Województwo wielkopolskie

Matematyka

Sprawozdanie z egzaminu maturalnego w roku 2017

Opracowanie
Józef Daniel (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Marian Pacholak (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie)
Joanna Berner (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie)
Henryk Dabrowski (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi)

Redakcja
dr Wioletta Kozak (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Opracowanie techniczne
Joanna Dobkowska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Współpraca
Beata Dobrosielska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Agata Wiśniewska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Pracownie ds. Wyników Egzaminacyjnych okręgowych komisji egzaminacyjnych

Opracowanie dla województwa wielkopolskiego

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
Izabela Szafrańska
Jacek Pietrzak

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. 022 536 65 00, fax 022 536 65 04
e-mail: sekretariat@cke.edu.pl
www.cke.edu.pl

Matematyka

Poziom podstawowy

1. Opis arkusza

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie podstawowym składał się z 25 zadań zamkniętych wyboru wielokrotnego oraz 9 zadań otwartych, w tym 6 zadań krótkiej odpowiedzi i 3 zadań rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności opisane w pięciu obszarach wymagań ogólnych podstawy programowej matematyki: **wykorzystanie i tworzenie informacji** (pięć zadań zamkniętych), **wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji** (czternaście zadań zamkniętych i jedno zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi), **modelowanie matematyczne** (pięć zadań zamkniętych, trzy zadania otwarte krótkiej odpowiedzi), **użycie i tworzenie strategii** (jedno zadanie zamknięte, trzy zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi) oraz **rozumowanie i argumentacja** (dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi). Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 50 punktów.

2. Dane dotyczące populacji zdających

Tabela 1. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym*

Liczba zdających		**23 432**
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	14 798
	z techników	8 634
	ze szkół na wsi	1 229
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	5 044
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	9926
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	7 233
	ze szkół publicznych	22 141
	ze szkół niepublicznych	1 291
	kobiety	13 161
	mężczyźni	10 271
	bez dysleksji rozwojowej	22 228
	z dysleksją rozwojową	1 204

* Dane w tabeli dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 1 maturzystę − laureata/finalistę Olimpiady Matematycznej.

Tabela 2. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach w wersji dostosowanej	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	10
	słabowidzący	24
	niewidomi	3
	słabosłyszący	27
	niesłyszący	13
	Ogółem	**77**

3. Przebieg egzaminu

Tabela 3. Informacje dotyczące przebiegu egzaminu

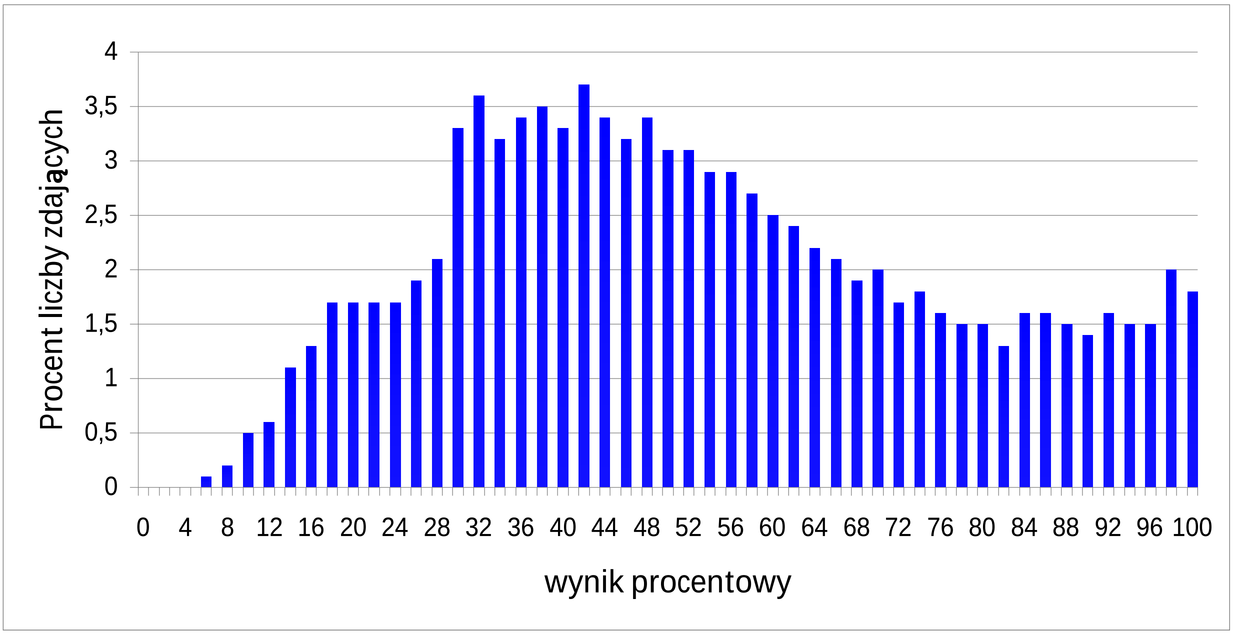
<table>
<tr><td colspan="3">Termin egzaminu</td><td>5 maja 2017 r.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Czas trwania egzaminu</td><td>170 minut</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba szkół</td><td>472</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba zespołów egzaminatorów</td><td>18</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba egzaminatorów</td><td>463</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba obserwatorów[1] (§ 8 ust. 1)</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Liczba unieważnień[2]</td><td colspan="3">w przypadku:</td></tr>
<tr><td>art. 44zzv pkt 1</td><td>stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>art. 44zzv pkt 2</td><td>wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>art. 44zzv pkt 3</td><td>zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu</td><td>0</td></tr>
<tr><td>art. 44zzw ust. 1.</td><td>stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>art. 44zzy ust. 7</td><td>stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>art. 44zzy ust. 10</td><td>niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba wglądów[2] (art. 44zzz)</td><td>257</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba prac, w których nie podjęto rozwiązania zadań</td><td>0</td></tr>
</table>

[1] Na podstawie rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 21 grudnia 2016 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu przeprowadzania egzaminu gimnazjalnego i egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2016 r., poz. 2223).

[2] Na podstawie ustawy z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (tekst jedn. Dz.U. z 2016, poz. 1943, ze zm.).

4. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających



Wykres 1. Rozkład wyników zdających

Tabela 4. Wyniki zdających – parametry statystyczne*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)	Odsetek sukcesów**
ogółem	**23 509**	**0**	**100**	**50**	**42**	**53,09**	**23,14**	**86**
w tym:								
z liceów ogólnokształcących	14 855	0	100	56	42	57,70	23,98	89
z techników	8 654	4	100	42	32	45,18	19,19	82
bez dysleksji rozwojowej	22 299	0	100	50	32	53,00	23,17	86
z dysleksją rozwojową	1 210	8	100	52	42	54,74	22,49	88

* Parametry statystyczne podane zostały dla grup liczących 30 lub więcej zdających.
** Dane dotyczą tegorocznych absolwentów, którzy przystąpili do wszystkich egzaminów obowiązkowych.

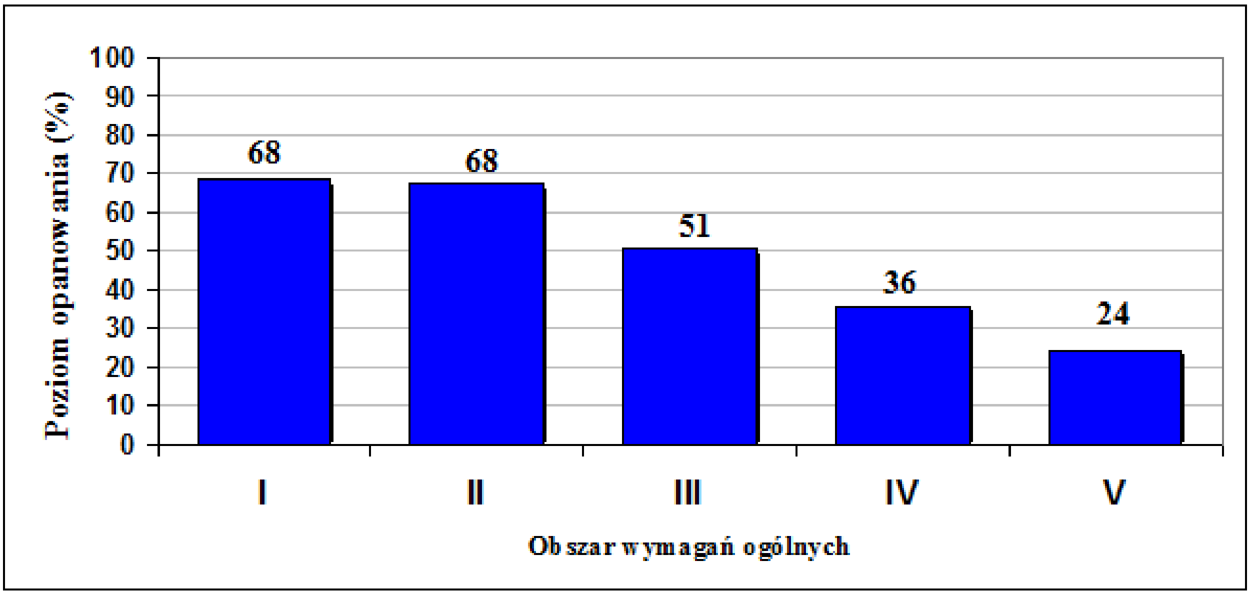
Poziom wykonania zadań

Tabela 5. Poziom wykonania zadań

Numer zadania w arkuszu	Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poziom wykonania zadania (%)
1.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (1.4).	73
2.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach (1.3).	41
3.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.6).	69
4.	III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (1.9).	59
5.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą (3.4).	45
6.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności (3.1).	61
7.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą (3.3).	80
8.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x + 1)(x - 7) = 0$ (3.7).	63
9.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość (4.2).	62
10.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	4. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje) (4.10).	57
11.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw (4.14).	79
12.	III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).	93
13.	III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4).	73
14.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ (6.4).	72

15.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym (7.1).	86
16.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów (7.3).	80
17.	III. Modelowanie matematyczne.	7. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi (7.4).	62
18.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180° (6.1).	59
19.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.2).	65
20.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość dwóch punktów (8.6).	69
21.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G11. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego (G11.2). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą (3.4).	63
22.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (9.3).	75
23.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G11. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość stożka (G11.2).	88
24.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Zdający wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych (G9.4).	95
25.	III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).	62
26.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą (3.5).	63
27.	V. Rozumowanie i argumentacja.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje podstawowe własności potęg (1.5).	31
28.	V. Rozumowanie i argumentacja.	G10. Figury płaskie. Zdający korzysta z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności (G10.3). SP9. Wielokąty, koła, okręgi. Zdający stosuje twierdzenie o sumie katów trójkąta (SP9.3).	17
29.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie (4.9).	44
30.	III. Modelowanie	G10. Figury płaskie. Zdający stosuje twierdzenie	58

	matematyczne.	Pitagorasa (G10.7). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą (3.4).	
31.	III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).	64
32.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej) (8.1). Zdający oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych (8.4).	35
33.	III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).	24
34.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi. (9.1) Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami (9.2) Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami (9.4) Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6).	20



Wykres 2. Poziom wykonania zadań w obszarze wymagań ogólnych

Poziom rozszerzony

1. Opis arkusza

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie rozszerzonym zawierał 4 zadania zamknięte wyboru wielokrotnego, 11 zadań otwartych, w tym 7 zadań krótkiej i 4 zadania rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności opisane w pięciu obszarach wymagań ogólnych podstawy programowej matematyki: **wykorzystanie i tworzenie informacji** (jedno zadanie zamknięte), **wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji** (dwa zadania zamknięte i dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi), **modelowanie matematyczne** (trzy zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi), **użycie i tworzenie strategii** (jedno zadanie zamknięte, trzy zadania otwarte krótkiej odpowiedzi i jedno zadanie otwarte rozszerzonej odpowiedzi) oraz **rozumowanie i argumentacja** (dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi). Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 50 punktów.

2. Dane dotyczące populacji zdających

Tabela 6. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym*

Liczba zdających		**5 781**
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	3 671
	z techników	2 110
	ze szkół na wsi	162
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	1 087
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	2 515
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	2 017
	ze szkół publicznych	5 620
	ze szkół niepublicznych	161
	kobiety	2 146
	mężczyźni	3 635

* Dane w tabeli dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 1 maturzystę − laureata/finalistę Olimpiady Matematycznej.

Tabela 7. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach w wersji dostosowanej	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	1
	słabowidzący	3
	niewidomi	0
	słabosłyszący	7
	niesłyszący	4
	Ogółem	**15**

3. Przebieg egzaminu

Tabela 8. Informacje dotyczące przebiegu egzaminu

<table>
<tr><td colspan="3">Termin egzaminu</td><td>9 maja 2017 r.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Czas trwania egzaminu</td><td>180 minut</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba szkół</td><td>314</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba zespołów egzaminatorów</td><td>11</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba egzaminatorów</td><td>283</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba obserwatorów[2] (§ 8 ust. 1)</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Liczba unieważnień[2]</td><td colspan="3">w przypadku:</td></tr>
<tr><td>art. 44zzv pkt 1</td><td>stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>art. 44zzv pkt 2</td><td>wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>art. 44zzv pkt 3</td><td>zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu</td><td>0</td></tr>
<tr><td>art. 44zzw ust. 1.</td><td>stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>art. 44zzy ust. 7</td><td>stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>art. 44zzy ust. 10</td><td>niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba wglądów[2] (art. 44zzz)</td><td>33</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba prac, w których nie podjęto rozwiązania zadań</td><td>0</td></tr>
</table>

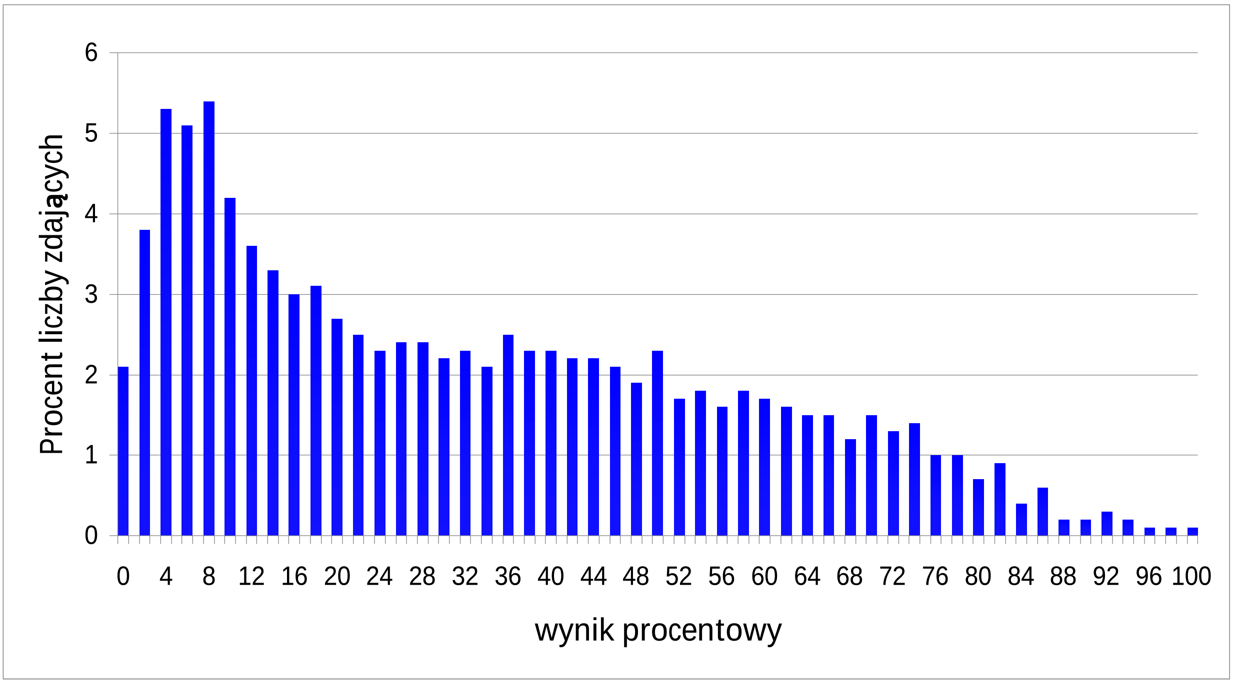
---

[1] Na podstawie rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 21 grudnia 2016 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu przeprowadzania egzaminu gimnazjalnego i egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2016 r., poz. 2223).

[2] Na podstawie ustawy z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (tekst jedn. Dz.U. z 2016, poz. 1943, ze zm.).

4. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających



Wykres 3. Rozkład wyników zdających

Tabela 9. Wyniki zdających – parametry statystyczne*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
ogółem	5 796	0	100	28	8	32,45	24,30
w tym:							
z liceów ogólnokształcących	3 684	0	100	42	50	42,20	23,27
z techników	2 112	0	92	10	4	15,43	14,84

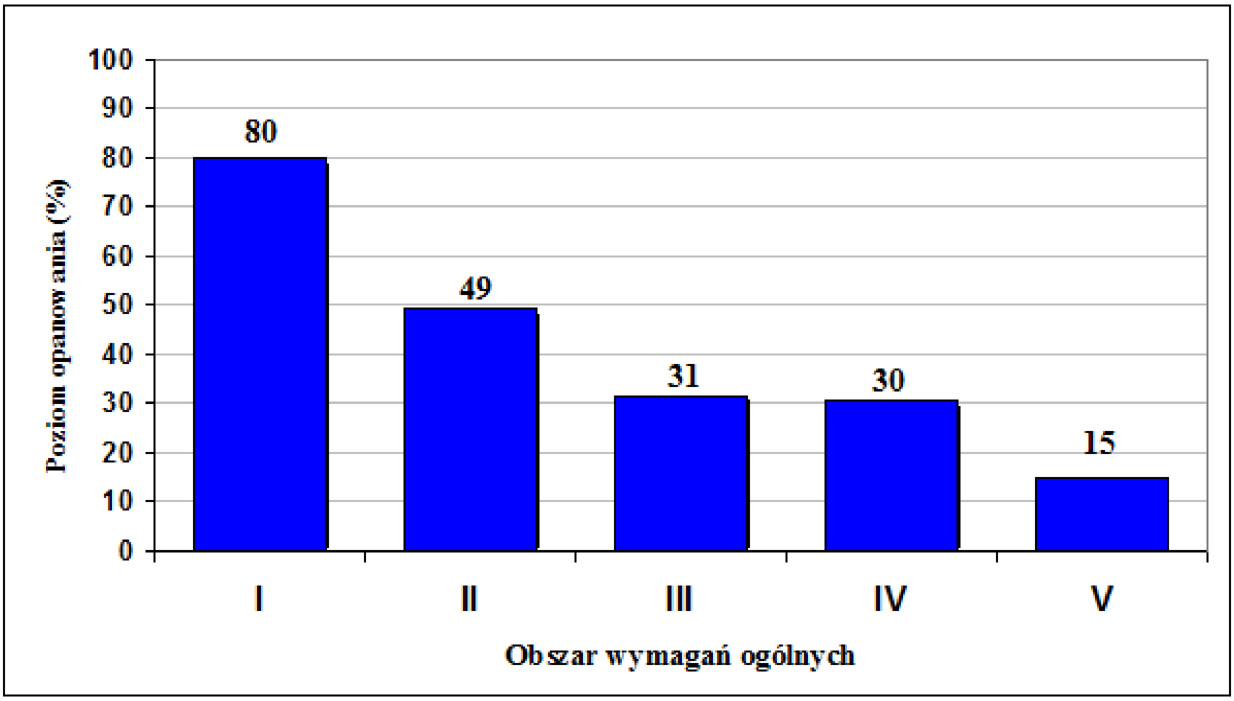
* Dane dotyczą tegorocznych absolwentów, którzy przystąpili do wszystkich egzaminów obowiązkowych.

Poziom wykonania zadań

Tabela 10. Poziom wykonania zadań

Numer zadania w arkuszu	Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poziom wykonania zadania (%)
1.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1). 1. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach (1.3).	59
2.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	5. Ciągi. Zdający oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $1/n$, $1/n^2$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów (R5.2).	80
3.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym (7.1).	79
4.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach (R8.7).	57
5.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$ (R3.4).	57
6.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza pochodne funkcji wymiernych oraz korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej (R11.2, R11.3).	38
7.	V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1). Zdający dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne (R2.6).	21
8.	V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi. (7.4). Zdający rozpoznaje figury podobne i jednokładne wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności. (R7.4). Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów. (R7.5).	8
9.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną. (R9.2). 7. Planimetria. Zdający rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności (R7.4). G10. Figury płaskie. Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa (G10.7).	11
10.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne oraz posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (R6.6, R6.4).	42

11.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych (R10.1).	22
12.	III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a (R3.1).	22
13.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności, wyznacza współrzędne środka odcinka, wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt, oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych oraz oblicza odległość dwóch punktów (R8.5, 8.5, 8.3, 8.4, 8.6).	34
14.	III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego oraz stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.3, 5.4) 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych (R3.3).	55
15.	III. Modelowanie matematyczne.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6).	18



Wykres 4. Poziom wykonania zadań w obszarze wymagań ogólnych

Komentarz

1. Analiza jakościowa zadań

UMIEJĘTNOŚCI OPANOWANE NAJLEPIEJ

Poziom podstawowy

Wyniki matury z matematyki na poziomie podstawowym pozwalają zauważyć, że do najlepiej opanowanych umiejętności należą te, które wymagają zastosowania nieskomplikowanych własności figur geometrycznych, elementarnych własności ciągów czy statystyki opisowej w sytuacjach typowych.

Najłatwiejszym zadaniem w arkuszu (poziom wykonania zadania – 95%) okazało się zadanie 24., badające poziom opanowania umiejętności stosowania średniej arytmetycznej.

Aby bezbłędnie rozwiązać zadanie, należało wyznaczyć liczbę x, należącą do zestawu danych, dla której średnia arytmetyczna całego zestawu liczb jest równa 11. Wyniki maturzystów potwierdzają coraz lepsze rozumienie pojęć statystycznych, stosowanych w sytuacjach typowych.

Równie dobry wynik osiągnęli maturzyści w zadaniu 12. (poziom wykonania zadania – 93%), w którym trzeba było wykorzystać wzór na n-ty wyraz w ciągu arytmetycznym. By znaleźć właściwą odpowiedź wystarczyło wyznaczyć numer wyrazu ciągu o wartości 71. Większość zdających nie miała z tym kłopotów.

Z kolei zadanie 23. sprawdzało umiejętność stosowania własności figur geometrycznych. Do poprawnego rozwiązania zadania potrzebne było obliczenie objętości stożka, po uprzednim wyznaczeniu promienia podstawy stożka. Zadanie zostało rozwiązane bezbłędnie przez 88% zdających.

Kolejnym przykładem potwierdzającym tezę, że maturzyści dość dobrze radzą sobie w sytuacjach typowych, jest wysoki poziom wykonania zadania 15. (poziom wykonania zadania – 83%). Zadanie badało poziom opanowania umiejętności stosowania zależności między kątem środkowym a kątem wpisanym. Warto zaznaczyć, że do poprawnego rozwiązania konieczne było przeprowadzenie rozumowania i obliczeń, a rozwiązania nie można sprowadzić do jednej prostej czynności. Maturzyści potwierdzili, że na ogół są w stanie poprawnie przeprowadzić kilkuetapowe działania, wymagające znajomości własności kątów w okręgu (w kole).

Analiza rezultatów osiągniętych na poziomie podstawowym prowadzi do wniosku, że wśród dobrze opanowanych umiejętności znalazły się zarówno te przydatne przy rozwiązywaniu zagadnień z ciągów, jak i te wymagające znajomości własności figur geometrycznych. Należy podkreślić, że praktycznie wszystkie zadania, które były rozwiązane poprawnie przez co najmniej 80% zdających, nie były zadaniami jednoczynnościowymi, sprowadzającymi się do podstawienia do znanego wzoru lub zastosowania jednej definicji. We wszystkich omówionych wyżej przykładach zagadnienia występowały w szerszym kontekście, a do rozwiązania zadań potrzebne było wykonanie dodatkowych czynności i nie wystarczało mechaniczne odtworzenie wyuczonej reguły.

Poziom rozszerzony

Na poziomie rozszerzonym najłatwiejsze okazały się zadania, w których trzeba było wykazać się umiejętnościami, przypisanymi w podstawie programowej do zakresu rozszerzonego, ale występującymi w typowych kontekstach lub odwołującymi się do popularnych wzorów lub wymagającymi zastosowania konkretnego twierdzenia.

Najłatwiejsze okazało się zadanie 2., wymagające umiejętności obliczania granic ciągów z wykorzystaniem granic ciągów typu $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}$ oraz twierdzeń o działaniach na granicach ciągów – poziom wykonania zadania 80%.

Podstawa programowa nauczania matematyki wyraźnie precyzuje zakres wymagań minimalnych przy obliczaniu granic ciągów przez podanie typów granic i twierdzeń o działaniach na granicach ciągów. Wyniki egzaminu na poziomie rozszerzonym świadczą o solidnym opanowaniu przez zdających wyznaczonego zakresu. Sukces odniesiony przy rozwiązaniu zadania z granicą ciągu jest kolejnym dowodem na to, że uczniowie dobrze odnajdują się w sytuacjach pozwalających na stosowanie nieskomplikowanych algorytmów.

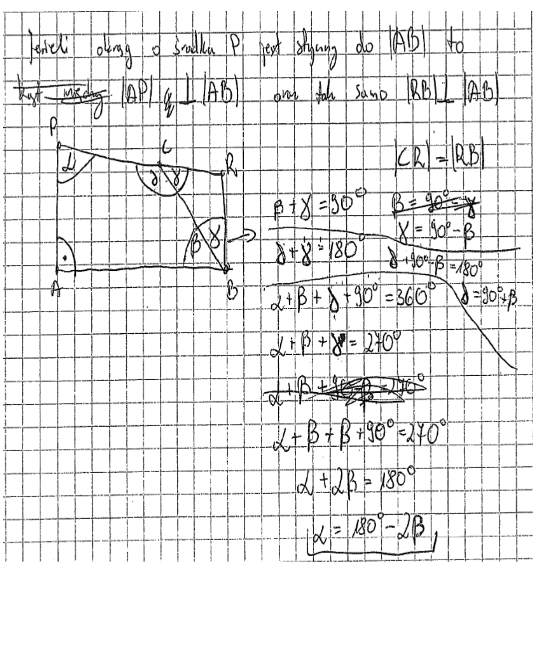
Kolejnym łatwym dla zdających zadaniem było zadanie 3. Wymagało ono stosowania zależności między kątem środkowym a kątem wpisanym, ale w sytuacji, wymagającej dodatkowej analizy długości boków i miar kątów w trójkącie. Zdający również w tym przypadku osiągnęli poziom wykonania – 79%.

UMIEJĘTNOŚCI SPRAWIAJĄCE TRUDNOŚCI

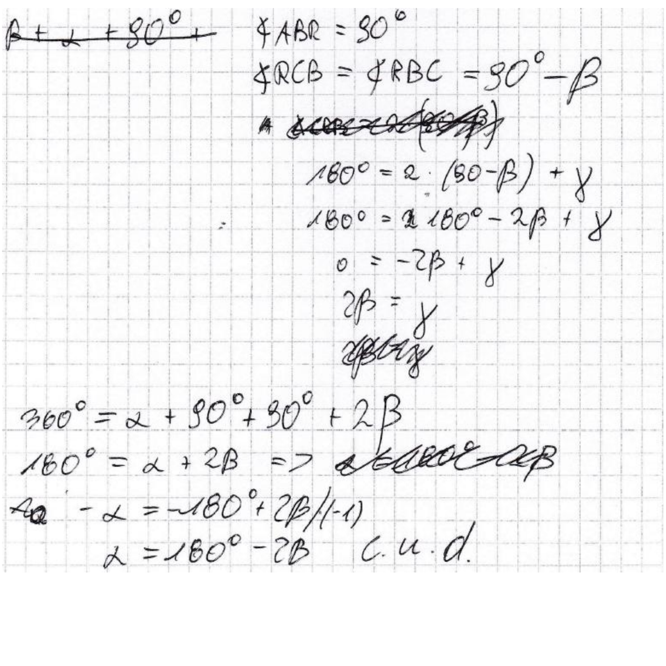
W 2017 roku największym wyzwaniem dla maturzystów okazały się zadania, w których należało wykazać prawdziwość wzoru lub uzasadnić własności figur geometrycznych. Częstą reakcją na samo sformułowanie, zawierające polecenie „wykaż” lub „uzasadnij”, jest opuszczenie zadania. Liczna grupa zdających w ogóle nie podjęła próby rozwiązania takich zadań.

W tegorocznym egzaminie maturalnym na **poziomie podstawowym** najtrudniejsze okazało się zadanie 28., które wymagało przeprowadzenia dowodu geometrycznego (poziom wykonania zadania – 17%). Aby wykazać zapisaną w treści zadania zależność między kątami α i β, można było skorzystać z twierdzenia o sumie miar kątów w trójkącie i czworokącie albo z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą, a także z twierdzenia o odcinkach stycznych. Poniżej zamieszczono przykładowe poprawne rozwiązania zadania, w których wykorzystano twierdzenia o sumie miar kątów w czworokącie (przykład 1. i 2.).

Przykład 1.

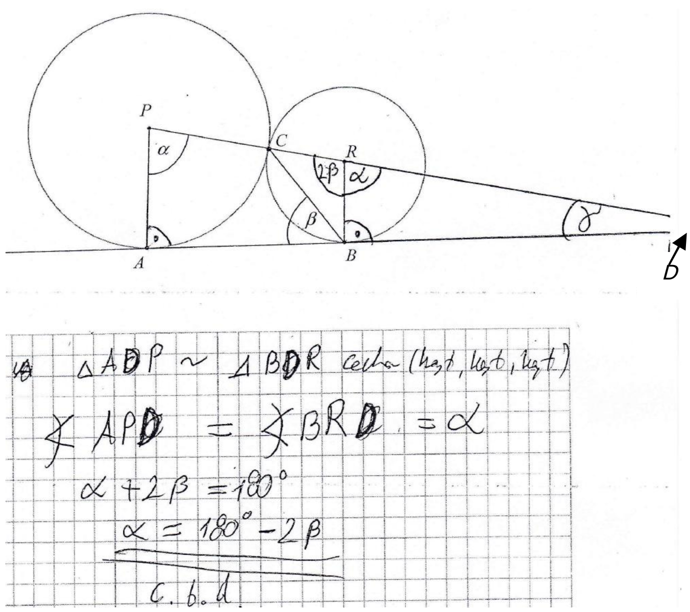


Przykład 2.



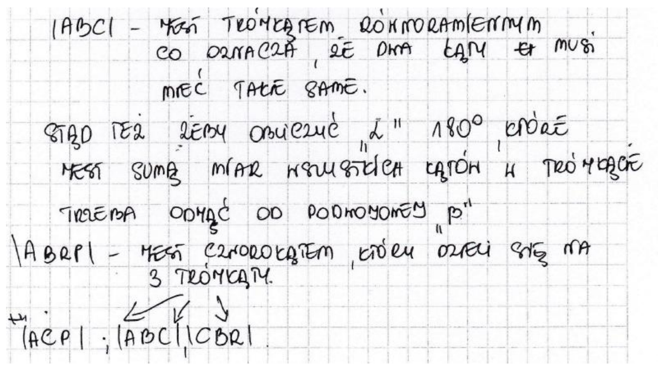
Część zdających przy dowodzie zależności korzystała z podobieństwa trójkątów, co ilustruje przykład 3.

Przykład 3.



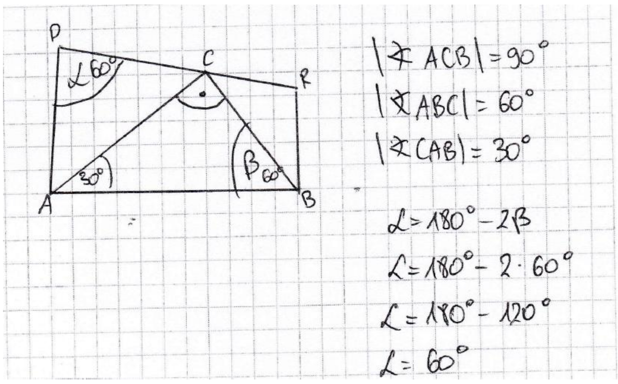
Wielu zdających nie podjęło w ogóle próby zmierzenia się z problemem zaproponowanym w treści zadania. Duża grupa tych, którzy postanowili go rozwiązać, popełniała błąd, polegający na przyjmowaniu, że trójkąt *ABC* jest równoramienny. Oto przykładowe rozwiązanie zawierające ten błąd.

Przykład 4.

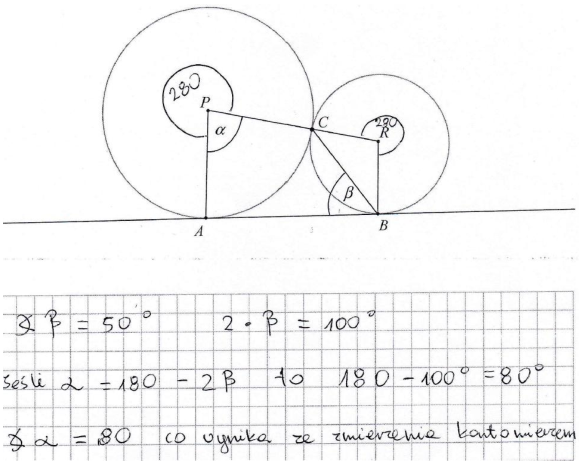


Zdarzały się często próby rozwiązania problemu przez analizę konkretnych sytuacji, czyli ustaleniu konkretnych miar kątów. Ilustrują to przykłady 5. i 6.

Przykład 5.

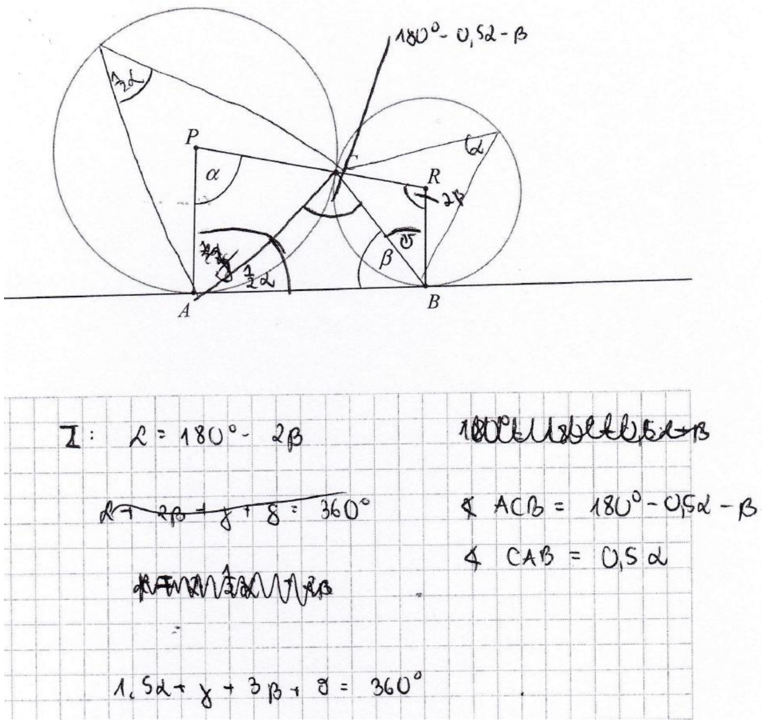


Przykład 6.



Również duża grupa zdających rozpoczynała rozwiązanie od zapisania tylko części warunków, potrzebnych do udowodnienia równości $\alpha = 180° - 2\beta$, tak jak w przykładzie 7.

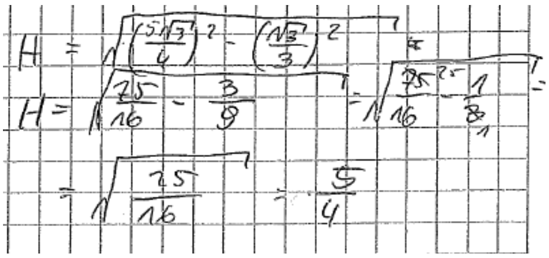
Przykład 7.



Kolejnym zadaniem sprawiającym trudności maturzystom na poziomie podstawowym było zadanie 34. (poziom wykonania zadania – 20%).

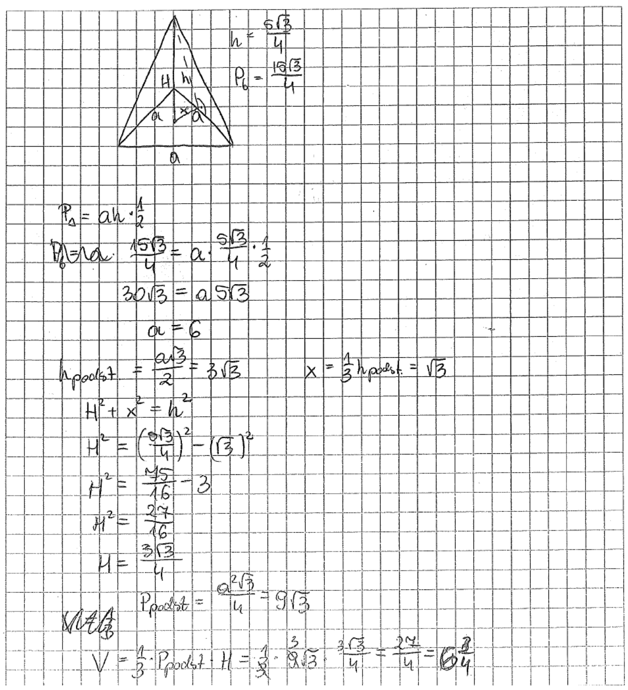
Trudnością w tym zadaniu, którą zdający musieli pokonać już na samym początku rozwiązania, było zapisanie równania z wykorzystaniem pola powierzchni bocznej ostrosłupa. Do pokonania zasadniczych trudności zadania potrzebne było obliczenie wysokości ostrosłupa.
Niektórzy zdający popełniali błędy rachunkowe, które obniżały ocenę rozwiązania, np. przy wyznaczaniu wysokości ostrosłupa, tak jak w przykładzie 8.

Przykład 8.



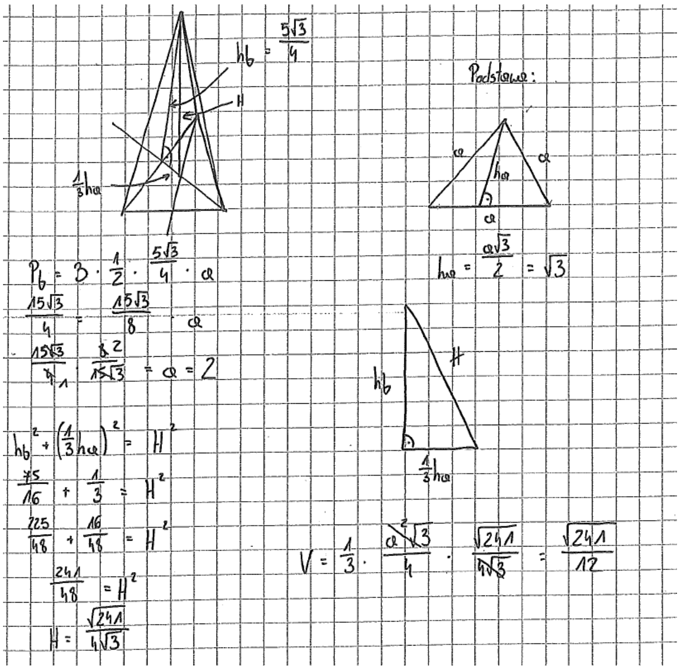
Zdarzały się rozwiązania, w których zdający traktowali pole powierzchni bocznej ostrosłupa jako pole jednej ściany. To uniemożliwiało poprawne rozwiązanie mimo prowadzenia rozumowania do końca (jak w przypadku zilustrowanym w przykładzie 9.).

Przykład 9.



Wielu maturzystów błędnie interpretowało treść zadania, przyjmując, że jeśli wysokość ściany bocznej jest prostopadła do krawędzi podstawy, to ta ściana również jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Taką niewłaściwą interpretację treści zadania ilustruje przykład 10.

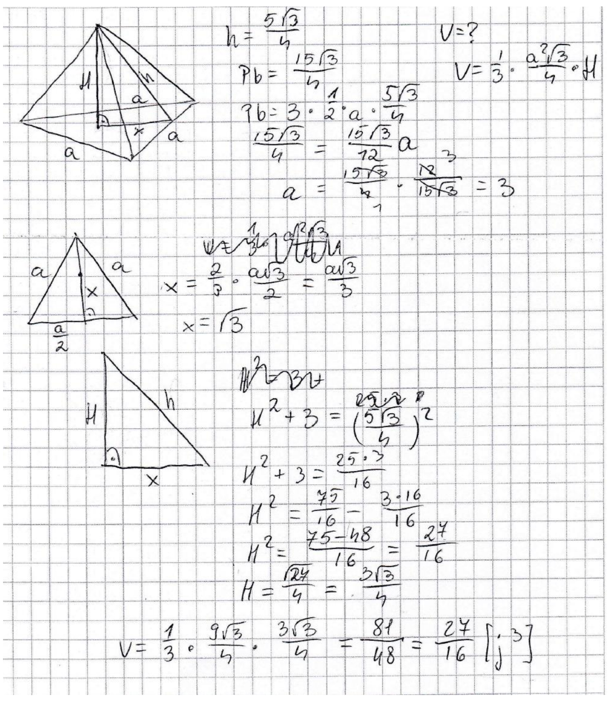
Przykład 10.



W tym przypadku zdający osiągnął w rozwiązaniu niewielki postęp, zapisał poprawnie równanie z niewiadomą *a*, z którego wyznaczył wartość liczbową *a*. W następnym etapie rozwiązania błędnie przyjął, że ściana boczna jest prostopadła do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

Zdarzały się również rozwiązania, w których zdający popełniali błędy zarówno rachunkowe, jak i rzeczowe (ilustruje to przykład 11.).

Przykład 11.



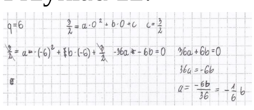
Zdający popełnia tym razem błąd rachunkowy przy obliczaniu długości *a*, a następnie już przy wyznaczaniu długości *x* popełnia błąd rzeczowy, zapisując $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$ zamiast $x = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Z przedstawionych przykładów rozwiązania zadania 34. można wnioskować, że maturzyści mieli duże trudności z interpretacją treści zadania. Obok wspomnianego już błędu merytorycznego, polegającego na „wnioskowaniu”, że jeśli wysokość ściany bocznej jest prostopadła do krawędzi podstawy, to ściana boczna jest prostopadła do płaszczyzny podstawy, częstą nieprawidłowością było wyznaczanie długości krawędzi podstawy po przyjęciu, że pole jednej ściany bocznej stanowi pole całej powierzchni bocznej. Potwierdza to opinie, że absolwenci szkół, kończących się maturą, mają kłopoty z zadaniami ze stereometrii, wymagającymi wykorzystania wyobraźni przestrzennej i prawidłowego interpretowania pojęć, zwłaszcza w sytuacjach złożonych.

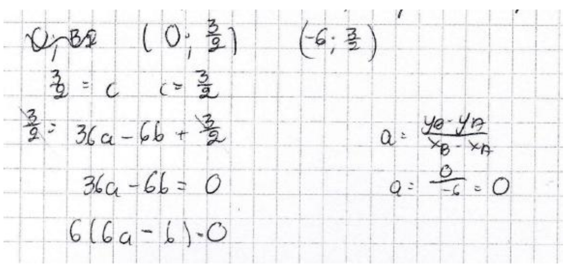
Dużą trudność zdającym na poziomie podstawowym sprawiło również zadanie 29. (poziom wykonania zadania – 44%). Zadanie badało umiejętność wyznaczania wzoru funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji. Trudnością dla zdających było zinterpretowanie podanej w treści zadania równości $f(-6) = f(0) = \frac{3}{2}$. Poziom wykonania zadania potwierdza, że maturzystom, także tym, którzy stosunkowo dobrze radzą sobie w sytuacjach typowych przy stosowaniu prostych własności, trudność sprawiają zadania wymagające stosowania umiejętności złożonych i opracowania strategii rozwiązania w sytuacjach nietypowych.

Błędne rozwiązania zadania 29., przedstawione poniżej w przykładach 12. i 13., dobrze ilustrują problem. Zdający nie potrafią właściwie zinterpretować równania z treści zadania (przykład. 12.) lub nie potrafią skorygować własnego rozwiązania z powodu braku refleksji nad sprzecznością między otrzymanym wynikiem a treścią zadania (przykład 13.).

Przykład 12.

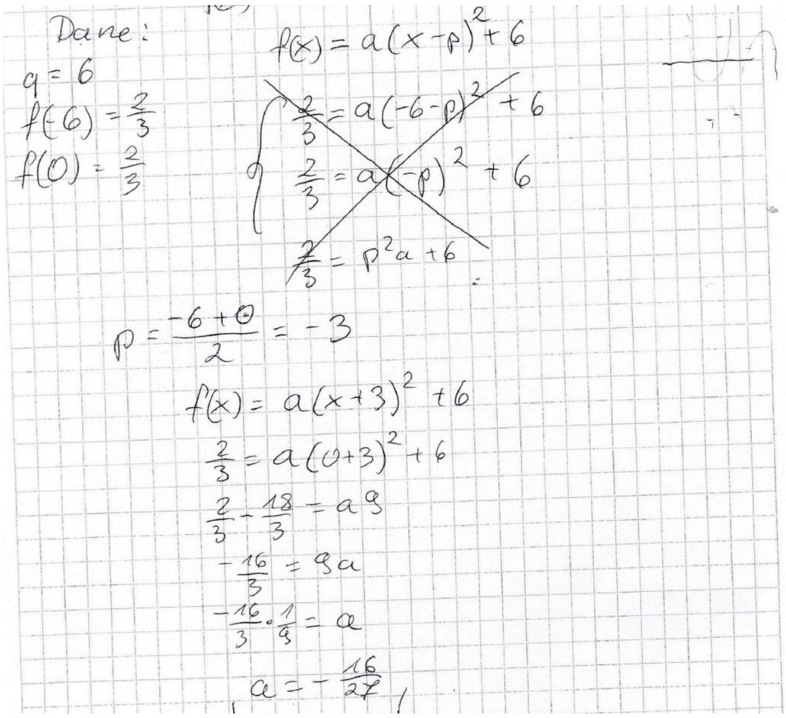


Przykład 13.



Ponadto w wielu przypadkach o braku poprawności decydują błędy w końcowej części rozumowania. Zagadnienia wymagające przeprowadzenia kilkuetapowego rozumowania są istotnym wyzwaniem dla zdających. W przedstawionym poniżej przykładzie (przykład 14.), pomimo bezbłędnego wykonania w pierwszym etapie rozwiązania, zdający nie doprowadza poprawnie rozumowania do końca. Wprawdzie w przedstawionym rozwiązaniu wyznaczono poprawnie wzór funkcji kwadratowej, lecz potem wstawiono do tego wzoru niewłaściwą wartość argumentu, co uniemożliwiło uzyskanie poprawnego rozwiązania.

Przykład 14.



Dane:

$q = 6$

$f(-6) = \frac{2}{3}$

$f(0) = \frac{2}{3}$

$$f(x) = a(x-p)^2 + 6$$

$$\cancel{\begin{cases} \frac{2}{3} = a(-6-p)^2 + 6 \\ \frac{2}{3} = a(-p)^2 + 6 \end{cases}}$$

$$\cancel{\frac{2}{3} = p^2 a + 6}$$

$$p = \frac{-6+0}{2} = -3$$

$$f(x) = a(x+3)^2 + 6$$

$$\frac{2}{3} = a(0+3)^2 + 6$$

$$\frac{2}{3} - \frac{18}{3} = a9$$

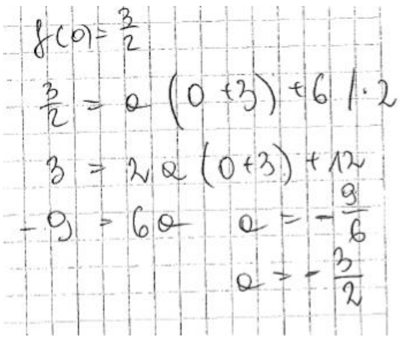
$$-\frac{16}{3} = 9a$$

$$-\frac{16}{3} \cdot \frac{1}{9} = a$$

$$a = -\frac{16}{27}$$

Typowe błędy popełniane przez maturzystów ilustrują przykłady 15. i 16.

Przykład 15.



$$f(0) = \frac{3}{2}$$

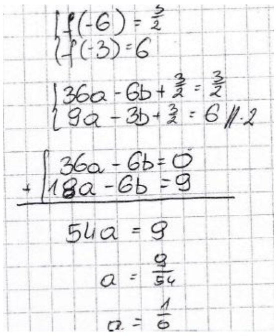
$$\frac{3}{2} = a(0+3) + 6 \quad | \cdot 2$$

$$3 = 2a(0+3) + 12$$

$$-9 = 6a \qquad a = -\frac{9}{6}$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

Przykład 16.



$$\begin{cases} f(-6) = \frac{3}{2} \\ f(-3) = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 36a - 6b + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \\ 9a - 3b + \frac{3}{2} = 6 \quad | \cdot 2 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 36a - 6b = 0 \\ 18a - 6b = 9 \end{cases}$$

$$54a = 9$$

$$a = \frac{9}{54}$$

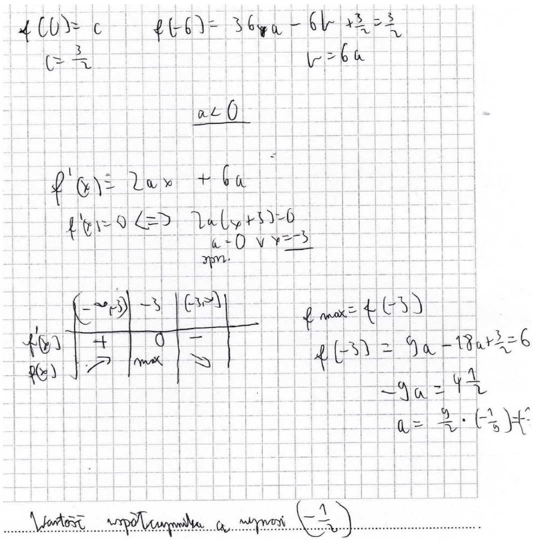
$$a = \frac{1}{6}$$

W przykładzie 15. zdający we wzorze funkcji kwadratowej opuszcza wykładnik, natomiast w przykładzie 16. przy rozwiązywaniu układu równań zdający popełnia błąd rachunkowy.

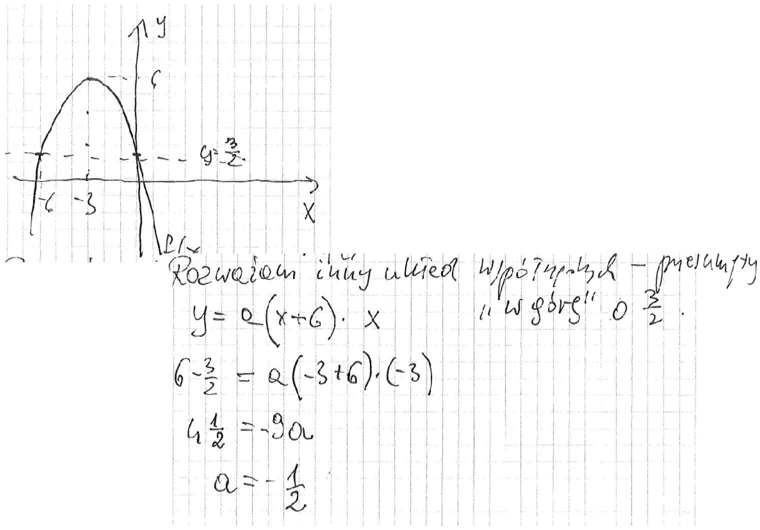
Warto podkreślić, że wśród maturzystów zdarzają się osoby poszukujące własnych sposobów rozwiązania, budujące nieschematyczną, poprawną strategię rozwiązania problemu. Należy tym bardziej docenić takie działania, zwłaszcza w przypadku zadań postrzeganych przez większość zdających jako trudne.

Takie godne uwagi rozwiązania przedstawiają przykłady 17. i 18.

Przykład 17. (wykorzystanie pochodnej)



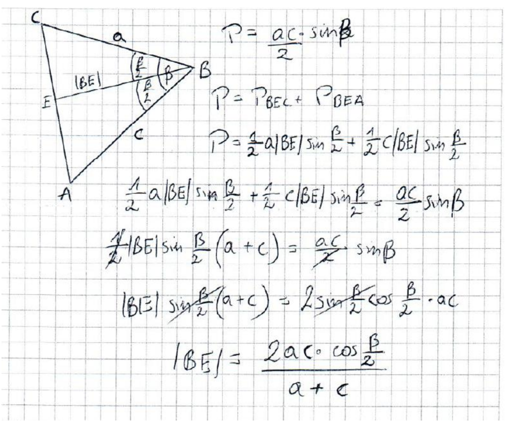
Przykład 18. (wykorzystanie przesunięcia układu współrzędnych)



Rozwiązania te cechuje szybkie znalezienie odpowiedzi, zastosowanie własności obiektów z różnych działów matematyki i wnikliwe rozumienie pojęć oraz możliwości ich nieszablonowego wykorzystania.

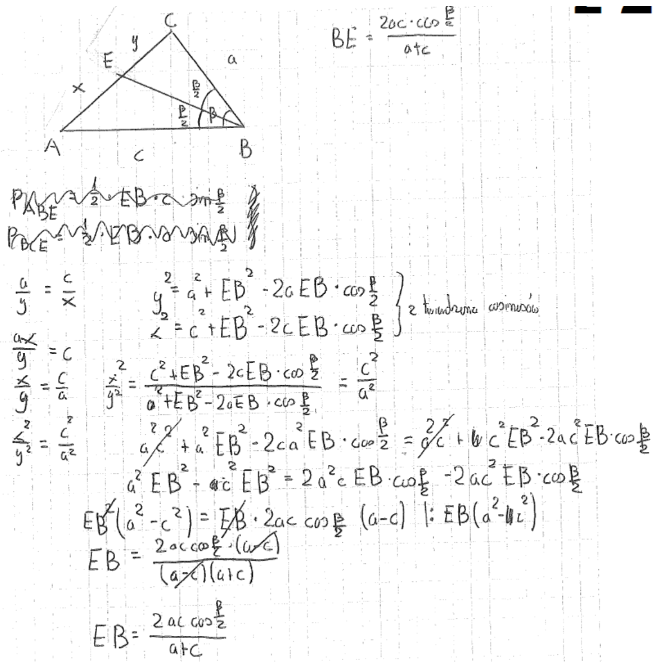
Na **poziomie rozszerzonym** najwięcej trudności tegoroczni maturzyści mieli z rozwiązaniem zadania 8. Świadczy o tym niski poziom wykonania zadania – 8%. Zadanie dotyczyło wymagań z obszaru *Rozumowanie i argumentacja*. Zdający mieli przeprowadzić dowód geometryczny. Ci maturzyści, którzy rozwiązali zadanie, najczęściej zauważali, że do przeprowadzenia dowodu wystarczy wykorzystać wzór na pole trójkąta z sinusem kąta β oraz na zapisać pole trójkąta podzielonego dwusieczną kąta β jako sumę pól dwóch trójkątów. Nietrudne obliczenia pozwalały na ogół tej grupie zdających łatwo i szybko udowodnić tezę twierdzenia. Część maturzystów, którzy z sukcesem rozwiązali to zadanie, zastosowała w dowodzie twierdzenie cosinusów i twierdzenie o dwusiecznej kąta. Ten sposób rozwiązania był dla zdających nieco trudniejszy w obliczeniach, a ponadto wymagał rozpatrzenia przypadku, gdy boki a i c są tej samej długości, czyli gdy trójkąt ABC jest równoramienny. Duża grupa maturzystów, dowodząc tezy tym drugim sposobem, nie rozpatrywała przypadku trójkąta równoramiennego. Wśród zdających znaleźli się również tacy, którzy dowodzili tezę tylko w oparciu o trójkąt równoramienny.
Oto przykład poprawnego rozwiązania z wykorzystaniem wzoru na pole trójkąta.

Przykład 19.



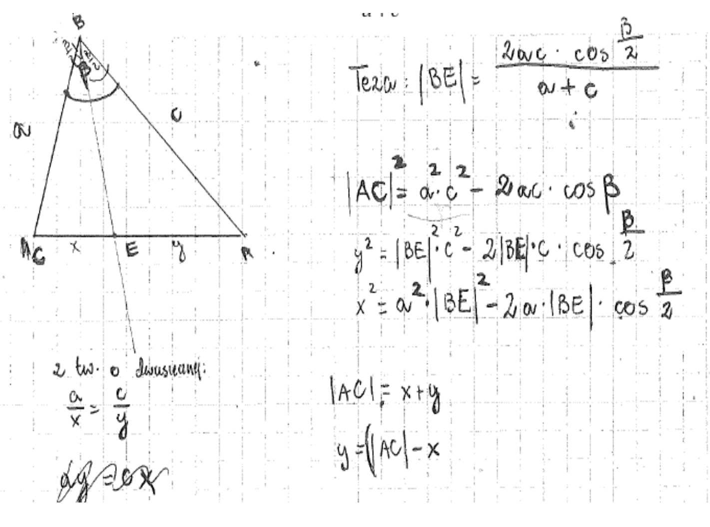
W przykładzie 20., zamieszczonym poniżej, zdający stosuje w dowodzie twierdzenie cosinusów i twierdzenie o dwusiecznej kąta, jednak nie rozpatruje przypadku, gdy trójkąt *ABC* jest równoramienny.

Przykład 20.

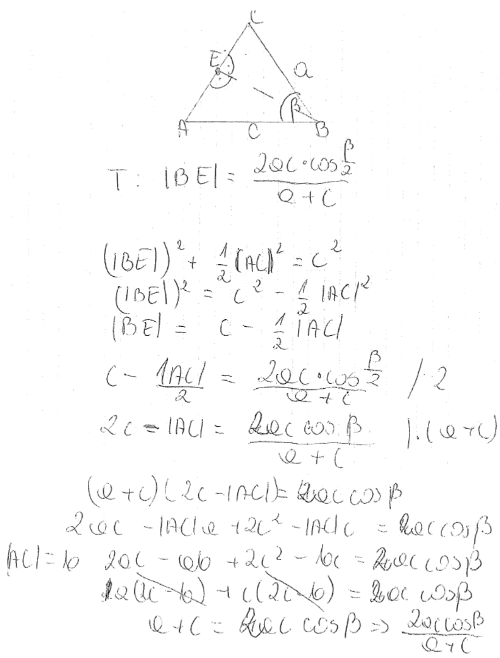


Wśród błędnych rozwiązań były także takie, w których zdający zapisywali niepoprawnie twierdzenie cosinusów, tak jak w przykładzie 21. W przykładzie 22. zdający przeprowadza rozumowanie tylko dla trójkąta równoramiennego.

Przykład 21.



Przykład 22.

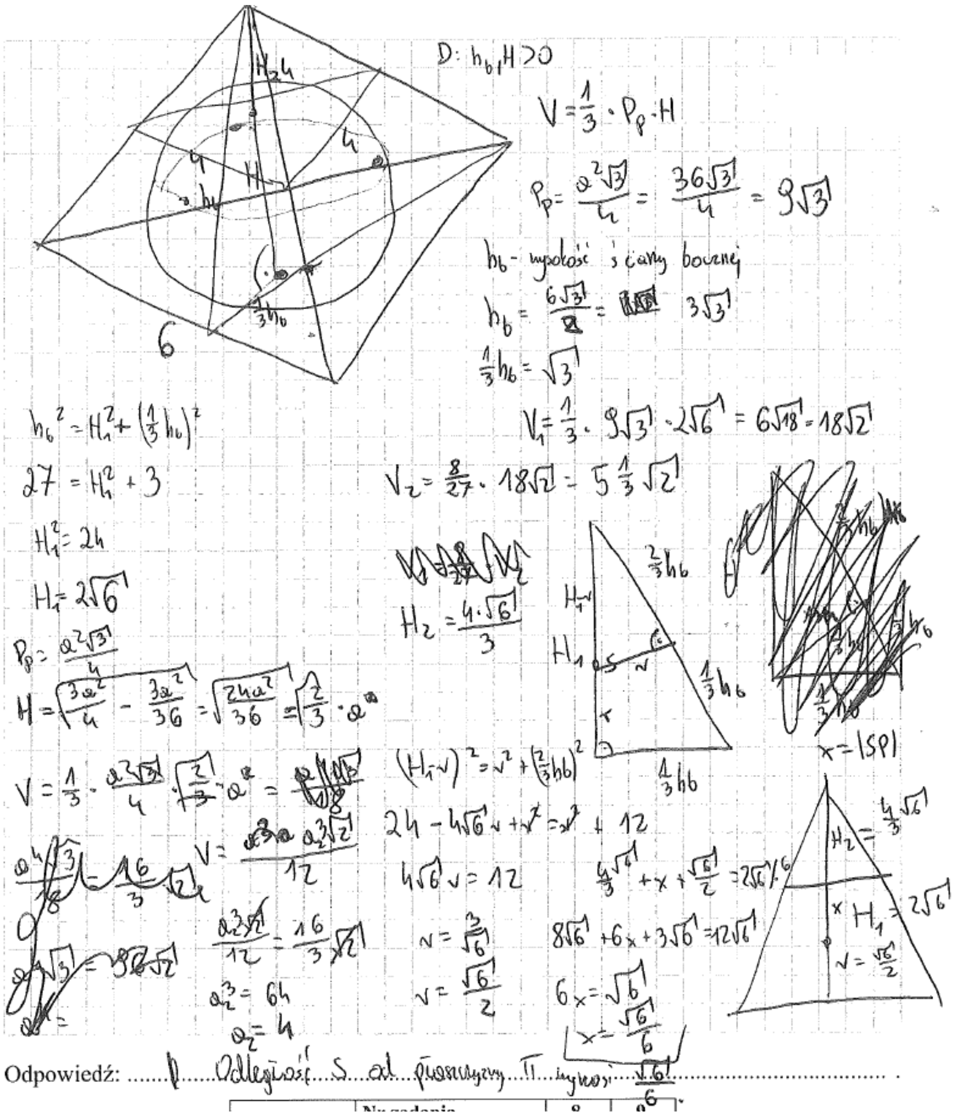


Trudnym zadaniem dla maturzystów okazało się również zadanie 9. (poziom wykonania zadania – 11%). Dotyczyło ono wymagań z obszaru *Użycie i tworzenie strategii.*

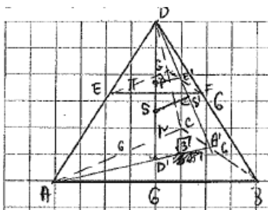
Aby rozwiązać zadanie, należało wykazać się umiejętnościami stosowania twierdzenia Pitagorasa w przypadku obliczenia wysokości czworościanu, a także korzystania z własności trójkątów podobnych i stosowania skali podobieństwa. Należało również umiejętnie opracować strategię prowadzącą do znalezienia odległości środka kuli od określonej w treści zadania płaszczyzny.

Poniżej zamieszczono przykładowe poprawne rozwiązania zadania. W przykładzie 23. zdający przedstawił rozwiązanie, w którym wyznaczył promień kuli przy zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa, a w przykładzie 24. zdający przedstawił rozwiązanie, w którym wyznaczył promień kuli z wykorzystaniem podobieństwa figur.

Przykład 23.



Przykład 24.



$V_{EGFD} = \frac{8}{27} V_{ABCD}$, $h = |D'D|$

$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = 3\sqrt{3}\,h$

$|AA'| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

$\cancel{|DD'| = h}$

$|DA'| = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$|A'D| = 3\sqrt{3}$ z twierdzenia Pitagorasa:

$|DD'| = h = \sqrt{|DA|^2 - |D'A'|^2} = \sqrt{27 - 3} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$24 \mid 2$
$12 \mid 2$
$6 \mid 2$
$3 \mid$

$V_{ABCD} = 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} = 6 \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$

$V_{EGFD} = \frac{8}{27} \cdot 18\sqrt{2} = \frac{16}{3}\sqrt{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|EF|^2\sqrt{3}}{4} \cdot |DP|$

z tw. Pitagorasa:

$|DP| = \sqrt{|DE'|^2 - |PE'|^2} = \sqrt{\left(\frac{|EF|\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{|EF|\sqrt{3}}{6}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{|EF|^2 \cdot 3}{4} - \frac{|EF|^2 \cdot 3}{36}} = \sqrt{\frac{24|EF|^2}{36}} = \frac{2\sqrt{6}\,|EF|}{6} = \frac{|EF|\sqrt{6}}{3}$

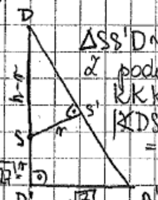
$V_{EGFD} = \frac{|EF|^2\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{|EF|\sqrt{6}}{3} = \frac{|EF|^3\sqrt{2}}{12} = \frac{16}{3}\sqrt{2}$

$|EF|^3 = 64$

$|EF| = 4$

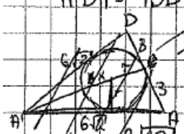
$|DP| = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

$|PD'| = |DD'| - |DP| = 2\sqrt{6} - \frac{4}{3}\sqrt{6} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$



$\triangle SS'D \sim \triangle DD'A'$ z podobieństwa KKK

$|\sphericalangle DS'S| = |\sphericalangle DD'A'| = 90^\circ$



~~z tw. Pitagorasa~~ z tw. Pitagorasa:

$\cancel{x^2 = 72 - 9 = 63}$ $|DA'| = \sqrt{h^2 + |D'A'|^2} = \sqrt{3 + 24} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$\cancel{x = \sqrt{63}}$

$\cancel{P = \frac{6 \cdot \sqrt{63}}{2} = 3\sqrt{63} = r\left(\frac{12\sqrt{2} + 6}{2}\right) = r(6\sqrt{2} + 3)}$

$|\sphericalangle SDS'| = |\sphericalangle D'DA'|$, ponieważ jest to ten sam kąt

$\cancel{r = \frac{3\sqrt{63}}{6\sqrt{2} + 3} \cdot \frac{6\sqrt{2} - 3}{6\sqrt{2} - 3} = \frac{3\sqrt{63}(6\sqrt{2} - 3)}{63}}$

$\cancel{|SP| = |PD'| - r = \frac{2}{3}\sqrt{6} - \frac{18\sqrt{126} + 9\sqrt{63}}{63}}$

$\frac{h - r}{r} = \frac{|DA'|}{|D'A'|}$ $\quad \frac{2\sqrt{6} - r}{r} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

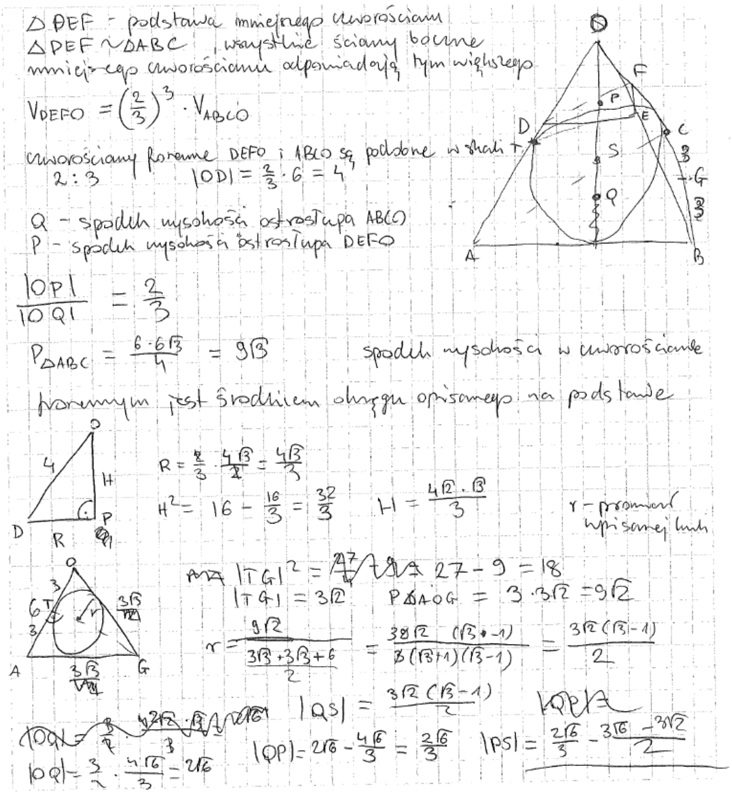
$r = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$|SP| = |DD'| - r - |PD| = \cancel{2\sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{4}{3}\sqrt{6}} = |PD'| - r = \frac{2}{3}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

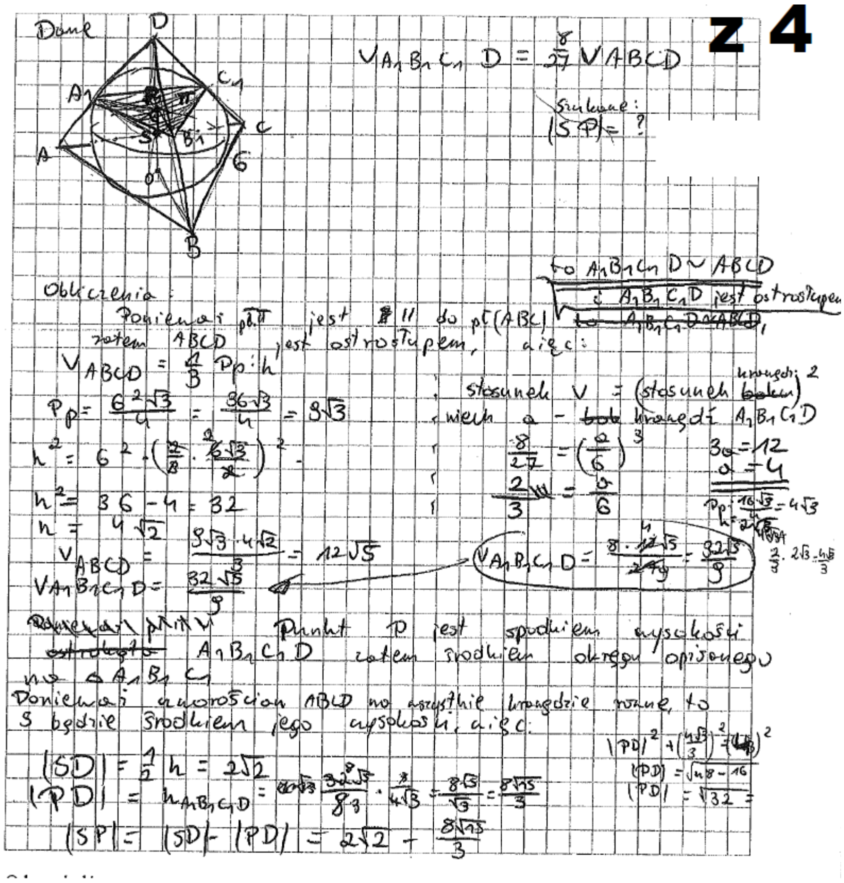
Odpowiedź: Odległość środka S kuli od płaszczyzny π wynosi $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Częstym błędem zdających było przyjęcie założenia, że kula ma punkty wspólne z krawędziami czworościanu (ilustruje to przykład 25.) albo niepoprawne rozumowanie oparte na niewłaściwym założeniu, że środek kuli jest środkiem wysokości danego czworościanu (przykład 26).

Przykład 25.

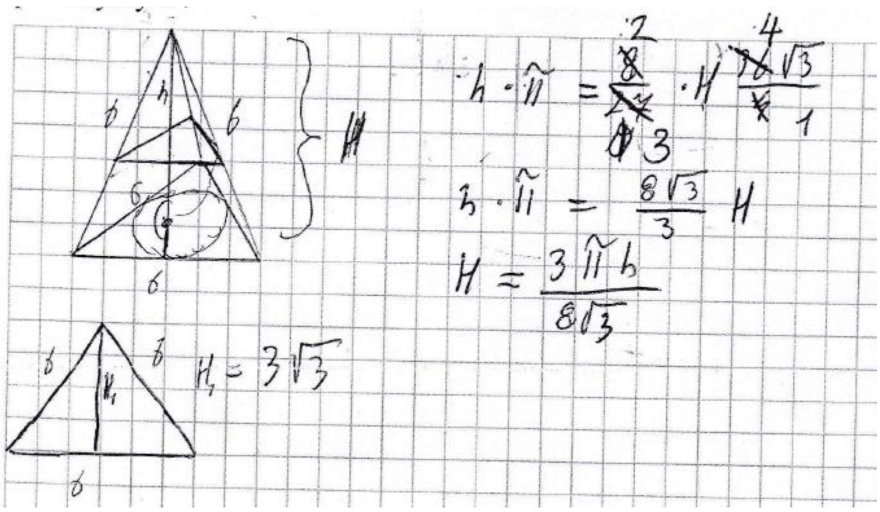


Przykład 26.



Oprócz błędów wymienionych wcześniej zdający niepoprawnie interpretowali treść zadania, np. płaszczyznę π dzielącą czworościan na dwie bryły traktowali jako powierzchnię podstawy ostrosłupa ściętego, jak w poniższym przykładzie.

Przykład 27.



Analiza rozwiązań zadań maturalnych: 8. (dowód geometryczny) i 9. (zastosowanie własności brył w złożonej sytuacji – geometria przestrzenna) nie może prowadzić do optymistycznych wniosków. Uzyskany przez maturzystów niski wynik w tych zadaniach jest ważnym sygnałem, że konieczna jest zmiana podejścia do nauczania umiejętności potrzebnych do rozwiązywania zagadnień geometrycznych zarówno w przypadku geometrii płaszczyzny jak i geometrii przestrzeni.

2. Problem „pod lupą”

OPIS SYTUACJI W JĘZYKU MATEMATYCZNYM TRUDNYM WYZWANIEM

Warto pochylić się nad zagadnieniem modelowania matematycznego, czyli opisywaniem w języku matematyki przebiegu zjawisk i cech badanych obiektów. Dla zdających maturę z matematyki, zarówno na poziomie podstawowym jak i rozszerzonym, stanowiło to poważne wyzwanie.

Na przykład w zadaniu 12. z arkusza dla poziomu rozszerzonego maturzyści osiągnęli poziom wykonania 22%. Zadanie to nie powinno być zaskoczeniem dla maturzystów. Należało w nim bowiem odpowiednio dobrać wartość parametru ze wzoru, opisującego trójmian kwadratowy, tak by pierwiastki trójmianu spełniały określony warunek. Ten typ zadania był obecny na każdej z majowych matur, począwszy od 2010 roku. Do rozwiązania tego zadania wystarcza znajomość wzorów Viète’a, pewna skrupulatność w zapisywaniu wszystkich założeń oraz staranne prowadzenie obliczeń. Tymczasem zdający często błędnie rozwiązywali nierówność $(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$. Dość popularne były niestety błędy rachunkowe przy doprowadzaniu lewej strony nierówności do wyrażenia z jedną zmienną, co powodowało, że nawet poprawne dokończenie takiego rozwiązania dawało zdającemu ocenę niższą od maksymalnej. Przykład 28. przedstawia takie właśnie rozwiązanie.

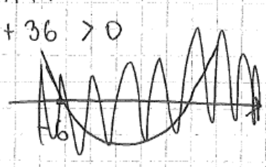
Przykład 28.

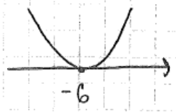
$4x^2-6mx+2m^2-3m-9=0 \quad \Delta=36m^2-16(2m^2-3m-9)=$

$=36m^2-32m^2+48m+144=4m^2+48m+144$

$m^2+12m+36>0$

$\Delta_\Delta=144-144=0 \quad (m+6)^2>0$





$m\in R-\{-6\}$

$16x_1^2-16x_1x_2+\cancel{4x_1}-16x_1x_2+16x_2^2-\cancel{4x_2}-\cancel{4x_1}+\cancel{4x_2}-1<0$

$16x_1^2-32x_1x_2+16x_2^2<1$

$x_1^2-2x_1x_2+x_2^2<\frac{1}{16} \quad (x_1-x_2)^2<\frac{1}{16}$

$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2<\frac{1}{16}$

$\left(\frac{6m}{4}\right)^2-4\left(\frac{2m^2-3m-9}{4}\right)=\frac{9m^2}{4}-2m^2-3m-9<\frac{1}{16} \quad |\cdot 4$

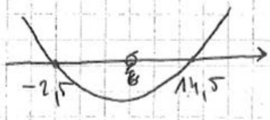
$9m^2-8m^2-12m-36-\frac{1}{4}<0 \quad |\cdot 4$

$4m^2-48m-145<0$

$\Delta=4624 \quad \sqrt{\Delta}=68$

$m_1=\frac{48-68}{8}=-2{,}5 \quad m_2=\frac{48+68}{8}=14{,}5$

$(m+2{,}5)(m-14{,}5)<0$



$m\in(-2{,}5\,,\,14{,}5)$

Dość liczna grupa zdających przy rozwiązywaniu rozpatrywała warunek $x_1 - x_2 < 0$ zapisany w treści zadania i popełniała przy tym błędy, które wpływały na wynik rozwiązania. Poniżej skan ilustrujący takie błędne rozwiązanie.

Przykład 29.

I $\Delta > 0$

$36m^2 - 16(2m+3)(m-3) > 0$

$36m^2 - (32m+48)(m-3) > 0$

$36m^2 - 32m^2 + 96m - 48m + 144 > 0$

$4m^2 + 48m + 144 > 0$

$m^2 + 12m + 36 > 0$

$(m+6)^2 > 0$

$m \in \mathbb{R} - \{-6\}$

II $x_1 + x_2 = \frac{6m}{4}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{(2m+3)(m-3)}{4} = \frac{2m^2 - 6m + 3m - 9}{4} = \frac{2m^2 - 3m - 9}{4}$

III $(4x_1 - 4x_2 - 1)(4x_1 - 4x_2 + 1) < 0$

$16x_1^2 - 16x_1x_2 - 16x_1x_2 + 16x_2^2 - 1 < 0 \quad / : 16$

$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - \frac{1}{16} < 0$

$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - \frac{1}{16} < 0$

$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - \frac{1}{16} < 0$

$\left(\frac{6m}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2m^2 - 3m - 9}{4} - \frac{1}{16} < 0$

$\frac{36m^2}{16} - 2m^2 + 3m + 9 - \frac{1}{16} < 0 \quad / \cdot 16$

$36m^2 - 32m^2 + 48m + 143 < 0$

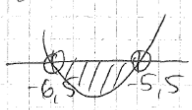
$4m^2 + 48m + 143 < 0$

$\Delta_m = 2304 - 2288 = 16$

$\sqrt{\Delta_m} = 4$

$m_1 = \frac{-48-4}{8} = -6{,}5$

$m_2 = \frac{-48+4}{8} = -5{,}5$



$m \in (-6{,}5;\ -5{,}5)$

IV $x_1 - x_2 < 0$

$\sqrt{\Delta} = |m+6|$

$x_1 = \frac{6m - |m+6|}{8}$

$x_2 = \frac{6m + |m+6|}{8}$

$\frac{6m - |m+6| - 6m - |m+6|}{8} < 0$

$-2|m+6| < 0 \quad / : (-2)$

$|m+6| > 0$

$m + 6 > 0$

$m > -6$

$\boxed{m \in (-6;\ -5{,}5)}$

Odpowiedź: $m \in (-6; -5{,}5)$

Przykładowym zadaniem w arkuszu na poziomie rozszerzonym, które również badało umiejętność budowania i analizy modelu matematycznego, jest zadanie 15. (poziom wykonania zadania – 18%).

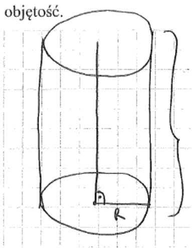
Zagadnienie optymalizacyjne nie było nowością w arkuszu dla poziomu rozszerzonego. Począwszy od 2010 roku takie zadanie występuje na każdym egzaminie maturalnym z matematyki na poziomie rozszerzonym. Do rozwiązania takiego zadania potrzebne są umiejętności zastosowania rachunku pochodnych. Za rozwiązanie zadania 15. można było uzyskać najwięcej punktów spośród wszystkich zadań z arkusza maturalnego – tj. 7 punktów (3 punkty za zbudowanie modelu, 3 punkty za zbadanie tego modelu oraz 1 punkt za końcowe obliczenia). W zadaniu należało zbudować model, będący funkcją jednej zmiennej, opisującą objętość walca. Wystarczyło wykorzystać pola powierzchni całkowitej walca, aby objętość uzależnić od promienia podstawy walca (albo od wysokości walca).

Przy rozwiązywaniu tego zadania powtarzały się najczęściej dwa błędy, ale za to szczególnej wagi dla poprawności prowadzonych rozumowań w zagadnieniach optymalizacyjnych. Pierwszy z nich to źle określana albo wręcz pomijana dziedzina budowanej funkcji. Drugi to nieprawidłowe uzasadnienie albo pomijanie uzasadnienia, że maksimum lokalne zbudowanej funkcji jest jednocześnie największą wartością tej funkcji.

Dla wielu zdających zadanie optymalizacyjne stało się okazją do realizacji algorytmu: zbudowanie funkcji ➔ wyznaczenie pochodnej tej funkcji ➔ obliczenie miejsc zerowych pochodnej ➔ zapisanie odpowiedzi końcowej (bez uwzględnienia uzasadnienia największej wartości), czyli rozwiązanie pozbawiane elementów rozumowania. Przykładem niech będzie poniższe rozwiązanie.

Przykład 30.

objętość.



$P_{c_{walca}} = P \qquad P = 2\pi R(R+H)$

V - max

$V = \pi R^2 H$

$P = 2\pi R(R+H) \quad |:2\pi R$

$\frac{P}{2\pi R} = R + H$

$H = \frac{P}{2\pi R} - R$

$V = \pi R^2 H$

$V = \pi R^2\left(\frac{P}{2\pi R} - R\right) = \pi\left[\frac{PR}{2\pi} - R^3\right]$

funkcja na V walca $\rightarrow f(R) = \pi\left[\frac{PR}{2\pi} - R^3\right] = \pi\left[\frac{PR - 2\pi R^3}{2\pi}\right]$

$f'(R) = \pi\left(\frac{P\cdot 2\pi - PR\cdot 0}{(2\pi)^2} - 3R^2\right) = \pi\left(\frac{2\pi\cdot P}{(2\pi)^2} - 3R^2\right)$

To stała liczba, więc jej nie uwzględniam w funkcji (max)

miejsca zerowe pochodnej:

$\frac{P}{2\pi} = 3R^2$

$R^2 = \frac{P}{6\pi}$

$R = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$

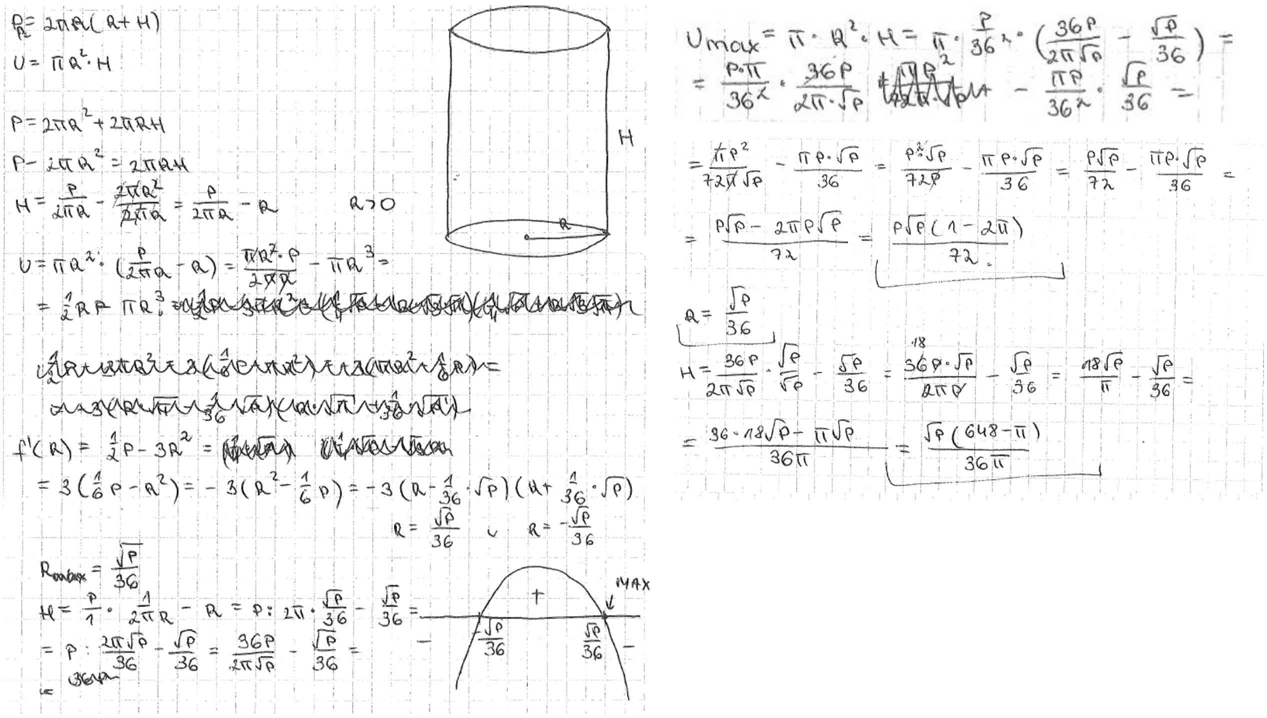
funkcja $f(R)$ przyjmuje maksimum dla $R = \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$

$V_{max} = \pi\cdot R^2\cdot H = \pi\cdot\frac{P}{6\pi}\cdot\frac{P}{2\pi\cdot\sqrt{\frac{P}{6\pi}}} - \sqrt{\frac{P}{6\pi}} = \frac{P^2}{12\pi\cdot\sqrt{\frac{P}{6\pi}}} - \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$

Odpowiedź: Największa objętość walca wynosi $\frac{P^2}{12\pi\sqrt{\frac{P}{6\pi}}} - \sqrt{\frac{P}{6\pi}}$.

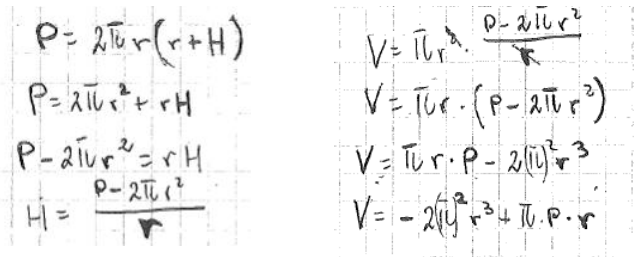
I jeszcze jeden przykład takiego rozwiązania, w którym błędy pojawiają się na każdym etapie rozwiązania. W tym rozwiązaniu zdający błędnie określa dziedzinę funkcji, błędnie oblicza pochodną funkcji i miejsca zerowe, nie uzasadnia, że *V* osiąga wartość największą oraz błędnie oblicza tę objętość.

Przykład 31.



Zdarzały się również rozwiązania w których zdający od początku popełniali błędy, np. niepoprawnie wyznaczając wysokość walca i objętość walca jako funkcję zmiennej *r*.

Przykład 32.



Szczególną trudnością dla tegorocznych maturzystów okazało się w zadaniu 15. określenie wielkości danej, tj. pola powierzchni całkowitej walca, literą (*P*). Niski poziom wykonalności zadania może wynikać stąd, że zdający przy opanowywaniu koniecznych umiejętności analizowali zagadnienia, w których wielkości dane przyjmują konkretne wartości liczbowe lub pozwalają na wykorzystanie szczególnych własności badanych obiektów. Konieczność rozważenia wszystkich możliwych sytuacji i określenia zakresu wartości liczbowych, jakie mogą przyjmować rozważane wielkości, stanowiło poważną przeszkodę na drodze poszukiwania rozwiązania. Podkreślić trzeba, że cała sytuacja dotyczy zadania, które jest uznawane za klasykę w zakresie stosowania rachunku różniczkowego do wyznaczania wartości ekstremalnych w zagadnieniach geometrycznych.

3. Wnioski i rekomendacje

1. Egzamin maturalny z matematyki potwierdził, że zadania sprawdzające pojedyncze, nieskomplikowane, umiejętności na ogół nie sprawiają trudności absolwentom liceów i techników. W tym roku najlepsze wyniki zdający uzyskali za zadania zamknięte ze statystyki, z ciągów liczbowych oraz zadania dające się rozwiązać na prostym rysunku, ilustrującym problem. W skali kraju ponad 80% zdających poprawnie zastosowało zależność między kątem środkowym a kątem wpisanym, przy czym dodać należy, że w zadaniach z kątami trzeba było też wykazać się znajomością własności kątów wierzchołkowych i znajomością sumy miar kątów w trójkącie. Wysoki odsetek maturzystów potrafi wykorzystać własności ciągu arytmetycznego do wyznaczania jego wyrazów. Nie sprawiało też maturzystom kłopotów wykorzystanie średniej arytmetycznej do obliczenia jednej liczby z szeregu danych. Wysoki odsetek zdających, którzy poprawnie wyznaczyli objętość stożka, potwierdza tezę, że w przypadku rozwiązywania zadań wymagających jedynie zastosowania wzorów, zdający uzyskują bardzo dobre rezultaty. Potwierdzone to zostało również na poziomie rozszerzonym – w zadaniach sprawdzających znajomość twierdzeń o działaniach na granicach ciągów.

   Analiza wyników matury z matematyki pozwala wskazać obszary umiejętności i wiadomości, których opanowanie przychodzi uczniom z większą łatwością niż w przypadku innych zagadnień. Zdający za najłatwiejsze uważają i rozwiązują z najlepszymi efektami zadania, dotyczące elementarnych pojęć z zakresu statystyki, własności ciągu arytmetycznego, związków miarowych w stożku i własności kątów w kole (w okręgu). Warto wykorzystać te informacje przy organizacji nauczania matematyki w przypadku uczniów, mających trudności w nauce matematyki. Opanowanie umiejętności przypisanych do wymienionych wyżej obszarów może stanowić ważny etap na drodze do kształcenia innych umiejętności matematycznych, na przykład poprzez formułowanie problemów, które łączą zagadnienia dobrze opanowane z tymi, które stanowią większe wyzwanie.

   Warto podkreślić, że większość maturzystów potrafiła poprawnie rozwiązać zadania, wymagające zastosowania konkretnego wzoru i odwołujące się do pojedynczych umiejętności, zapisanych w podstawie programowej. Chętnie, i na ogół poprawnie, rozwiązywane były przez maturzystów zadania, w których zamieszczono rysunek oraz takie, w których sporządzenie rysunku ułatwiało rozwiązanie. Trzeba zaznaczyć, że do zadań z dobrym wynikiem należą też takie, które wymagały przeprowadzenia krótkiego rozumowania lub połączenia kilku własności obiektów matematycznych. Jest to niewątpliwym sukcesem nauczycieli, starających się wyposażyć każdego ucznia w zestaw narzędzi matematycznych, pozwalających na przekroczenie progu zdawalności matury z matematyki na poziomie podstawowym.

2. Istotnym problemem, który daje się zauważyć stosunkowo często, jest popełnianie przez zdających błędów rachunkowych na różnych etapach rozwiązania, co powoduje brak możliwości uzyskania poprawnego rozwiązania, a nierzadko doprowadza do otrzymania wyników niespełniających warunków zadania. W tym drugim przypadku zdający często nie potrafią właściwie zinterpretować sensowności uzyskanych wyników, a tym samym ujawniają brak zrozumienia pojęć i własności obiektów matematycznych.

   Opisane tu zjawisko sygnalizuje konieczność zwrócenia uwagi w trakcie nauki na staranne wykonywanie przekształceń i obliczeń. Jest to ważne na każdym etapie edukacyjnym, a trzeba podkreślić, że wiele popełnianych błędów to efekt niewłaściwego opanowania treści nauczania w szkole podstawowej (w gimnazjum). Konieczne jest także weryfikowanie poprawności otrzymanego wyniku, a w przypadku wyników sprzecznych z treścią zadania nie do przecenienia jest wskazywanie tych niezgodności, by kształtować umiejętność określania obiektów matematycznych wyznaczonych przez konkretne wartości liczbowe (lub umiejętność wykazywania braku istnienia obiektów, które mogłyby być charakteryzowane przez uzyskane wyniki).

3. Tegoroczny egzamin maturalny z matematyki ujawnił, że poważnym problemem jest poziom opanowania przez absolwentów liceów i techników złożonych umiejętności z zakresu geometrii, zarówno na płaszczyźnie jak i w przestrzeni. Choć pojedyncze umiejętności wydają się być dobrze opanowane przez maturzystów, to rozwiązanie zadania sprawdzającego te same umiejętności, ale w połączeniu z koniecznością przeprowadzenia kilkuetapowego rozumowania i wykorzystania konkretnych własności rozważanych figur geometrycznych, jest niemożliwe do zrealizowania w przypadku zdecydowanej większości zdających maturę.

   Szczególną uwagę w nauczaniu geometrii należy zwrócić na interpretację treści zadań i rozważanie właściwych figur geometrycznych. Wielu tegorocznych maturzystów nie potrafiło zastosować odpowiednich własności wielościanów i ich przekrojów płaszczyznami. Absolwenci szkół, kończących się maturą, traktują matematykę, w tym także geometrię, jak zestaw gotowych algorytmów i procedur, których zastosowanie ma pomóc rozwiązać zadania i w konsekwencji zdać egzamin. Uczniowie nie mają nawyku weryfikacji czy wybrany szablon postępowania jest przydatny w sytuacji opisanej w zadaniu. Warto więc, tam gdzie to możliwe, odchodzić w procesie nauczania od stosowania wyłącznie wyuczonych algorytmów lub przynajmniej pokazywać przyszłym maturzystom alternatywne ujęcia zagadnień, pozwalające na poprawne, a także szybsze, rozwiązanie problemu.

4. Do zadań, które sprawiają maturzystom najwięcej trudności, należą te wymagające uzasadnienia prawdziwości tezy lub własności obiektów matematycznych, szczególnie z zakresu geometrii. Zadania ze sformułowaniem „uzasadnij, że” bądź „wykaż, że” są bardzo często pomijane. W przypadku podejmowania próby rozwiązania częstym błędem jest ograniczenie się do sprawdzenia prawdziwości wzoru lub tezy twierdzenia jedynie w konkretnym przypadku albo pomijanie istotnej części rozumowania lub zapisywanie sformułowania w stylu: „co wynika ze zmierzenia kontomierzem (przykład 6.)” bez jakichkolwiek komentarzy w kluczowych miejscach przedstawianego uzasadnienia. Zdający powinni mieć świadomość, że stosowanie wyżej wspomnianych zabiegów nie przyczyni się do poprawienia wyniku egzaminu.

5. Analiza rozwiązań, przedstawionych w pracach maturalnych z matematyki, pozwala zauważyć także, że często zdający stosują skomplikowane narzędzia w prostych sytuacjach, poszukują odpowiedzi według ściśle wyuczonego schematu postępowania, nie zważając na to, że rozwiązanie można znaleźć, o wiele łatwiej i szybciej, jeśli wykorzysta się własności konkretnych obiektów matematycznych. Na przykład w zadaniu badającym wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji, zdający często zapisywali równania wynikające z zapisanych w treści własności funkcji, lecz nie potrafili ich wykorzystać, gdyż zabrakło im umiejętności interpretowania informacji oraz uzyskanych zapisów.

6. Tegoroczny egzamin maturalny z matematyki pozwolił zaobserwować jeszcze jedno zjawisko, wymagające reakcji ze strony nauczycieli. Zdający mieli poważne problemy z zadaniami, w których wystąpiły, zamiast konkretnych danych opisujących obiekty matematyczne, uogólnione zapisy dotyczące rozważanych obiektów. Na przykład w zadaniu optymalizacyjnym na poziomie rozszerzonym, gdzie konieczność stosowania uogólnień przy opisie własności bryły często powodowało istotne błędy w rozwiązaniu. Rozwiązanie zadania, wymagające analizy brył z polem powierzchni całkowitej P, okazało się trudniejsze niż rozważanie podobnych sytuacji, gdy pole to jest konkretną wartością liczbową. Jest zatem koniecznością rozważanie, w trakcie nauki, także sytuacji, kiedy obiekty matematyczne opisane są z zastosowaniem uogólnień czy z rozważaniem zmian wartości liczbowych poszczególnych wielkości.