{9}_{3}}\cdot\cancel{6}^{2}a$ $\qquad \cancel{a^2-10a+25=}$

$a^2-\frac{10}{3}a=0$

$a\left(a-\frac{10}{3}\right)=0 \qquad a>0 \Rightarrow a=\frac{10}{3}$

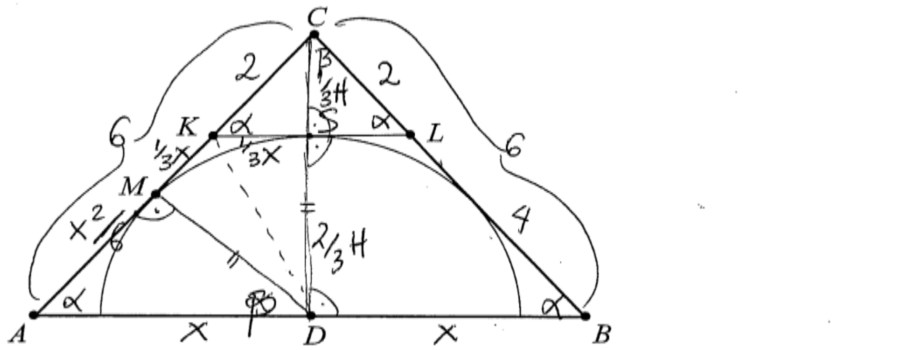
więc $|AM|=6-a=\frac{18-10}{3}=\frac{8}{3}$

$|MC|=\frac{10}{3} \Rightarrow$ zatem $\frac{|AM|}{|MC|}=\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{10}=\frac{4}{5}$

ckd.

Część zdających w rozwiązaniu skorzystała z podobieństwa trójkątów *CKL* i *CAB* oraz zauważyła, że trójkąty *KSD* i *MKD* (gdzie *S* jest punktem styczności okręgu z odcinkiem *KL*) są przystające, nie zapisując, że korzysta z twierdzenia o odcinkach stycznych (przykład 30.).

Przykład 30.



Wykaż, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$.

$|KC| = |LC| = 2$ więc $|KL| \parallel |AB|$, więc $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle KLC| = \alpha$

punkt S to środek $|KL|$,

ΔCKL i ΔCAB są podobne (k,k,k)

$k = \frac{|CK|}{|CA|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, więc $|KS| = \frac{1}{3}x$

ΔKSD i ΔMKD są przystające, więc

$|MK| = |KS| = \frac{1}{3}x$

$|AM| = 4 - \frac{1}{3}x = \frac{12 - x}{3}$ $\quad |MC| = \frac{1}{3}x + 2 = \frac{x}{3} + \frac{6}{3} = \frac{x+6}{3}$

$\begin{cases} H^2 + x^2 = 36 \\ \frac{1}{9}H^2 + \frac{1}{9}x^2 = 4 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 9H^2 + 9x^2 = 324 \\ H^2 + x^2 = 36 \quad / \cdot (-4) \end{cases}$

Δ_{AMD} i Δ_{ADC} są podobne

$\frac{|AM|}{x} = \frac{x}{6}$ $|AM| \cdot 6 = x^2$

$6 = 2 + \frac{1}{3}x + \frac{x^2}{6}$

$24 = 2x + x^2$

$x^2 + 2x - 24 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \cdot (-24) = 100$ $\sqrt{\Delta} = 10$ $6 > x > 0$: D_1

$x_1 = \frac{-2-10}{2} = -6 \notin D_1$ $x_2 = \frac{-2+10}{2} = 4 \in D_1$

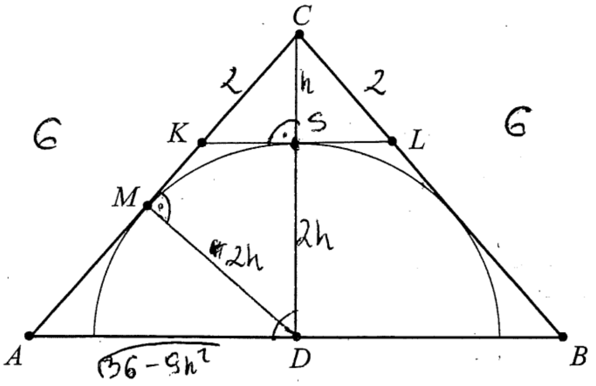
$x = 4$

$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{16}{6} : \left(\frac{36}{6} - \frac{16}{6}\right) = \frac{16}{6} \cdot \frac{6}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

c.n.d

Duża grupa zdających, która rozwiązała to zadanie, poprawnie korzystała z podobieństwa trójkątów i wykorzystywała twierdzenie Pitagorasa (przykład 31.).

Przykład 31.



Wykaż, że $\dfrac{|AM|}{|MC|} = \dfrac{4}{5}$.

$|AK| = |LB| = 6 - 2 = 4$ $\quad \triangle ADC \sim \triangle KSC$ z kkk *

$|MD| = |SD|$, bo promień okręgu o środku D

$\dfrac{|KC|}{|CS|} = \dfrac{|CA|}{|CD|} \quad \dfrac{2}{|CS|} = \dfrac{6}{|CD|}$

$2|CD| = 6|CS| \quad |CD| = 3|CS|$

$|MD| = |SD| = 2h \quad |CS| = h \quad |CD| = 3h \quad |SD| = 2h$

$\triangle DMC \sim \triangle ADC$ z kkk **

$\dfrac{|CM|}{|CD|} = \dfrac{|CD|}{|CA|} \quad \dfrac{|CM|}{3h} = \dfrac{3h}{6} \quad 6|CM| = 9h^2 \quad |CM| = \dfrac{3}{2}h^2$

$|AD|^2 + |CD|^2 = |AC|^2 \quad |AD|^2 + (3h)^2 = 6^2 \quad |AD|^2 = 36 - 9h^2$

$|AD| = \sqrt{36-9h^2}$

$\triangle AMD \sim \triangle ADC$ z kkk ***

$\dfrac{|AD|}{|MD|} = \dfrac{|AC|}{|CD|} \quad \dfrac{\sqrt{36-9h^2}}{2h} = \dfrac{6}{3h}$

$12h = 3h\sqrt{36-9h^2}$

$144h^2 = 9h^2(36-9h^2)$

$144h^2 = 324h^2 - 81h^4$

$81h^4 = 180h^2$

$81h^2 = 180 \quad h^2 = \dfrac{180}{81} \quad h = \dfrac{6\sqrt{5}}{9}$

$|AM|^2 + |MD|^2 = |AD|^2$

$|AM|^2 + 4h^2 = 36 - 9h^2$

$|AM|^2 = 36 - 13h^2$

$|AM|^2 = 36 - \frac{13 \cdot 180}{81} = \frac{2916 - 2340}{81} = \frac{576}{81}$ $|AM| = \frac{24}{9}$

$|CM|^2 + |MD|^2 = |CD|^2$

$|CM|^2 + 4h^2 = 9h^2$

$|CM|^2 = 5h^2 = \frac{5 \cdot 180}{81} = \frac{900}{81}$ $|CM| = \frac{30}{9}$

$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$ $5|AM| = 4|MC|$

$5 \cdot \frac{24}{9} = 4 \cdot \frac{30}{9} \quad / \cdot 9$

$120 = 120$ C. N. D.

* $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle KCS| \wedge |\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle KSC| \wedge$

$|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CKS|$

** $|\sphericalangle DMC| = |\sphericalangle ADC| \wedge |\sphericalangle MCD| = |\sphericalangle ACD| \wedge$

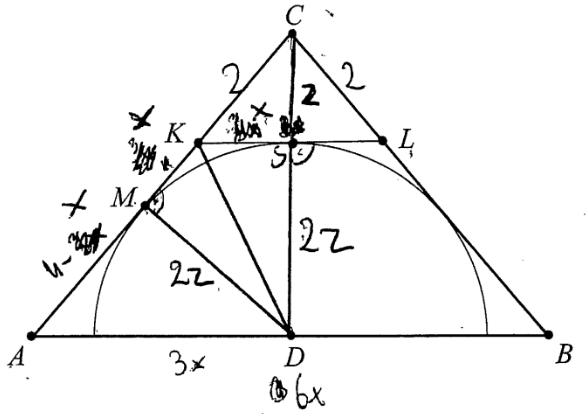
$|\sphericalangle MDC| = |\sphericalangle CAD|$

*** $|\sphericalangle MAD| = |\sphericalangle CAD| \wedge |\sphericalangle AMD| = |\sphericalangle ADC| \wedge$

$|\sphericalangle ADM| = |\sphericalangle ACD|$

Niektórzy zdający w dowodzie wykorzystali obliczenie pola trójkąta *ADC* jako połowy iloczynu długości boków *AD* i *DC* oraz boku *AC* i wysokości *MD* (przykład 32.).

Przykład 32.



Wykaż, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$.

$\Delta ABC \sim \Delta KCL$ cecha kkk $|AM| + |MC| = 6$

w skali 1:3

$P_{\Delta ADC} = P_{\Delta ADC}$

$\frac{6 \cdot |MD|}{2} = \frac{|AD| \cdot |CD|}{2}$

$\frac{6 \cdot 2z}{2} = \frac{3x \cdot 3z}{2}$

$6z = \frac{9xz}{2}$

$6 = \frac{9x}{2}$

$\frac{12}{9} = x$

$x = \frac{4}{3}$

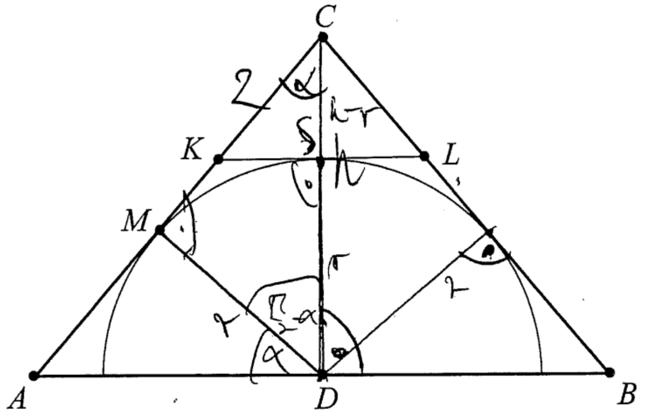
$|AM| = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

$|MC| = 2\frac{4}{3} = \frac{10}{3}$

$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

Wśród rozwiązań znalazły się i takie, w których zdający korzystali w dowodzeniu z własności trójkąta równobocznego (jego połowy) oraz definicji funkcji trygonometrycznych (przykład 33.).

Przykład 33.



Wykaż, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$.

dowód: $\Delta ADC \sim \Delta DMC$ z kk $(90^\circ, \alpha)$ $r, h > 0$

$\Delta ADM \sim \Delta DCM$ z kk $(90^\circ, \alpha)$

$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{h}{6} \\ \cos\alpha = \frac{|MC|}{h} \end{cases} \Rightarrow \frac{h}{6} = \frac{|MC|}{h} \Rightarrow h^2 = 6|MC|$

Δ: $r^2 = |AM||MC|$ $|AM| + |MC| = 6$

$|KC| + |KA| = 6 \wedge |KC| = 2 \Rightarrow |KA| = 4$

$\Delta KSC \sim \Delta ADC$ z kk $(90^\circ, \alpha)$

$k = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{h-r}{h} \Rightarrow 3h - 3r = h \Rightarrow h = \frac{3}{2}r$

$|MC|^2 = h^2 - r^2 = \frac{9}{4}r^2 - r^2 = \frac{5}{4}r^2$ $|MC| > 0$

$|MC| = \frac{\sqrt{5}}{2} r$

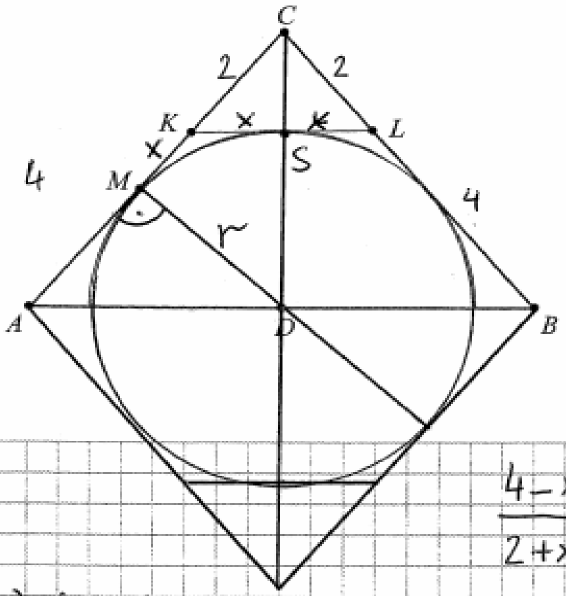
$$r^2 = |AM||MC| \Leftrightarrow r^2 = |AM| \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} r$$

$$|AM| = r \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = r \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{r \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}}{r \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{4}{5} \quad \text{c.n.d.}$$

Czasami błędy rachunkowe popełniane przez zdających podczas przekształcania wyrażeń algebraicznych przekreślały poprawność ciekawego rozwiązania (przykład 34.).

Przykład 34.



Wykaż, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$.

$$\frac{4-x}{2+x} = ?$$

$$r^2 = (4-x)(2+x)$$

$$\triangle CDM \sim \triangle CKS \ (kk)$$

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+(x+2)^2}} = \frac{x}{2}$$

$$2r = x\sqrt{r^2+(x+2)^2}$$

$$4r^2 = x^2\left(r^2+(x+2)^2\right)$$

$$4\cdot(4-x)\cancel{(2+x)} = x^2\left((4-x)\cancel{(2+x)} + (x+2)^{\cancel{2}}\right)$$

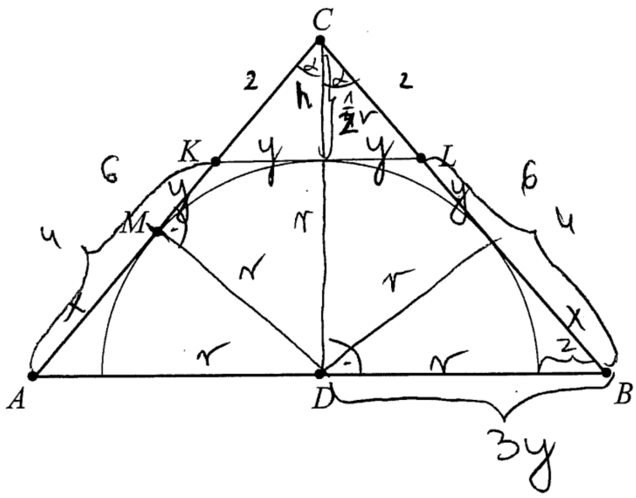
$$4(4-x) = x^2(4-x+x+2)$$

$$4(4-x) = 2x^2$$

$$16-4x=2x^2$$
$$8-2x=x^2$$
$$x^2+2x-8=0$$
$$\Delta=4+32=36$$
$$x=\frac{-2+6}{2}=2 \quad \vee \quad x=\frac{-2-6}{2}<0$$

Niemała część zdających poprawnie rozpoczynała rozumowanie zauważając podobieństwo trójkątów, a nawet zapisywała poprawne zależności, jednak wskutek błędów rachunkowych nie potrafiła doprowadzić rozumowania do końca. Przykładem 35. ilustrujemy takie rozwiązanie.

Przykład 35.



Wykaż, że $\frac{|AM|}{|MC|}=\frac{4}{5}$.

$x+y=4$

$KL \parallel AB$ z tw. Talesa

$\Delta KLC \sim \Delta ABC$ (kkk)

$k=\frac{|KC|}{|AC|}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\Delta MDC \sim \Delta DBC$ (kkk)

$\frac{|MC|}{|DC|}=\frac{|DC|}{|BC|}$

$\frac{2+y}{\frac{3}{2}r}=\frac{\frac{3}{2}r}{6}$ $\quad 12+6y=\frac{9}{4}r^2$

$6y=\frac{9}{4}r^2-12$

$y=\frac{3}{24}r^2-12$

$h=\frac{1}{3}(h+r)$

$h=\frac{1}{3}h+\frac{1}{3}r$

$\frac{2}{3}h=\frac{1}{3}r$

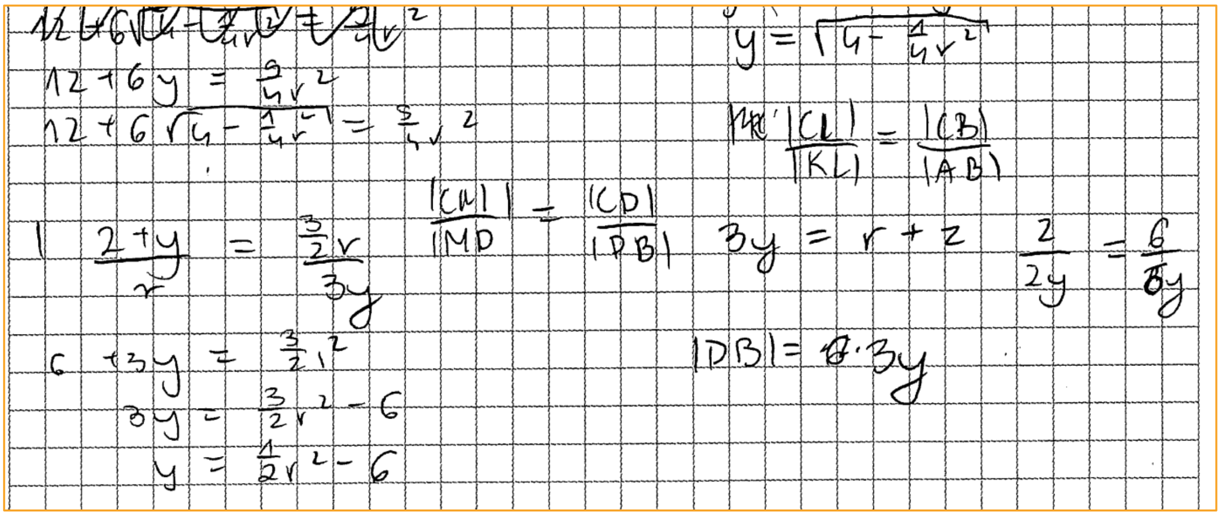
$h=\frac{1}{2}r$

$y^2+\left(\frac{1}{2}r\right)^2=2^2$

$y^2+\frac{1}{4}r^2=4$

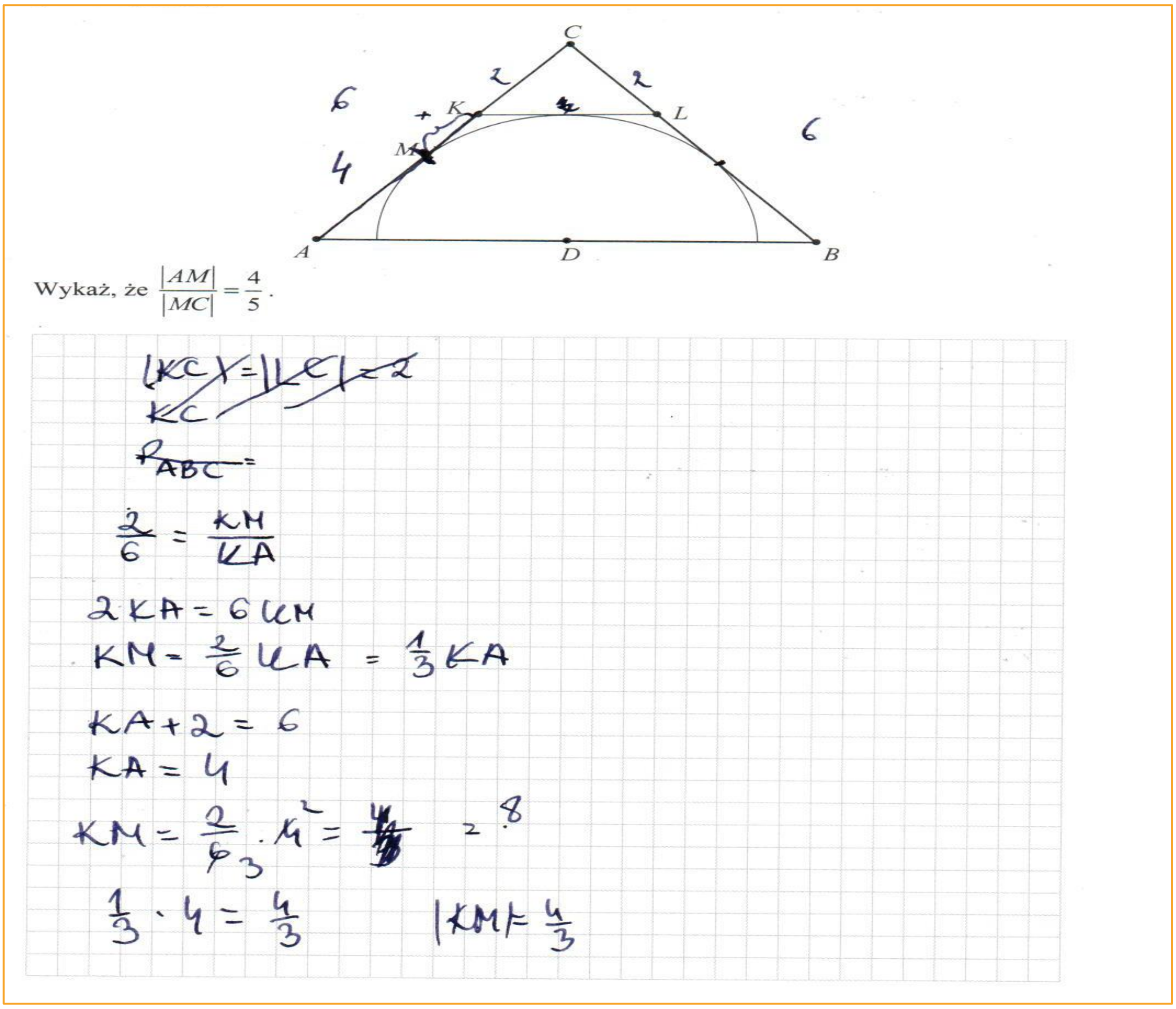
$y^2=4-\frac{1}{4}r^2$

$y=\sqrt{4-\frac{1}{4}r^2}$



Część zdających błędnie interpretowała treść zadania wyciągając niewłaściwe wnioski (przykład 36.), inni poprawnie rozpoczynali rozumowanie, jednak w dalszej części rozwiązania albo przyjmowała błędne założenia (przykład 37., przykład 42.), albo po prostu kończyła rozwiązanie, ponieważ nie potrafiła wykorzystać otrzymanych zależności (przykład 38., 39., 40., 41.).

Przykład 36.

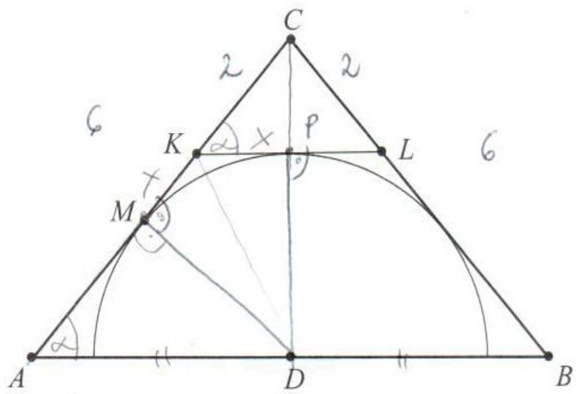


$|AM| = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

$|MC| = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$

$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{8}{3} : \frac{10}{3} = \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}^{3}}{\cancel{10}_{5}} = \frac{4}{5}$

Przykład 37.



Wykaż, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$.

$\sphericalangle|MAD| = \sphericalangle|CKL|$ $\quad \sphericalangle|AMD| = 90^\circ$

$\Delta KCP \sim \Delta AMB$ (k, k, k) $\quad x = |KP|$

$\frac{|AM|}{R} = \frac{x}{|CD| - R}$ $\quad |MC| = 2 + x$

$|AM| = 4 - x$

$|AD|^2 + |CD|^2 = 36$

$x^2 + (|CD| - R)^2 = 4$

$\frac{|AM|}{|AD|} = \frac{x}{2}$

$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4-x}{2+x}$

$\frac{2}{6} = \frac{x}{|AD|}$

$|AD| = 3x$

$\frac{|AM|}{3x} = \frac{x}{2}$

$|AM| = \frac{3x^2}{2}$

Przykład 38.

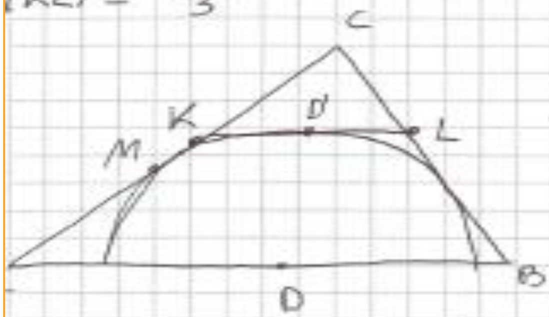
$\Delta ABC \sim \Delta KLC$

$\frac{|BC|}{|LC|} = \frac{6}{2} = 3$ $\quad \underline{k=3}$

Skoro Δ są podobne, a wsp. podobieństwa $k=3$, to

$|AB| \cancel{:3} = |KL| \cdot 3$

$|KL| = \frac{|AB|}{3}$



$|AK| = 4$

$|AM| + |MK| = 4$

$|MK| = |KD'|$ $\quad |KD'| = \frac{|KL|}{2}$

$|KD'| = \frac{|AB|}{6}$

$|MC| = |KM| + |KC|$

$|AM| = 4 - \frac{|AB|}{6}$

$|MC| = \frac{|AB|}{6} + |KC|$ $\quad |MC| = \frac{|AB|}{6} + 2$

$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4 - \frac{|AB|}{6}}{\frac{|AB|}{6} + 2} = \frac{4 - \frac{|AB|}{6}}{2 + \frac{|AB|}{6}} = (4 - \frac{1}{6}AB)(2 + \frac{1}{6}AB)$

Przykład 39.

$\frac{|CK|}{|KL|} = \frac{|CA|}{|AB|}$

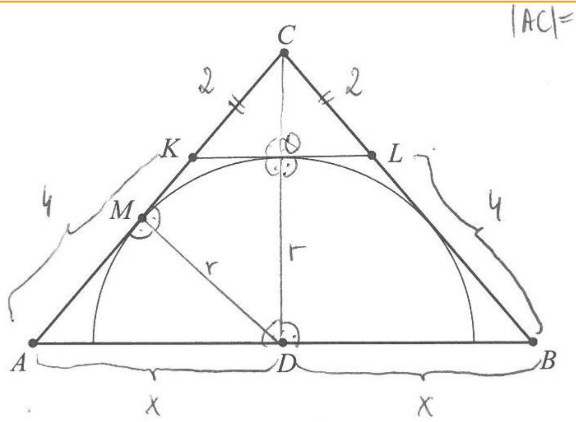
$\frac{2B}{|KL|} = \frac{6}{|AB|}$

$\frac{|AB|}{|KL|} = \frac{6}{2}$

$\frac{|AB|}{|KL|} = 3$

Przykład 40.

$|AC|=|BC|=6$



Wykaż, że $\frac{|AM|}{|MC|}=\frac{4}{5}$.

Zh Teza: $\frac{|AM|}{|MC|}=\frac{4}{5}$

Niech:

$|AM|=y$ wtedy $|MK|=4-y$ a teza to: $\frac{y}{4-y+2}=\frac{4}{5}$ czyli $\frac{y}{6-y}=\frac{4}{5}$

$5y=24-4y \quad |+4y$

$9y=24$

$y=2\frac{2}{3}$

1) $|KL|=\frac{1}{3}2x=\frac{2}{3}x$ (z trójkątów podobnych (ΔABC i ΔKLC) w skali $3:1$)

$|KO|=\frac{1}{2}|KL|=\frac{1}{3}x$

2) $|DC|=6^2-x^2=36-x^2 \wedge |CO|=\frac{1}{3}(36-x^2)=12-\frac{1}{3}x^2$

3) $\begin{cases} x^2=r^2+y^2 \quad y=\frac{1}{9}x^2+(12-\frac{1}{3}x^2)^2 \\ \cancel{x^2+(36-x^2)=6^2} \\ (6-y)^2+r^2=(36-x^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=r^2+y^2 \\ \cancel{x^2=36} \; 36y=\frac{1}{9}x^2+144-8x^2+\frac{1}{9}x^4 \\ 36-12y+y^2+r^2=36-x^2 \end{cases}$

$\begin{cases} -7\frac{8}{9}x^2+\frac{1}{9}x^4=-140 \\ x^2=r^2+y^2 \\ y^2+r^2=-x^2+12y \end{cases} \Rightarrow$ $\frac{1}{9}x^4-\frac{71}{9}x^2+140=0$

Niech ~~xt~~ $x^2=t$ gdzie $t\geq 0$

$\frac{1}{9}t^2-\frac{71}{9}t+140=0$

$\cancel{\Delta=\frac{5041}{81}}$

Przykład 41.

$\triangle KLC \sim \triangle ABC$ w skali $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = k$

Niech r będzie promieniem wpisanego półokręgu.

Wtedy $r^2 + |AM|^2 = |AD|^2$

Wiadomo, że $KL = \frac{1}{3} \cdot |AB| = \frac{2}{3} |AD|$

~~Z twierdzenia~~ Niech M' będzie obrazem punktu M w osi symetrii

DC. ~~Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą mamy:~~

$\frac{|MP|}{r} = \frac{r}{|DB|} \Rightarrow r^2 = |MP| \cdot |DB|$

$\frac{|CD|}{|CB|} = \frac{|CQ|}{|KL|}$

$\frac{|CD|}{6} = \frac{|CQ|}{2}$

$|CD| = 3|CQ|$

$|DP| = |CP|$

$|MC| = r$, z równoramienności trójkąta DMC.

$\frac{r}{Am} = \frac{|CQ|}{|AD|}$

$r \cdot |AD| = |CD| \cdot |AM|$

$|AD| = \frac{|CD||AM|}{r}$

$r^2 + |AM|^2 = \frac{|CD|^2 \cdot |AM|^2}{r^2}$

$\frac{PC}{r} = \frac{QC}{2}$

$r|QC| = 2|PC|$

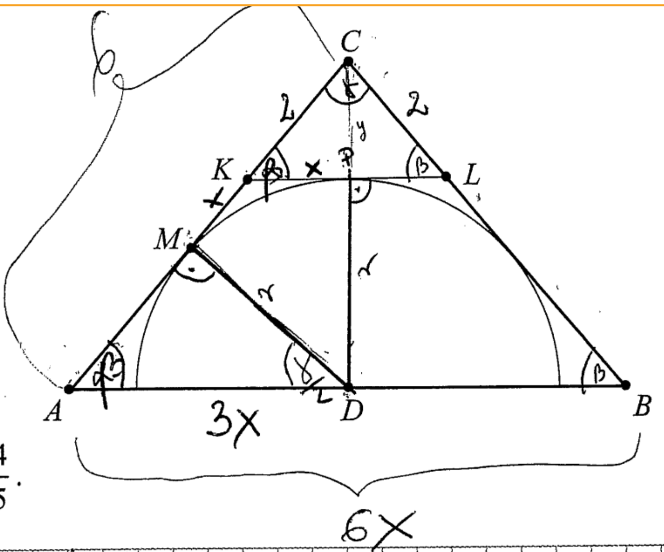
$|CP| = \frac{1}{2} CD$

$\triangle MM'C \sim \triangle ABC$ w skali $k_2 = \frac{1}{2}$

$AM = \frac{1}{2} \cdot AC = 3$

$\frac{r}{3} =$

Przykład 42.



Wykaż, że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$.

Zał: $|AC| = |BC| = 6$

$|AD| = |DB| = \frac{1}{2}|AB|$

$|KC| = |LC| = 2$

T: $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$

Dowód: $|KL| \parallel |AB|$

$\Delta ABC \sim \Delta KLC$ (kkk)

$\frac{|CK|}{|CA|} = \frac{2}{6}$

$k = \frac{1}{3}$

Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że:

$|KM| = |KP| = x$

$|AC| = |AM| + |MK| + |KC|$

$\Downarrow$

$6 = |AM| + x + 2$

$4 = |AM| + x$

$|AM| = 4 - x$

$|MC| = x + 2$

$\cancel{\frac{|AM|}{|MC|}} = \cancel{\frac{4-x}{x+2}}$

Po analizie rozwiązań zadania 7. nasuwa się spostrzeżenie, że tegoroczni maturzyści nie potrafią właściwie wykorzystać znanych im twierdzeń, albo rozważają szczególne przypadki, przyjmując nieuprawnione założenia o figurach geometrycznych. W swych rozwiązaniach powoływali się na twierdzenia, które przy ich metodzie rozwiązania nie miały zastosowania lub nie doprowadziły ich do pełnego uzasadnienia tezy.

Kolejnym zadaniem, które sprawiło najwięcej kłopotów tegorocznym maturzystom zdającym egzamin na poziomie rozszerzonym, było zadanie 13. Poziom wykonania tego zadania wyniósł 14%. Maturzyści zmierzyli się w tym zadaniu z zagadnieniem kombinatorycznym, w którym wykorzystywali wzory na liczbę kombinacji i wariacji z powtórzeniami do zliczenia liczby liczb siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.

Aby obliczyć, ile jest wszystkich liczb siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2, można było rozważyć trzy przypadki: I. – gdy pierwszą cyfrą rozpatrywanej liczby jest 1, II. – gdy pierwszą cyfrą rozpatrywanej liczby jest 2 i III. – gdy pierwsza cyfra rozpatrywanej liczby jest różna od 1 i od 2. W każdym z tych przypadków można obliczyć liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry 1, cyfry 2 oraz cyfr różnych od cyfry 1 i cyfry 2. Następnie należy zsumować otrzymane liczby w każdym z przypadków i zapisać, że istnieje 12 960 siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.

Drugi sposób rozwiązania polegał na rozważeniu dwóch przypadków: I., w którym rozważamy wszystkie „liczby” siedmiocyfrowe, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru {0,3,4,5,6,7,8,9} oraz II., w którym rozważamy wszystkie „liczby” siedmiocyfrowe, których pierwszą cyfrą jest 0 oraz w których zapisie występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie jedna cyfra ze zbioru {0,3,4,5,6,7,8,9}. W każdym z tych przypadków należało obliczyć liczbę takich liczb, a następnie od liczby otrzymanych liczb w I. przypadku odjąć liczbę otrzymanych liczb w II. przypadku i zapisać, że istnieje 12 960 siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.

Poniżej zamieszczamy poprawne rozwiązania tego zadania (przykład 43.).

Przykład 43.

2 np.1 np.2 np.1 dowolne np.1 dowolne v ~~8~~ np.2 np.1 np.1 np.1 np.1 dowolne

1 v 1 np.2 np.2 np.1 np.1 dowolne dowolne

$$1\cdot\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{3}\cdot 8\cdot 8+7\cdot\binom{6}{2}\binom{4}{3}\cdot 8+1\cdot\binom{6}{2}\binom{4}{2}\cdot 8\cdot 8$$

na pierwszym miejscu 2

spośród 6 miejsc wybiorę jedno na 2

spośród 5 pozostałych miejsc wybieram 3 na 1

na pierwszym miejscu liczba różna od 2 i od 1 i od 0

spośród 6 miejsc wybieram 2 na 2

spośród 4 pozostałych miejsc wybieram 3 na 1

na pierwszym miejscu 1

spośród 6 miejsc wybieram 2 na 2

spośród 4 pozostałych miejsc wybieram 2 na 1

2 np.1 np.2 np.1 ~~2~~ ~~2~~ np.1 v 1 ~~2~~ np.1 np.1 np.2 np.2 ~~2~~

v ~~2~~ np.2 ~~2~~ np.1 np.1 np.2 np.1

$$1\cdot\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{3}\cdot 8\cdot 8+7\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{3}\cdot 8+1\cdot\binom{6}{2}\binom{4}{2}\cdot 8\cdot 8=$$

$$=\frac{6!}{1!\cdot 5!}\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 64+7\cdot\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot 8+\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 64=6\cdot\frac{5\cdot 4}{2}\cdot 64+7\cdot\frac{6\cdot 5}{2}\cdot 4\cdot 8+\frac{6\cdot 5}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{2}\cdot 64=384\cdot 10+224\cdot 15+15\cdot 6\cdot 64=$$

$$3840+3360+5760=12960$$

Zdający dokładnie opisał swoje rozumowanie. Zbudował poprawny model i zauważył trzy przypadki. W każdym z nich poprawnie ustalił liczbę sposobów rozmieszczenia cyfry 1, cyfry 2 oraz cyfry różnej od cyfry 1 oraz cyfry 2 z użyciem symbolu Newtona. Następnie użył symbolu silni, dodał liczbę liczb w każdym z przypadków i otrzymał poprawny wynik 12 960.

Niektórzy zdający, którzy poprawnie rozwiązali to zadanie, tylko zapisywali trzy przypadki, poprawnie ustalili liczbę rozmieszczeń cyfry 1, cyfry 2 oraz cyfr różnych od cyfry 1 oraz cyfry 2 w każdym z przypadków nie zapisując żadnych objaśnień, następnie zastosowali symbol silni i poprawnie obliczyli liczbę wszystkich żądanych liczb 12 960 (przykład 44.).

Przykład 44.

A – 1. 7-cyfrowa ∧ 3 × "1" ∧ 2 × "2"

1) gdy 1. liczba to 1

$C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot 8^2 = \frac{6!}{4!\,2!} \cdot \frac{4!}{2\cdot 2} \cdot 8^2 = \frac{6\cdot 5}{2} \cdot \frac{4\cdot 3}{2} \cdot 64 = 15 \cdot 6 \cdot 64 = 5760$

2) gdy 1. liczba to 2

$C_6^3 \cdot C_3^1 \cdot 8^2 = \frac{6!}{3!\,3!} \cdot 3 \cdot 64 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2} \cdot 3 \cdot 64 = 3840$

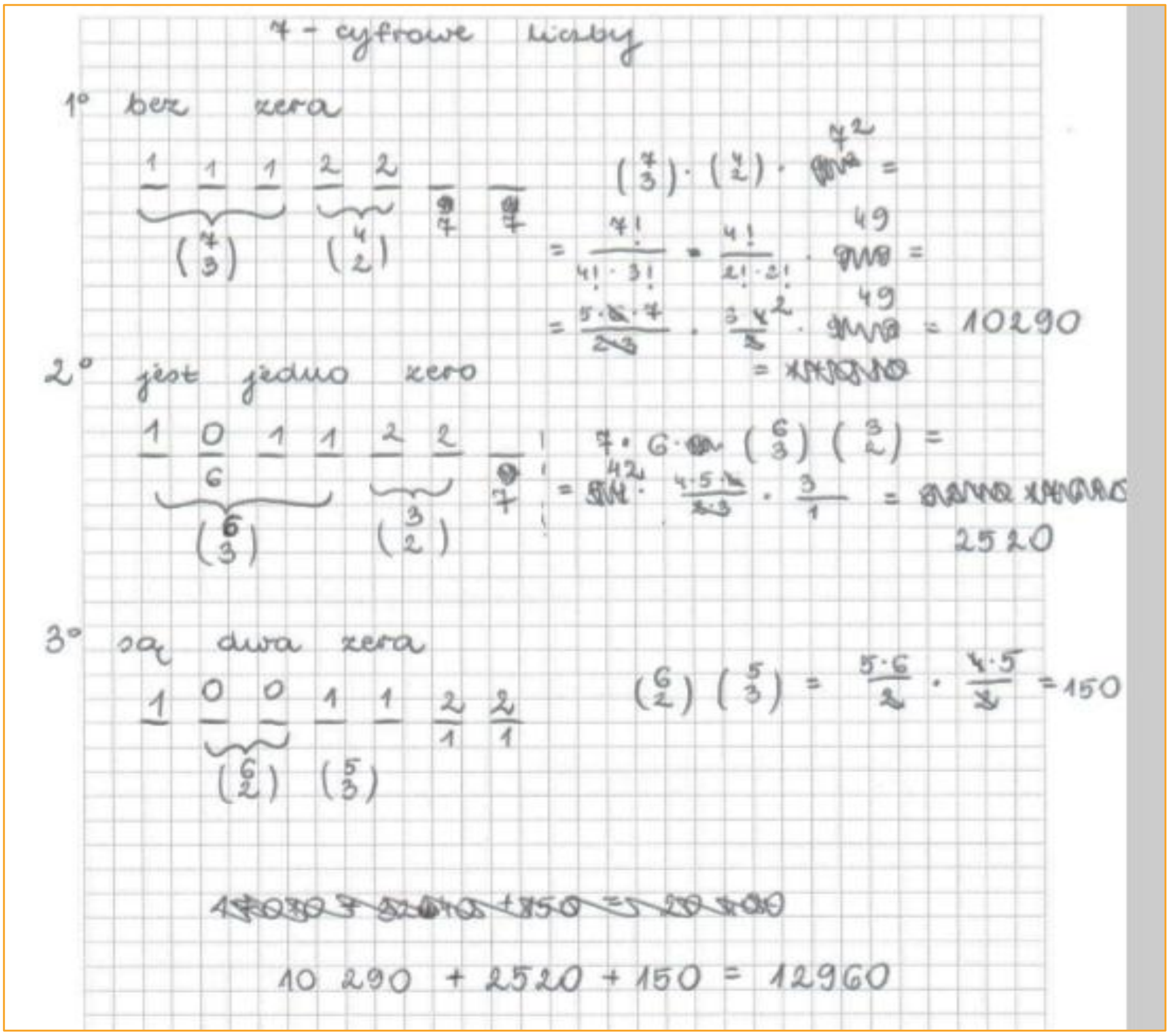
3) gdy 1. liczba to nie 1 i nie 2

$7 \cdot C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot 8 = 56 \cdot \frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{3!}{2\cdot 1} = 56 \cdot 20 \cdot 3 = 3360$

$\overline{A} = 5760 + 3840 + 3360 = 12960$

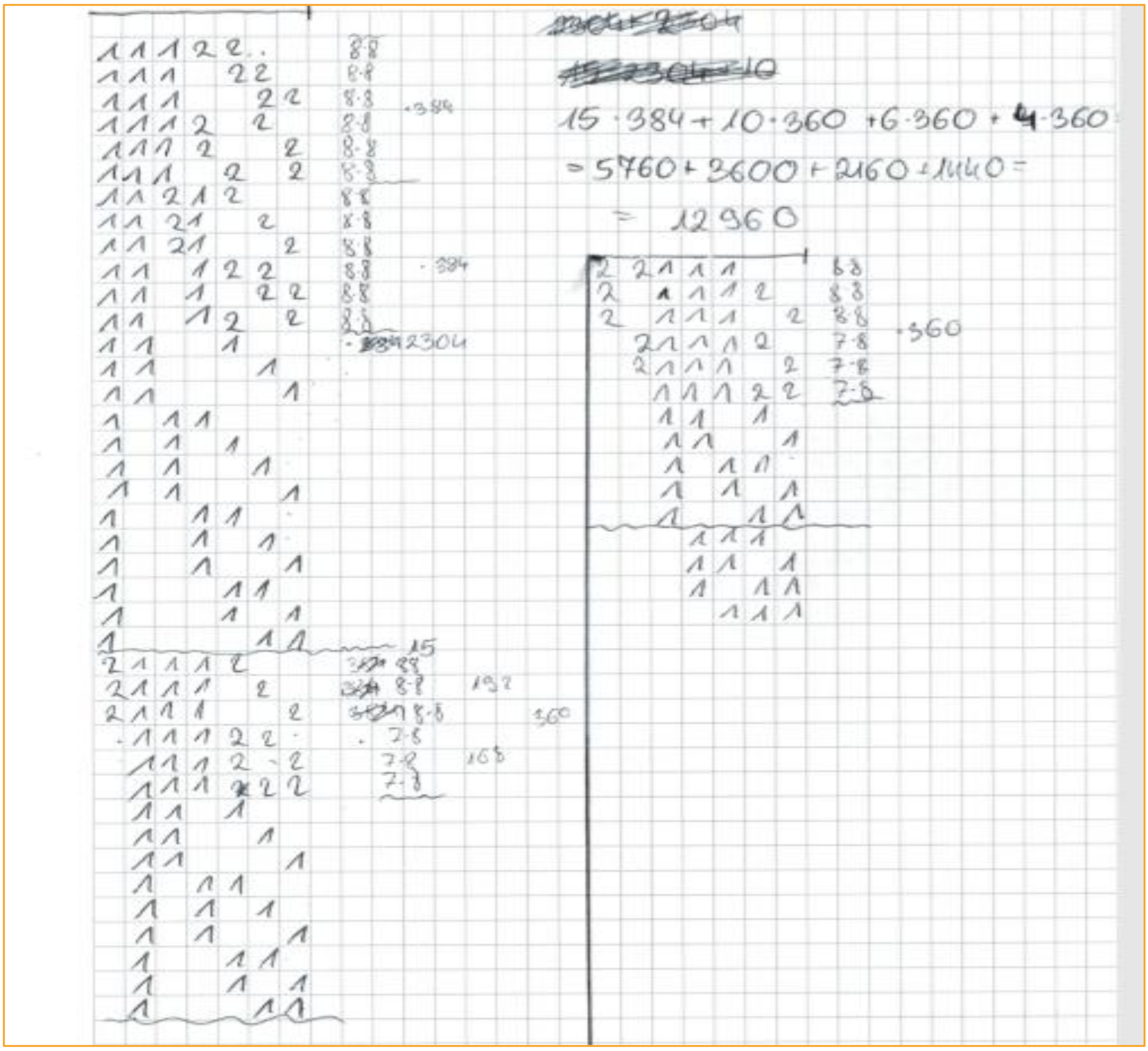
Należy podkreślić, że wśród maturzystów zdarzają się osoby poszukujące własnych sposobów rozwiązań, prowadzący nieschematyczne rozumowanie. Warto docenić takie działania, zwłaszcza w przypadku zadań postrzeganych przez większość zdających jako trudne. Przykładami 45. i 46. ilustrujemy takie nieszablonowe rozwiązania, potwierdzające rozumienie i umiejętność funkcjonalnego zastosowania zagadnień kombinatorycznych.

Przykład 45.



Zdający rozważył trzy przypadki: I. – liczby siedmiocyfrowe, w których zapisie nie występuje cyfra 0, II.- liczby siedmiocyfrowe, w których zapisie jest jedna cyfra 0 oraz III. – liczby siedmiocyfrowe, w których zapisie występują dwie cyfry 0. Poprawnie ustalił liczbę rozmieszczeń cyfry 1 oraz cyfry 2 oraz cyfr różnych od cyfry 1 i cyfry 2, obliczył, ile jest liczb w każdym z tych przypadków, następnie zsumował otrzymane liczby i otrzymał poprawny wynik 12 960.

Przykład 46.



W pierwszym kroku zdający wybrał trzy pozycje dla trzech jedynek (po lewej stronie) i do tych ustalonych „jedynek” zliczył możliwości postawienia na pozostałych czterech pozycjach cyfry 2 (zliczył kombinacje 2-elementowe ze zbioru 4-elementowego pozostałych do obsadzenia miejsc, czyli 6).

Zliczył te ustawienia 6 x 8 x 8 (8 to dowolna cyfra z wyjątkiem 1 i 2, bo te już ustawił). Zatem ma takich ustawień: 384. (Temu odpowiadają linijki 1-6 rozwiązania po lewej stronie od góry).

W drugim kroku pozostawił dwie pierwsze cyfry obsadzone jedynkami i zmienił pozycję dla trzeciej cyfry 1. Zastosował skrót myślowy – dwie pierwsze cyfry są obsadzone jedynkami i ustawił cyfrę 1 na pozycji czwartej. Przy takiej kombinacji ustawienia 1 ustawił cyfry 2 zliczył te ustawienia 6 x 8 x 8 = 384. (Temu odpowiadają linijki 7–12 rozwiązania po lewej stronie od góry).

Następnie kontynuował krok drugi – ma pierwsze dwie pozycje obsadzone cyframi 1, ale kolejną jedynkę ustawił na pozycji piątej.

Nie zapisał ponownie ustawień cyfry 2 do takiej kombinacji, bo to już zauważył w poprzednich rachunkach, że przy takim ustawieniu liczba kombinacji dwójek łącznie z pozostałymi cyframi obsadzonymi na wolnych pozycjach jest dokładnie 384. (Temu odpowiada linijka 13 rozwiązania po lewej stronie).

Kontynuuje – dwie pierwsze cyfry to cyfry 1, a kolejna jedynka to pozycja szósta i siódma, tj. odpowiednio linijka 14 i 15, a w każdej z nich zliczył pozostałe kombinacje ustawienia dwójek i pozostałych cyfr i otrzymał ponownie 384.

W kolejnym kroku pierwszą pozycję obsadził cyfrą 1 i pozostałe (z wyjątkiem drugiej, bo taki przypadek był powyżej) obsadził dwiema jedynkami. W zasadzie szuka kombinacji 2 - elementowych (dla dwóch cyfr jeden) ze zbioru 5-elementowego (bo pierwsza zajęta i druga pozostaje wolna), czyli ma ich dokładnie 10. (Temu odpowiadają linijki 16–25 rozwiązania po lewej stronie).

Przy każdym takim ustawieniu np. 1 dwie pozycje wolne, dwie jedynki, dwie pozycje wolne (linijka 20) dobrał liczbę możliwych ustawień 2 oraz pozostałych cyfr (bez 1 i 2), czyli znowu otrzymał w każdej linijce 384.

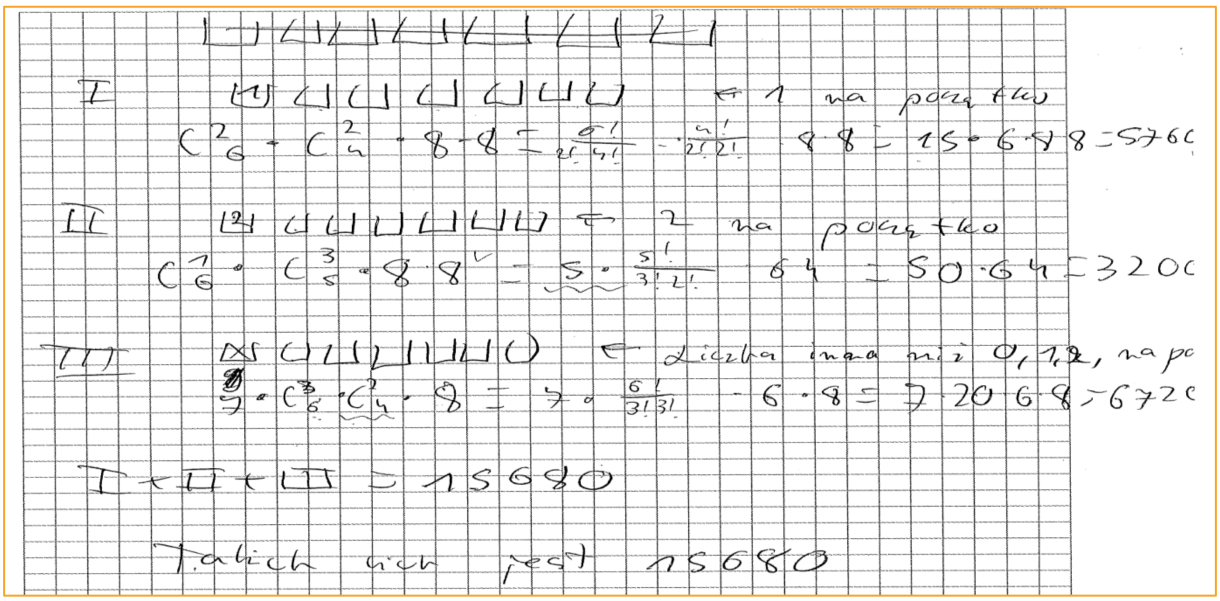
Itd. aż wyczerpie wszystkie przypadki.

Zliczył: linijki 1-6: 384, linijki 7-12:384. Każda linijka, od 13 począwszy a na 25 skończywszy, daje zdającemu wynik 384.

Stąd po drugiej stronie ma 15 [to jest 1–6 (jedna „paczka”), 7–12 (jedna „paczka”) i 13 linijek od 13 do 25 (13 „paczek”), czyli łącznie 15 takich „paczek” x 384 = 5 760]. Kontynuował rozumowanie i otrzymał razem 12 960 takich liczb.

Niemała część zdających, którzy rozwiązywali zadanie I sposobem, poprawnie ustaliła liczbę rozmieszczeń cyfry 1, cyfry 2 oraz cyfry różnej od cyfry 1 oraz cyfry 2, jednak podczas zamiany symbolu Newtona popełniała błędy rachunkowe i otrzymywała niepoprawny wynik (przykład 47.).

Przykład 47.



Część zdających, która rozwiązywała zadanie II sposobem, nie rozważyła w ogóle przypadku, gdy pierwszą cyfrą „liczby” siedmiocyfrowej jest liczba 0, i w konsekwencji tego podawała błędną odpowiedź, że siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2, jest 13440, czyli tyle, ile jest wszystkich „liczb” siedmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie: trzy cyfry 1, dokładnie dwie cyfry 2 i dokładnie dwie cyfry ze zbioru {0,3,4,5,6,7,8,9} (przykład 48.).

Przykład 48.

$\underline{9}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10} = 9\cdot 10^6$ jest to przedział liczb w jakim działamy

$$C_7^3 \cdot C_4^2 \cdot 8^2$$

wybrane 3 miejsc dla wszystkich jedynek

wybrane 2 miejsc dla dwójek

wybrane 2 liczb na pozostałe miejsce w liczbie z odrzuceniem 1 i 2 ponieważ w liczbie mogą znajdować się tylko 3 jedynki i 2 dwójki.

$$\frac{7!}{3!\cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot 64 =$$

$$\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{3!\cdot \cancel{4!}} \cdot \frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{2\cdot \cancel{2!}} \cdot 64$$

$$\frac{7\cdot \cancel{6}\cdot 5}{\cancel{6}} \cdot 2\cdot 3\cdot 64 =$$

$$7\cdot 5\cdot 2\cdot 3\cdot 64 = 13440$$

Takich liczb jest 13440

Część zdających, która rozwiązywała zadanie II sposobem, wskazała dwa poprawne przypadki, ale popełniła błąd przy obliczaniu liczby „liczb” siedmiocyfrowych przy wyznaczaniu liczby rozmieszczeń cyfr różnych od cyfry 1 oraz cyfry 2. Zapis $8^2 \cdot 2!$ świadczy o nierozumieniu istoty wariacji z powtórzeniami (przykład 49.)

Przykład 49.

Potencjalne cyfry:
dowolne cyfry prócz 0

_ _ _ _ _ _ _

Umieśać jedynki: $\binom{7}{3}$

Umieścić dwójki: $\binom{4}{2}$

Reszta cyfr na dwóch pozostałych miejscach, cyfry ze zbioru

$A = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. $\bar{\bar{A}} = 8$

Stąd $8^2 \cdot 2!$

Od tego trzeba jeszcze odjąć wszystkie "liczby", w których

0 występuje jako pierwsze: 0 _ _ _ _ _ _

$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8$ – liczba takich "liczb"

Mamy stąd: $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8^2 \cdot 2 - \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8 =$

$= \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot 64 \cdot 2 - \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{3!}{2!} \cdot 8 =$

$= \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 64 \cdot 2 - \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3} \cdot 3 \cdot 8 =$

$= 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 64 - 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 8 =$

$= 26880 - 480 = 26400$

Inni zdający poprawnie wyznaczali liczbę rozmieszczeń cyfry 1 oraz cyfry 2, ale popełnili błąd polegający na tym, że nie uwzględnili faktu, iż w zapisie liczby siedmiocyfrowej mają być dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2. W wyznaczaniu liczby rozmieszczeń pozostałych cyfr błędnie zapisali, że wybierają te cyfry spośród dziesięciu cyfr (przykład 50. i przykład 51.)

Przykład 50.

A_1 = ~~ilość zdarzeń~~ – liczba elementów zbioru spełniającego warunek 1°

1° ~~jedynka lub dwójka na pierwszym miejscu 0 nie~~ jest

0 może być na pierwszym miejscu ~~pierwszym miejscu~~

$$|A_1| = \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 10^2 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 100 = \frac{7 \cdot \cancel{6}^{1} \cdot 5}{\cancel{6}_1} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 100$$

$$= 21000$$

2° ~~tylko~~ 0 na pierwszym miejscu ~~dwie~~

$$|A_2| = \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 10 = \frac{\cancel{6}_1 \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{6}_1} \cdot 3 \cdot 10 = 600$$

$$|A_1| - |A| = 21000 - 600 = \underline{20400} - A_3$$

A_1 – liczba elementów zbioru spełniającego warunek: liczba siedmiocyfrowa (mogąca być z 0 na początku) z dokładnie dwoma 2 i trzema 1

A_2 – liczba elementów zbioru spełniającego warunek: liczba siedmiocyfrowa z 0 na początku i dokładnie dwoma 2 i trzema 3

A_3 – ilość ~~elementów~~ elementów zbioru spełniających warunek: jest liczbą siedmiocyfrową naturalną, w której zapisie występują dokładnie dwie 2 i trzy 1

Przykład 51.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

10.0

1 1 1 2 2

$\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot$

Scenariusz 1 2

Scenariusz 1: 1 _ _ _ _ _ _

+ $\binom{4}{2}$

Scenariusz 2: 2 _ _ _ _ _ _

+

Scenariusz 3: X _ _ _ _ _ _

$\left(\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot 10 \cdot 10\right) + \left(\binom{5}{3} \cdot \binom{6}{1} \cdot 10 \cdot 10\right) + \left(\binom{6}{2} \cdot \binom{9}{3} \cdot 9 \cdot 10\right)$

$\frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot \frac{6!}{2!(4)!} \cdot 10 \cdot 10 + \frac{5!}{3!(2)!} \cdot \frac{6!}{1!\,5!} \cdot 10 \cdot 10 + \frac{6!}{2!(4)!} \cdot \frac{9!}{3!\,6!} \cdot 9 \cdot 10$

$\frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 10 \cdot 10 + \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6}{1} \cdot 10 \cdot 10 + \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4}{1} \cdot 9 \cdot 10$

$6 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 10 + 10 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10 + 15 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 10$

$9000 + 6000 + 5400 = \underline{20400}$

Część zdających błędnie stosowała wzór na liczbę wariacji z powtórzeniami i wyznaczyła liczbę ciągów dwuelementowych ze zbioru ośmioelementowego, zapisując błędnie 2^8, zamiast 8^2 (przykład 52.).

Przykład 52.

~~Jedynki można ~~rozmieść~~ umieścić na 7 miejsc na $\binom{7}{3}$ sposobów. Pozostaje 4 wolne miejsce~~

I 1 na początku

II 2 na początku

III cyfra inna niż 1 czy 2 na początku

I 1 _ _ _ _ _ _

Dwie jedynki można umieścić na $\binom{6}{2}$ sposobów. ~~Pozo~~ Pozostaje 4 miejsca do zapełnienia. Dwie dwójki na $\binom{4}{2}$ sposobów. Pozostają 2 miejsca, ~~Poza~~ które można zapełnić cyfrom spośród $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$ na 2^8 sposobów.

słownie reguła mnożenia

$$\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 2^8 = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4}}{2\cdot \cancel{4}}\cdot\frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2}}{2\cdot \cancel{2}}\cdot 2^8 =$$

$$= 15\cdot 6\cdot 2^8 = 90\cdot 2^8 = \underline{\underline{256\cdot 90}}$$ możliwości

II 2 _ _ _ _ _ _

Jedną dwójkę można umieścić na 6 sposobów. Pozostaje 5 wolnych miejsc. Jedynki można umieścić na $\binom{5}{3}$ sposobów. Pozostają 2 wolne miejsca, można zapełnić je na 2^8 sposobów cyfrom spośród $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$

Stosując regułę mnożenia

$6 \cdot \binom{5}{3} \cdot 2^8 = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3! \cdot 2!} \cdot 2^8 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2^8}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$

$= 60 \cdot 2^8 = 15360$ możliwości.

III Pierwszą cyfrę można wybrać spośród cyfr $\{3,4,5,6,7,8,9\}$, 7 możliwości. ~~Ho~~ Jedynki ustawiamy na $\binom{6}{3}$ sposobów, pozostają 3 wolne miejsca. Dwójki ustawiamy na $\binom{3}{2}$ sposobów. Zostaje jedno wolne miejsce, które można zapełnić cyfrą spośród $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$, ~~na~~ 8 możliwości.

Stosując regułę mnożenia

$7 \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8 = 7 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2! \cdot 1} \cdot 8 =$

$= 56 \cdot 20 \cdot 3 = 3360$ możliwości

Wszystkich ~~cyfr~~ liczb spełniających wymagania jest

$3360 + 15360 + 256 \cdot 90 = 18720 + 23040 =$

$= 41760$

Odpowiedź: Takich liczb jest 41760.

Niektórzy zdający rozważali większą liczbę przypadków, jednak nie uwzględniali faktu, że liczba siedmiocyfrowa miała mieć w zapisie dokładnie trzy cyfry 1 oraz dokładnie dwie cyfry 2 i błędnie wyznaczyli liczbę tych rozmieszczeń, jak również pozostałych cyfr, niepoprawnie stosując model wariacji bez powtórzeń (przykład 53.).

Przykład 53.

Podzielmy zadanie na 9 przypadków.

1°

Pierwsza cyfra jest równa 1.

na pozostałych 6 miejscach muszą się znaleźć dwie cyfry 1, dwie cyfry 2 i 2 dowolne cyfry różne od 1 i 2.

Takich liczb jest: $1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 8 \cdot 8$

2° Pierwsza cyfra jest równa 2.

~~Liczb jest: 1.~~

na pozostałych 6 miejscach muszą się znaleźć trzy cyfry 1, 1 cyfra 2 i 2 dowolne cyfry różne od 1 i 2.

Takich liczb jest: $1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 8 \cdot 8$

3° Pierwsza cyfra jest równa 3.

na pozostałych 6 miejscach muszą się znaleźć trzy cyfry 1, dwie cyfry 2 i 1 dowolna cyfra różna od 1 i 2.

Takich liczb jest: $1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8$

4° pierwsza cyfra jest równa 4.

analogicznie jak trzeci przypadek

Liczb jest $1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8$.

Przypadki 5, 6, 7, 8, 9 będą analogiczne do przypadku trzeciego.

Dla każdego z nich będzie $1\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot8$ liczb.

Ostatecznie liczb jest $6\cdot1\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot8+2\cdot1\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot8\cdot8=$

$=34560+46080=\underline{\underline{80640}}$

Po analizie rozwiązań zadania 13. można sformułować wniosek, że zdający egzamin na poziomie rozszerzonym mają trudności z zastosowaniem wzorów do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych.

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najlepiej

Poziom podstawowy

Tegoroczni maturzyści najlepiej opanowali umiejętności:

1. stosowania wzoru na *n*-ty wyraz i na sumę *n*-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
2. zliczania obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosowania reguły mnożenia i reguły dodawania
3. wyznaczania wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym
4. stosowania zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Najłatwiejszym zadaniem w arkuszu na poziomie podstawowym (poziom wykonania – 87%) okazało się zadanie 15., w którym należało obliczyć sumę czterech początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, gdy dany jest wyraz czwarty i różnica tego ciągu. Zdecydowana większość zdających poprawnie stosowała wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, jak również wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego.

Porównywalny do zadania 15. wynik maturzyści osiągnęli w zadaniu 21. (poziom wykonania – 83%), w którym należało obliczyć liczbę wszystkich liczb dwucyfrowych utworzonych z pięciu cyfr 1,3,5,7,9, w których cyfry się nie powtarzają. Zdający w większości nie mieli problemu z ustaleniem poprawnego modelu i obliczeniem tej liczby.

Niewiele niższy poziom wykonania (79%) odnotowano w zadaniu 14., w którym maturzyści, mając dany wzór ogólny ciągu, mieli obliczyć różnicę wyrazu piątego i czwartego. Większość zdających poprawnie wyznaczyła dwa kolejne wyrazy ciągu i obliczyła ich różnicę. Tylko nieliczni, obliczając różnicę, wyłączyli liczbę 2 poza nawias i zastosowali wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

Z kolei zadanie 17. badało umiejętność stosowania zależności między kątem środkowym a kątem wpisanym. Zdający nie mieli problemu ze stosowaniem własności kątów przyległych oraz zastosowaniem twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym opartych na tym samym łuku. Większość zdających (79%) obliczyła poprawnie miarę kąta wpisanego *ABC*.

Nietrudno zauważyć, że tegoroczni abiturienci na poziomie podstawowym, analogicznie do lat ubiegłych, najlepiej opanowali umiejętności stosowania pojęć oraz korzystania z ich elementarnych własności w sytuacjach typowych. Zauważmy, że wymienione wyżej zadania, które zostały bezbłędnie rozwiązane przez 79% i więcej zdających, są zadaniami jedno- lub dwuczynnościowymi. Zadania te nie mają szerszego kontekstu, ich rozwiązanie nie wymaga wykonania dodatkowych czynności, a – co może najważniejsze – umiejętności sprawdzane tymi zadaniami zostały precyzyjnie opisane i dotyczyły typowych sytuacji. Do rozwiązania zadań wystarczyło znać podstawowe pojęcia matematyczne i najważniejsze własności rozważanych obiektów, zrozumieć nieskomplikowany tekst matematyczny, zastosować właściwy algorytm i wykonać elementarne rachunki.

Poziom rozszerzony

Analiza wskaźników poziomu wykonania zadań występujących w zestawie egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym pozwala sformułować wniosek, iż wśród zadań występujących w zestawie egzaminacyjnym żadne z zadań nie było bardzo łatwe, tylko dwa zadania były łatwe, a większość zadań była trudna dla tegorocznych maturzystów.

Spośród tegorocznych zadań najłatwiejsze były te, przy rozwiązywaniu których należało zastosować konkretne twierdzenia w typowych kontekstach.

Najłatwiejsze dla zdających były zadania zamknięte. Zadanie 2. (poziom wykonania zadania – 82%), które sprawdzało umiejętność obliczania granic ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów, nie przysporzyło trudności większości zdającym egzamin na poziomie rozszerzonym.

Z kolei zadanie 3., przy rozwiązywaniu którego należało wykazać się umiejętnością obliczania prawdopodobieństwa całkowitego, poprawnie rozwiązało 78% zdających.

Niższy wynik osiągnęli maturzyści w zadaniu 1. (poziom wykonania – 63%), w którym należało zastosować twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$.

Poziom opanowania sprawdzanych umiejętności przez powyższe zadania pozwala stwierdzić, że liczna grupa zdających opanowała następujące umiejętności podstawy programowej:

- obliczania granic ciągów
- budowania prostego modelu probabilistycznego przy obliczaniu prawdopodobieństwa całkowitego
- stosowania twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$.

Wnioski i rekomendacje

1. Egzamin maturalny z matematyki na **poziomie podstawowym** potwierdził, że maturzystom nie sprawiają trudności zadania sprawdzające pojedyncze, mało skomplikowane umiejętności, wymagające wykonania jednej lub dwóch prostych i standardowych czynności.
2. Najlepsze wyniki zdający uzyskali w zadaniach zamkniętych, które sprawdzały umiejętności: stosowania wzoru na *n*-ty wyraz i na sumę *n*-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego oraz zliczania obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosowania reguły mnożenia i reguły dodawania.
3. Względnie wysoki był również odsetek zdających, którzy wykazali się umiejętnością wyznaczania wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym oraz stosowania zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym w okrąg. Tym samym potwierdza się teza, że zdający osiągają bardzo dobre wyniki w zadaniach krótkich, wymagających np. zastosowania tylko wzorów.
4. Na **poziomie rozszerzonym** dla zdających nie było zadań bardzo łatwych. Najlepsze wyniki zdający uzyskali w zadaniach zamkniętych sprawdzających umiejętność obliczania granic ciągów oraz wykorzystania twierdzeń o działaniach na granicach ciągów, ponadto budowania prostego modelu probabilistycznego przy obliczaniu prawdopodobieństwa całkowitego, czy też stosowania twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x-a$.
5. Wszystkie zadania otwarte na poziomie rozszerzonym okazały się trudne dla tegorocznych maturzystów, a zadanie wymagające przeprowadzenia dowodu geometrycznego było bardzo trudne dla zdających. Najwyższe wyniki zdający uzyskali za rozwiązanie zadania, w którym należało wykazać się umiejętnością zastosowania wzorów Viète’a oraz rozwiązywania równań trygonometrycznych.
6. Maturzyści lepiej radzą sobie z rozwiązaniem zadań, w których należy wykorzystać znany algorytm, niż z zadaniami wymagającymi zaplanowania strategii rozwiązania, modelowania matematycznego czy uzasadnienia postawionej tezy.
7. Zarówno na poziomie podstawowym, jak i na poziomie rozszerzonym, egzamin ujawnił niski poziom opanowania przez zdających umiejętności z zakresu geometrii, zarówno w przypadku geometrii płaszczyzny (planimetrii) – w szczególności geometrii na płaszczyźnie kartezjańskiej, jak i geometrii przestrzennej (stereometrii). Dotyczy to głównie zadań rozszerzonej odpowiedzi, w których należało użyć lub stworzyć strategię rozwiązania, łącząc w spójną, logicznie uporządkowaną całość kilka pojedynczych umiejętności. Przyczyn niepowodzeń zdających w takich zadaniach należy upatrywać w niskim poziomie umiejętności czytania treści zadania ze zrozumieniem i poprawnej jej interpretacji, których to opanowanie umożliwia stworzenie całościowej koncepcji rozwiązania. Na poziomie rozszerzonym maturzyści nie opanowali w stopniu zadowalającym również zagadnień kombinatorycznych.
8. Wyniki egzaminu maturalnego wyraźnie wskazują, że najwięcej trudności na egzaminie z matematyki sprawiają maturzystom zadania wymagające uzasadnienia prawdziwości tezy. Zadania wymagające przeprowadzenia rozumowania i przytoczenia poprawnej argumentacji są znacznie częściej od innych pomijane, a wśród tych zdających, którzy podejmują próbę ich rozwiązania jest wielu wnioskujących o prawdziwości tezy na podstawie sprawdzenia poprawności dla kilku wybranych wartości, albo

nieuprawnionym przyjmowaniu szczególnych założeń o rozważanych obiektach matematycznych. Często też zdający pomijają istotną część rozumowania lub nie podają jakiegokolwiek komentarza w kluczowych miejscach przedstawianego uzasadnienia. Częste są również rozwiązania, w których zdający poprawnie rozpoczynają rozwiązywanie zadania, zauważając istotne zależności w obiektach matematycznych, jednak nie doprowadzają rozwiązania do końca, ponieważ nie potrafią powiązać ze sobą otrzymanych zależności.

9. Na względnie niski wynik egzaminu maturalnego z matematyki najczęściej znacząco wpływa brak sprawności rachunkowej oraz problemy z poprawnym wykonywaniem obliczeń rachunkowych. W rozwiązaniach zadań otwartych błędy rachunkowe są popełniane przez zdających na każdym etapie rozwiązania, a te z nich, które dotyczą początkowej fazy rozwiązania zadania, nierzadko w sposób istotny utrudniają lub wręcz uniemożliwiają dokończenie rozwiązania albo doprowadzają do otrzymania wyników niespełniających warunków zadania. W wyniku popełnianych błędów (nierzadko także błędów popełnianych już na etapie przepisywania z treści zadania) zdający często nie doprowadzają rozwiązania do momentu, który umożliwiłby rozstrzygnięcie, czy zdający opanował sprawdzane umiejętności potrzebne do prawidłowego rozwiązania zadania. Maturzyści często nie potrafią właściwie zinterpretować uzyskanych wyników, a tym samym ujawniają brak zrozumienia pojęć i nieznajomość własności obiektów matematycznych.
10. Tegoroczny egzamin ujawnił relatywnie niski poziom opanowania przez zdających umiejętności rozumienia tekstu matematycznego. Potwierdzeniem tej tezy są podejmowane nieudane próby rozwiązania zadań, w których już w początkowej fazie tworzenia strategii rozwiązania zdający przystępują do rozważania sytuacji odmiennych od tych wynikających z treści zadań.
11. W trakcie procesu kształcenia nauczyciele powinni nadać duże znaczenie początkowej fazie rozwiązania zadania, tj. precyzyjnemu ustaleniu istoty rozwiązywanego problemu i zrozumieniu opisanej sytuacji. Można ćwiczyć z uczniami zmianę sformułowania treści matematycznej na opis tego samego zagadnienia w innym ujęciu albo rozwiązywanie zadań, w których pozornie drobna zmiana w treści wymaga zastosowania rozumowania istotnie odmiennego.
12. Podczas lekcji należy pokazywać i wyjaśniać alternatywne ujęcia zagadnień, które umożliwiają poprawne i szybkie rozwiązanie problemu oraz ćwiczyć z uczniami rozwiązywanie zadań różnymi sposobami, pokazując tym samym rozmaitość strategii rozwiązywania problemów matematycznych.
13. Umiejętność uogólniania i określania zmienności własności obiektów matematycznych w zależności od przyjmowania różnych wartości liczbowych jest niezbędna do prowadzenia prawidłowego wnioskowania. Wspomniane umiejętności decydują wręcz o możliwości rozwiązania niektórych zadań. W trakcie procesu kształcenia nauczyciele powinni stwarzać uczniom więcej okazji do ćwiczenia umiejętności analizowania zmian własności obiektów matematycznych, które są konsekwencją przyjmowania w badanych sytuacjach różnych możliwych wartości liczbowych.
14. W trakcie nauki należy koniecznie zwracać uwagę na staranne i sprawne wykonywanie przekształceń i obliczeń rachunkowych. Nieodzowne jest weryfikowanie poprawności otrzymanego wyniku, a w przypadku wyników niezgodnych z treścią zadania – wskazywanie oraz wyjaśnianie tych sprzeczności, tak aby kształtować umiejętność określania obiektów matematycznych wyznaczonych przez konkretne wartości liczbowe.

15. W nauczaniu geometrii należy zwrócić szczególną uwagę na poprawną interpretację treści zadań i rozważanie właściwych figur geometrycznych oraz ich elementów. W zadaniach z geometrii na płaszczyźnie kartezjańskiej warto doskonalić umiejętność analizy treści zadania oraz, na poziomie podstawowym – doboru adekwatnej strategii rozwiązania, a na poziomie rozszerzonym – samodzielnego tworzenia przez uczniów strategii i identyfikowania istotnych dla rozwiązania etapów.
16. Zagadnieniom optymalizacyjnym warto nadać w toku edukacji matematycznej większe znaczenie. Zwiększenie liczby przeanalizowanych różnorodnych przykładów może pozwolić na pogłębioną analizę i tym samym na zrozumienie istoty problemu, zwłaszcza w realizacji najbardziej kluczowych etapów rozwiązania, tj. wyznaczania dziedziny funkcji i uzasadniania istnienia wartości największej lub najmniejszej rozważanej funkcji.