Województwo zachodniopomorskie

Matematyka

Sprawozdanie z egzaminu maturalnego w roku 2016

Opracowanie
Józef Daniel (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Piotr Ludwikowski (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie)
Maria Pająk-Majewska (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku)

Redakcja
dr Wioletta Kozak (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Opracowanie techniczne
Bartosz Kowalewski (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Współpraca
Beata Dobrosielska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Agata Wiśniewska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)
Pracownie ds. Wyników Egzaminacyjnych okręgowych komisji egzaminacyjnych

Opracowanie dla województwa zachodniopomorskiego

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
Izabela Szafrańska
Jacek Pietrzak

Centralna Komisja Egzaminacyjna
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. 022 536 65 00, fax 022 536 65 04
e-mail: sekretariat@cke.edu.pl
www.cke.edu.pl

Matematyka

Poziom podstawowy

1. Opis arkusza

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie podstawowym składał się z 25 zadań zamkniętych wyboru wielokrotnego oraz 9 zadań otwartych, w tym 6 zadań krótkiej odpowiedzi i 3 zadania rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności opisane w pięciu obszarach wymagań ogólnych podstawy programowej matematyki: **wykorzystanie i tworzenie informacji** (pięć zadań zamkniętych i jedno zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi), **wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji** (czternaście zadań zamkniętych i dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi), **modelowanie matematyczne** (dwa zadania zamknięte, jedno zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi i jedno zadanie otwarte rozszerzonej odpowiedzi), **użycie i tworzenie strategii** (cztery zadania zamknięte, dwa zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi) oraz **rozumowanie i argumentacja** (dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi). Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 50 punktów.

2. Dane dotyczące populacji zdających

Tabela 1. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym*

Liczba zdających		**10002**
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	6843
	z techników	**3159**
	ze szkół na wsi	39
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	2421
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	3195
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	4347
	ze szkół publicznych	8953
	ze szkół niepublicznych	1049
	kobiety	5564
	mężczyźni	4438
	bez dysleksji rozwojowej	9316
	z dysleksją rozwojową	686

* Dane w tabeli dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 3 zdających − laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

Tabela 2. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach w wersji dostosowanej	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	11
	słabowidzący	14
	niewidomi	0
	słabosłyszący	14
	niesłyszący	5
	ogółem	**44**

3. Przebieg egzaminu

Tabela 3. Informacje dotyczące przebiegu egzaminu

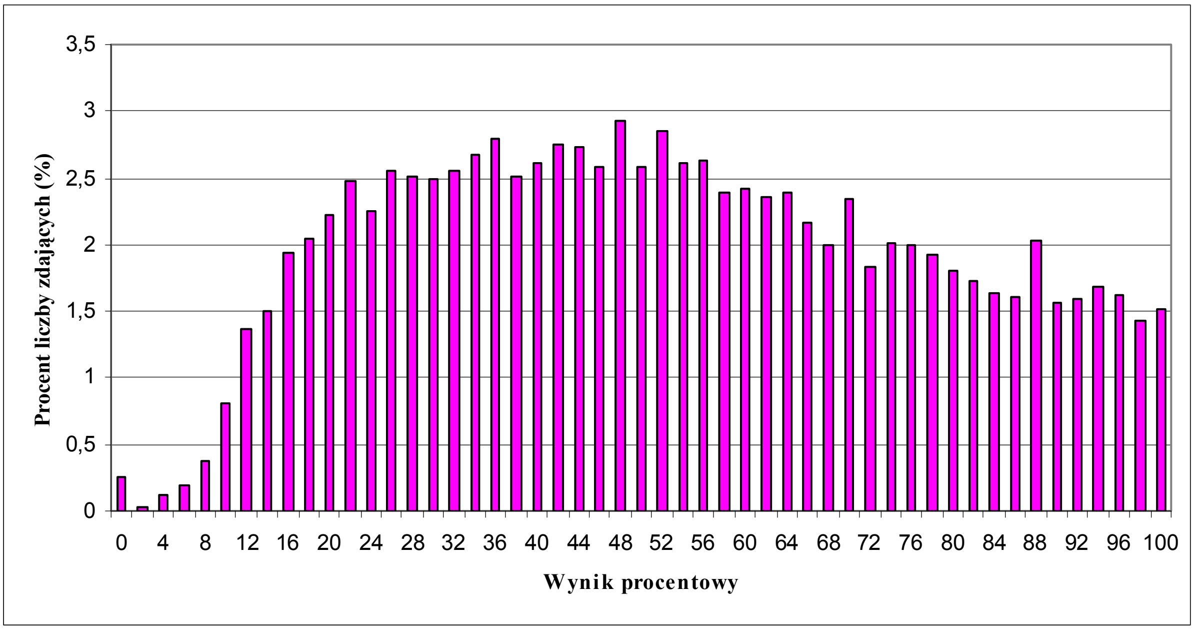
<table>
<tr><td colspan="3">Termin egzaminu</td><td>5 maja 2016 r.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Czas trwania egzaminu</td><td>170 minut</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba szkół</td><td>274</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba zespołów egzaminatorów</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba egzaminatorów</td><td>181</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba obserwatorów[1] (§ 8 ust. 1)</td><td>14</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Liczba unieważnień[2]</td><td colspan="3">w przypadku:</td></tr>
<tr><td>art. 44zzv pkt 1</td><td>stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>art. 44zzv pkt 2</td><td>wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego</td><td>0</td></tr>
<tr><td>art. 44zzv pkt 3</td><td>zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu</td><td>0</td></tr>
<tr><td>art. 44zzw ust. 1.</td><td>stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego</td><td>20</td></tr>
<tr><td>art. 44zzy ust. 7</td><td>stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu</td><td>0</td></tr>
<tr><td>art. 44zzy ust. 10</td><td>niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">inne</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba wglądów[2] (art. 44zzz)</td><td>47</td></tr>
<tr><td colspan="3">Liczba prac, w których nie podjęto rozwiązania zadań</td><td></td></tr>
</table>

[1] Na podstawie rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 25 czerwca 2015 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu przeprowadzania sprawdzianu, egzaminu gimnazjalnego i egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2015, poz. 959).

[2] Na podstawie ustawy z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (tekst jedn. Dz.U. z 2015, poz. 2156, ze zm.).

4. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających



Wykres 1. Rozkład wyników zdających

Tabela 4. Wyniki zdających – parametry statystyczne*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)	Odsetek sukcesów**
ogółem	**10046**	**0**	**100**	**52**	**53**	**25**	**79**
w tym:							
z liceów ogólnokształcących	6876	0	100	56	56	25	82
z techników	3170	0	100	44	45	21	74
bez dysleksji rozwojowej	9356	0	100	50	53	25	79
z dysleksją rozwojową	690	0	100	54	54	23	84

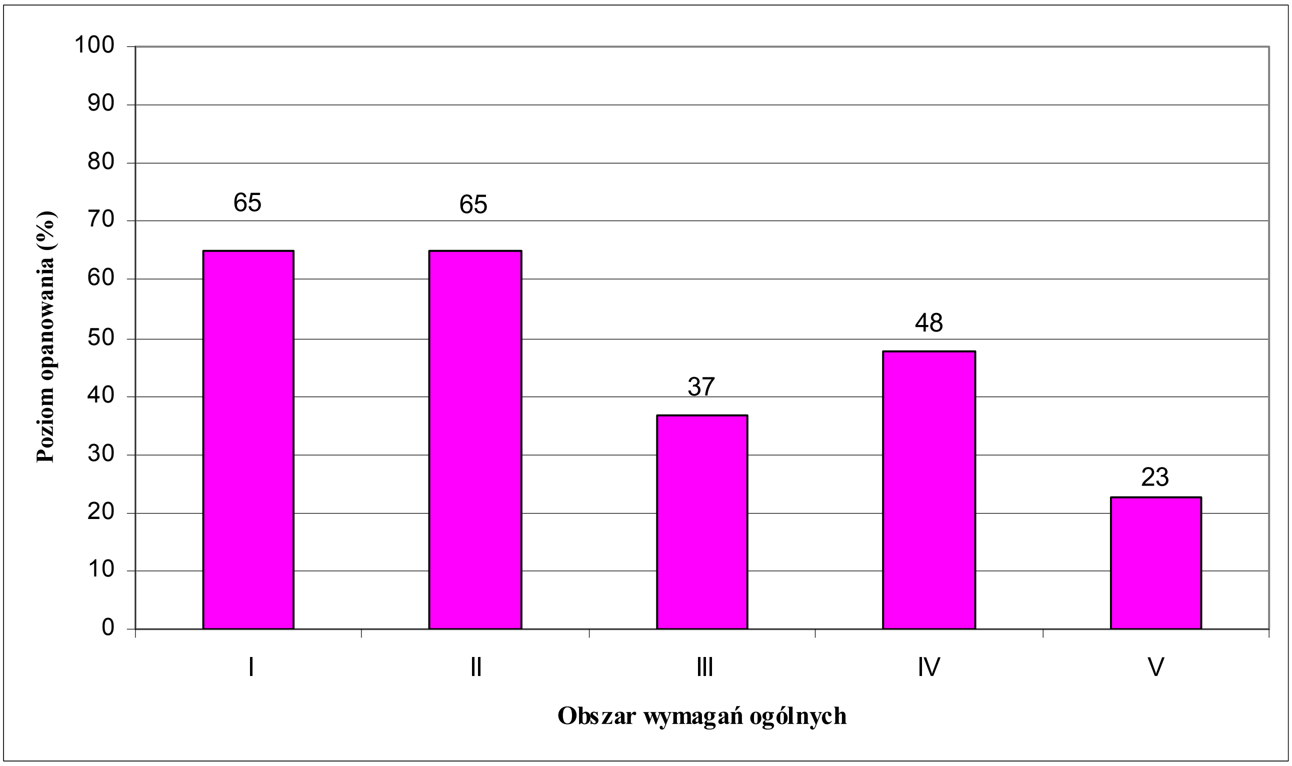
* Parametry statystyczne podane zostały dla grup liczących 100 lub więcej zdających.
** Dane dotyczą tegorocznych absolwentów, którzy przystąpili do wszystkich egzaminów obowiązkowych.

Poziom wykonania zadań

Tabela 5. Poziom wykonania zadań

Numer zadania w arkuszu	Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poziom wykonania zadania (%)
1.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (1.4).	**73**
2.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.6).	**65**
3.	III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (1.9).	**56**
4.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).	**71**
5.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności (3.1).	**67**
6.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych (8.4).	67
7.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym (7.1).	**86**
8.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość (4.2).	**69**
9.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3} = 2$, $\frac{x+1}{x} = 2x$ (3.8).	**70**
10.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji – zbiór wartości (4.3).	**78**
11.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji – punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą (4.3).	**75**
12.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu (4.2).	**57**
13.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (6.2).	**56**
14.	III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).	**67**
15.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	5. Ciągi. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny (5.2).	**63**
16.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów (7.3).	**82**
17.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający, znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego (6.5).	**79**
18.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	SP9. Wielokąty, koła, okręgi. Zdający ustala możliwość zbudowania trójkąta (SP9.2).	**64**
19.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych (7.2).	**57**

20.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.2).	**60**
21.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka (8.6).	**85**
22.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).	**52**
23.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w walcach i stożkach kąty między odcinkami i płaszczyznami (9.3).	**66**
24.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (9.2).	**56**
25.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Zdający wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych (G9.4).	**61**
26.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Zdający wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych (G9.4). 1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia (1.7).	**57**
27.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą (3.5).	**55**
28.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	3. Równania i nierówności. Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$ (3.7).	**60**
29.	V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów (7.3).	**25**
30.	V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).	**20**
31.	III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym oraz wykorzystuje podstawowe własności potęg – również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką (1.6, 1.5).	**30**
32.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	SP9. Wielokąty, koła, okręgi. Zdający stosuje twierdzenie o sumie kątów trójkąta (SP9.3). G7. Równania. Zdający rozwiązuje równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą (G7.3).	**51**
33.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6). G10. Figury płaskie. Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa (G10.7).	**27**
34.	III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).	**28**



Wykres 2. Poziom wykonania zadań w obszarze wymagań ogólnych

Poziom rozszerzony

1. Opis arkusza

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie rozszerzonym zawierał 5 zadań zamkniętych wyboru wielokrotnego, 11 zadań otwartych, w tym 7 zadań krótkiej i 4 zadania rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności opisane w pięciu obszarach wymagań ogólnych podstawy programowej matematyki: **wykorzystanie i tworzenie informacji** (jedno zadanie zamknięte), **wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji** (cztery zadania zamknięte), **modelowanie matematyczne** (trzy zadania otwarte krótkiej odpowiedzi i dwa zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi), **użycie i tworzenie strategii** (dwa zadania krótkiej i dwa rozszerzonej odpowiedzi) oraz **rozumowanie i argumentacja** (2 zadania krótkiej odpowiedzi). Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 50 punktów.

2. Dane dotyczące populacji zdających

Tabela 6. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym*

Liczba zdających		**1955**
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	1287
	z techników	668
	ze szkół na wsi	5
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	334
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	632
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	978
	ze szkół publicznych	1874
	ze szkół niepublicznych	81
	kobiety	656
	mężczyźni	1299

* Dane w tabeli dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 3 zdających − laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

Tabela 7. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach w wersji dostosowanej	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	1
	słabowidzący	1
	niewidomi	0
	słabosłyszący	2
	niesłyszący	0
	ogółem	**4**

3. Przebieg egzaminu

Tabela 8. Informacje dotyczące przebiegu egzaminu

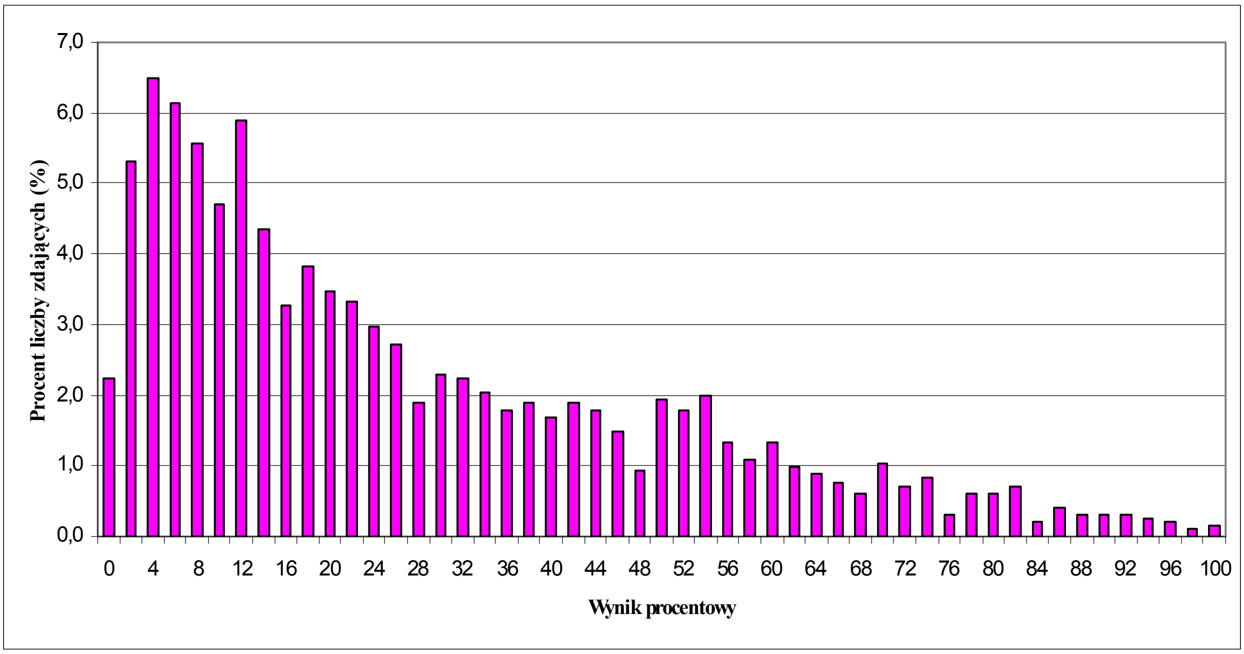
Termin egzaminu			9 maja 2016 r.
Czas trwania egzaminu			180 minut
Liczba szkół			155
Liczba zespołów egzaminatorów			4
Liczba egzaminatorów			88
Liczba obserwatorów[2] (§ 8 ust. 1)			3
Liczba unieważnień[2]	w przypadku:		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	0
	art. 44zzv pkt 3	zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu	0
	art. 44zzw ust. 1.	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu	0
	art. 44zzy ust. 10	niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)	0
	inne		0
Liczba wglądów[2] (art. 44zzz)			12
Liczba prac, w których nie podjęto rozwiązania zadań			0

[1] Na podstawie rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 25 czerwca 2015 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu przeprowadzania sprawdzianu, egzaminu gimnazjalnego i egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2015, poz. 959).

[2] Na podstawie ustawy z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (tekst jedn. Dz.U. z 2015, poz. 2156, ze zm.).

4. Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających



Wykres 3. Rozkład wyników zdających

Tabela 9. Wyniki zdających – parametry statystyczne

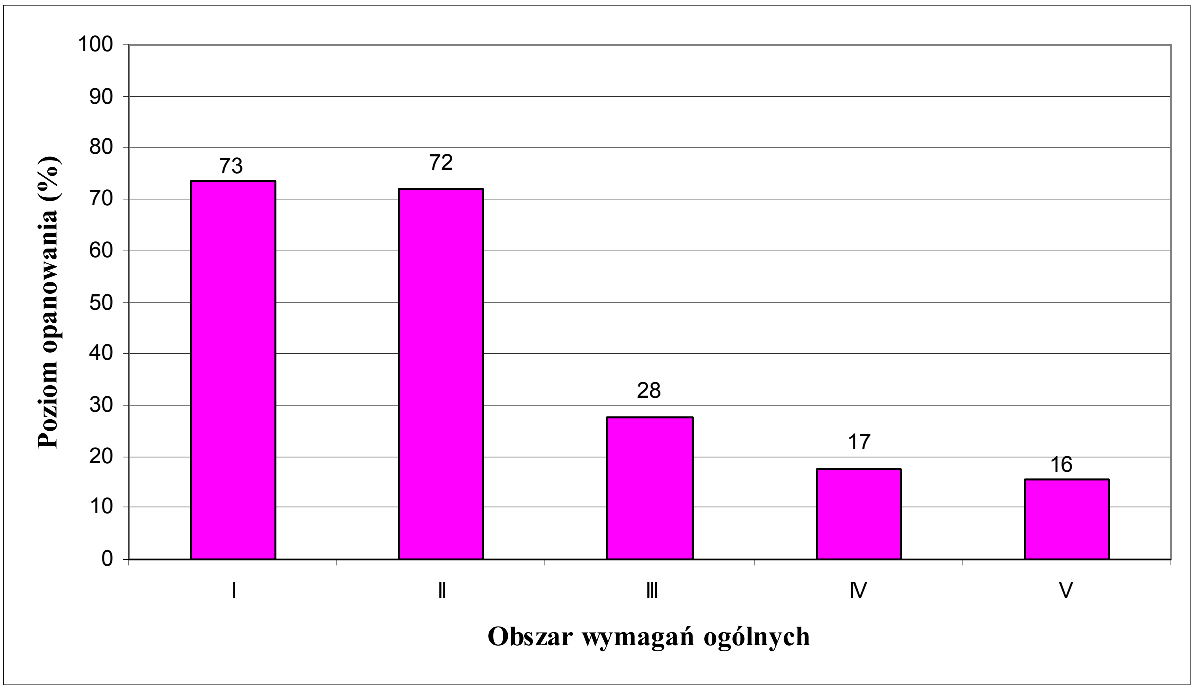
Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
ogółem	**1959**	**0**	**100**	**20**	**27**	**23**
w tym:						
z liceów ogólnokształcących	1288	0	100	30	34	24
z techników	671	0	84	8	13	14

Poziom wykonania zadań

Tabela 10. Poziom wykonania zadań

Numer zadania w arkuszu	Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poziom wykonania zadania (%)
1.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$ (R2.1).	**86**
2.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$ (R3.4).	**71**
3.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = \|f(x)\|$, $y = c \cdot f(x)$, $y = f(cx)$ (R4.1).	**52**
4.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza pochodne funkcji wymiernych (R11.2).	**80**
5.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych (R11.1).	**67**
6.	III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwo warunkowe (R10.2).	**38**
7.	III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy (R5.3).	**29**
8.	V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).	**16**
9.	V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności (R7.4).	**14**
10.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	4. Funkcje. Zdający wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. także osadzonych w kontekście praktycznym) (4.12).	**23**
11.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne oraz posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (R6.6, R6.4).	**24**
12.	III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a, rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem, rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą oraz równania i nierówności z wartością bezwzględną (R3.1, R3.2, 3.5, R3.9).	**30**
13.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt, oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych oraz wyznacza współrzędne środka odcinka (8.3, 8.4, 8.5).	**12**
14.	III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych (R10.1).	**36**

15.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami, stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.4, 9.6).	**16**
16.	III. Modelowanie matematyczne.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6).	**22**



Wykres 4. Poziom wykonania zadań w obszarze wymagań ogólnych

Komentarz

ANALIZA JAKOŚCIOWA ZADAŃ

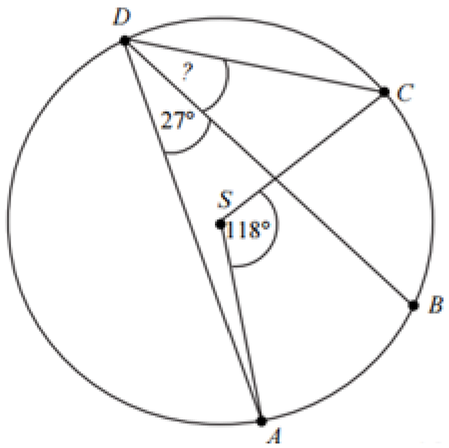
Analiza wyników matury z matematyki na **poziomie podstawowym** pozwala zauważyć, że do najlepiej opanowanych umiejętności należą te, które wymagają zastosowania prostych i często pojawiających się w trakcie nauki własności figur geometrycznych.

Najłatwiejszym zadaniem (poziom wykonania zadania – 86%) okazało się zadanie badające poziom opanowania umiejętności stosowania zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

Zadanie 7. (0–1)

Punkty *ABCD* leżą na okręgu o środku *S* (zobacz rysunek).
Miara kąta *BDC* jest równa

A. $91°$
B. $72{,}5°$
C. $18°$
D. $32°$



Wysoki poziom realizacji tego zadania potwierdza fakt opisany w raporcie po badaniach PIZA, że polscy uczniowie dość dobrze radzą sobie w sytuacjach typowych, a poprawne rozwiązanie w tym zadaniu wynika prawie bezpośrednio z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym, opartych na tym samym łuku okręgu. Nie bez znaczenia jest też zapewne możliwość „odgadnięcia" poprawnej odpowiedzi poprzez porównanie zaproponowanych dystraktorów z miarą zaznaczonego na rysunku kąta *ADB*.

Również bardzo dobrze poradzili sobie maturzyści z rozwiązaniem zadania, w którym trzeba było wykorzystać zależność pomiędzy współrzędnymi środka i współrzędnymi końców tego samego odcinka (poziom wykonania zadania – 85%).

Zadanie 21. (0–1)

W układzie współrzędnych dane są punkty $A=(a,6)$ oraz $B=(7,b)$. Środkiem odcinka *AB* jest punkt $A=(3,4)$. Wynika stąd, że

A. $a=5$ i $b=5$ **B.** $a=-1$ i $b=2$ **C.** $a=4$ i $b=10$ **D.** $a=-4$ i $b=-2$

Konstrukcja tego zadania umożliwiała zastosowanie kilku strategii jego rozwiązania. Oprócz oczywistej, wynikającej z zastosowania znanego wzoru na współrzędne środka odcinka, można było zastosować metodę sprawdzania warunków i po kolei wstawiać zaproponowane wartości *a* i *b*.

Wówczas nie jest potrzebny wspomniany wzór, a wystarczy na przykład sporządzić stosowny rysunek. Zapisy w brudnopisach prac maturalnych potwierdzały stosowanie takiej strategii.

Kolejnym przykładem, potwierdzającym tezę, że maturzyści dość dobrze radzą sobie w sytuacjach typowych jest wysoki poziom wykonania zadania (82%), w którym należało wykorzystać cechy podobieństwa trójkątów i na podstawie informacji, zawartych na rysunku, podać długość boku trójkąta.

Zawarta w treści zadania informacja o podobieństwie trójkątów pozwalała na trafny wybór właściwych narzędzi do rozwiązania przedstawionego problemu. W szczególności, po ustaleniu odpowiedniości boków oraz skali podobieństwa, naturalnym było utworzenie i rozwiązanie prostego równania, wynikającego z twierdzenia o stosunku odpowiednich boków w trójkątach podobnych.

Wysoki poziom wykonania (79%) osiągnęli zdający także w przypadku zadań, sprawdzających opanowanie umiejętności wyznaczania wartości funkcji sinus kąta, dla którego podano wartość funkcji tangens, oraz umiejętności odczytywania z wykresu funkcji jej zbioru wartości.

Na **poziomie rozszerzonym** najłatwiejsze okazały się zadania, w których trzeba było wykazać się umiejętnościami, zapisanymi w podstawie programowej w części wyznaczającej zakres rozszerzony, ale w sytuacjach typowych, odwołujących się do popularnych wzorów lub wymagających zastosowania konkretnego twierdzenia.

Najłatwiejsze okazało się zadanie, wymagające zastosowania wzoru skróconego mnożenia na sześcian sumy, z poziomem wykonania zadania – 86%.

Zadanie 1. (0–1)

W rozwinięciu wyrażenia $\left(2\sqrt{3}x+4y\right)^3$ współczynnik przy iloczynie xy^2 jest równy

A. $32\sqrt{3}$ **B.** 48 **C.** $96\sqrt{3}$ **D.** 144

Dobry wynik uzyskany przez maturzystów w tym zadaniu zakłóca jednak obserwacja po analizie zapisów rozwiązań w brudnopisach. Wielu zdających, poszukując współczynnika przy iloczynie xy^2, obliczało po kolei wszystkie pozostałe współczynniki rozwinięcia wyrażenia $\left(2\sqrt{3}x+4y\right)^3$, co świadczy o mechanicznym stosowaniu wzoru. Takie podejście prowadziło do wykonywania nieprzydatnych obliczeń. Docenić jednak należy skuteczność w poszukiwaniu rozwiązania w przypadku zdecydowanej większości maturzystów.

W zadaniu, wymagającym zastosowania wzoru na pochodną ilorazu funkcji, zdający osiągnęli poziom wykonania – 80%.

Zadanie 4. (0–1)

Funkcja $f(x)=\frac{3x-1}{x^2+4}$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej x. Pochodna tej funkcji jest określona wzorem

A. $f'(x)=\frac{-3x^2+2x+12}{\left(x^2+4\right)^2}$ **B.** $f'(x)=\frac{-9x^2+2x-12}{\left(x^2+4\right)^2}$

C. $f'(x)=\frac{3x^2-2x-12}{\left(x^2+4\right)^2}$ **D.** $f'(x)=\frac{9x^2-2x+12}{\left(x^2+4\right)^2}$

Podstawa programowa nauczania matematyki przewiduje obliczanie pochodnych jedynie z wybranych funkcji, w szczególności z funkcji wielomianowych i wymiernych. Rezultat osiągnięty w tym zadaniu wskazuje, że większość zdających solidnie opanowała umiejętność obliczania pochodnych w tym wyznaczonym zakresie. Tegorocznych maturzystów na ogół cechuje sprawne posługiwanie się popularnymi algorytmami.

W 2016 roku najtrudniejsze na maturze z matematyki okazały się zadania, w których należało wykazać prawdziwość wzoru lub uzasadnić własności figur geometrycznych. Częstą reakcją na samo sformułowanie zawierające polecenie „wykaż” lub „uzasadnij” jest opuszczenie zadania. Liczna grupa zdających w ogóle nie podejmuje próby rozwiązania zadań, wymagających uzasadnienia tezy, z góry rezygnując z możliwości uzyskania punktów za umiejętność rozumowania i argumentacji. Regularnie w egzaminach maturalnych występuje prawidłowość, że dowód z zakresu algebry okazuje się trudniejszy od dowodu geometrycznego.

Oto najtrudniejsze zadanie z matury na **poziomie podstawowym** (poziom wykonania zadania – 20%).

Zadanie 30. (0–2)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n^2 + 2n$ dla $n \geq 1$. Udowodnij, że suma każdych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

Poniżej zamieszczono przykładowe poprawne rozwiązania zadania (przykład 1. i 2.).

Przykład 1.

$a_n = 2n^2 + 2n \qquad n \geq 1 \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$a_{n+1} = 2(n+1)^2 + 2(n+1)$

$2n^2 + 2n + 2(n+1)^2 + 2(n+1) = 2n^2 + 2n +$
$+ 2(n^2 + 2n + 1) + 2n + 2 = 2n^2 + 2n + 2n^2 + 4n + 2 + 2n +$
$+ 2 = 4n^2 + 8n + 4 = 4(n^2 + 2n + 1) = 4(n+1)^2 =$
$= 2^2 \cdot (n+1)^2 = (2(n+1))^2 = (2n+2)^2$

n jest liczbą naturalną różną od 0. Każda liczba naturalna pomnożona przez 2 i ~~k~~ do której po wykonaniu mnożenia dodano cyfrę 2 jest również liczbą naturalną.

Przykład 2.

$a_n = 2n^2 + 2n \quad \text{dla} \quad n \geq 1$

$a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 2n + 2(n+1)^2 + 2(n+1)$
$= 2n^2 + 2n + 2(n^2 + 2n + 1) + 2n + 2$
$= 2n^2 + 2n + 2n^2 + 4n + 2 + 2n + 2$
$= 4n^2 + 8n + 4$
$= (2n+2)^2$

$n \in N$, więc $(2n+2)$ także $\in N$, c.k.d.

Wielu maturzystów nie podjęło w ogóle próby zmierzenia się z problemem zaproponowanym w treści zadania. Z kolei duża grupa zdających popełniła błąd polegający na wnioskowaniu na podstawie analizy sumy sąsiednich wyrazów ciągu w kilku konkretnych przypadkach o własnościach wszystkich wyrazów tego ciągu. Oto przykładowe rozwiązanie zawierające ten błąd.

Przykład 3.

$a_1 = 2\cdot 1^2 + 2\cdot 1 = 4$

$a_2 = 2\cdot 2^2 + 2\cdot 2 = 12$ $\qquad a_1 + a_2 = 16 = 4^2$ +

$a_3 = 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3 = 24$ $\qquad a_2 + a_3 = 36 = 6^2$ +

$a_4 = 2\cdot 4^2 + 2\cdot 4 = 40$ $\qquad a_3 + a_4 = 64 = 8^2$ +

itd będzie zawsze cnd.

Trudnością w tym zadaniu, którą zdający musieli pokonać już na samym początku rozwiązania, było zapisanie w sposób ogólny sumy dwóch kolejnych wyrazów danego ciągu. Niektórzy zdający popełniali błędy rachunkowe przy wyznaczaniu wzorów na kolejne wyrazy ciągu bądź w trakcie przekształcania otrzymanego wyrażenia, określającego sumę dwóch sąsiednich wyrazów. To uniemożliwiało pomyślne zakończenie dowodu (jak w przypadku zilustrowanym w przykładzie 4.).

Przykład 4.

$a_n = 2n^2 + 2n \qquad a_{n+1} = 2n^2 + 1 + 2n + 1 = 2n^2 + 2n + 2$

$a_{n+1} + a_n = 2n^2 + 2n + 2 + 2n^2 + 2n = 4n^2 + 4n + 2$

$\Delta = 4^2 - 4\cdot 4\cdot 2 = -16$

Okazuje się także, że w wielu przypadkach pomimo przebrnięcia przez pierwszy etap rozwiązania, nie udało się zdającym doprowadzić rozumowania do końca. W przykładzie 5. zdający wyznaczył poprawnie wzór na sumę dowolnych sąsiednich wyrazów, która może być zapisana w postaci trójmianu kwadratowego. Jednak tym razem mechaniczne obliczanie wyróżnika trójmianu kwadratowego, popularnej delty (Δ) nie wystarczyło do poprawnego dokończenia rozumowania – pojawiła się wyraźna trudność w opisie istotnych konsekwencji wyróżnika równego 0.

Przykład 5.

$(2n^2 + 2n) + [2(n+1)^2 + 2(n+1)] =$

$= (2n^2 + 2n) + [2(n^2 + 2n + 1) + 2n + 2] = (2n^2 + 2n) + (2n^2 + 4n + 2 + 2n + 2) = 2n^2 + 2n + 2n^2 + 6n + 4 =$

$= 4n^2 + 8n + 4$

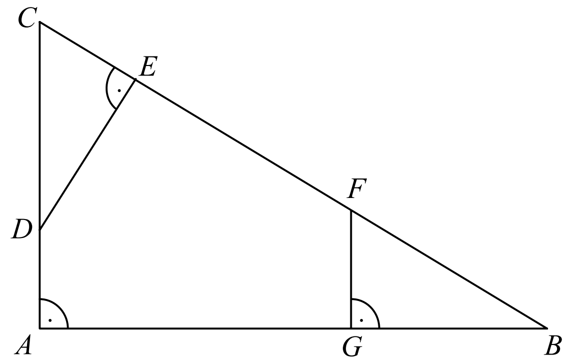
$\Delta = 64 - 4\cdot 4\cdot 4 = 0 \qquad n_1 = \frac{-8}{8} = -1$

Skoro w wyniku dodania wzorów na dwa kolejne ciągi otrzymaliśmy równanie kwadratowe, które może być rozwiązane dla jednej liczby to możemy łatwo z tego wywnioskować, że po wstawieniu w równanie kwadratowe odpowiedniej liczby n da otrzymamy kwadrat liczby naturalnej

Również dowód geometryczny sprawił trudności zdającym, choć tradycyjnie rezultaty, jakie zdający osiągnęli w tym przypadku (poziom wykonania zadania – 25%), są zdecydowanie lepsze niż w przypadku dowodu algebraicznego. Oto treść zadania i poprawne rozwiązania (przykład 6. i 7.).

Zadanie 29. (0–2)

00Dany jest trójkąt prostokątny *ABC*. Na przyprostokątnych *AC* i *AB* tego trójkąta obrano odpowiednio punkty *D* i *G*. Na przeciwprostokątnej *BC* wyznaczono punkty *E* i *F* takie, że $|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle BGF| = 90^\circ$ (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąt *CDE* jest podobny do trójkąta *FBG*.



Przykład 6.

Trójkąt ∆FBG jest podobny ~~ponieważ~~ do ∆ABC ponieważ oba te trójkąty zawierają kąt ∡FBG i są trójkątami prostokątnymi.

Na tej samej zasadzie ∆CDE jest podobny do ∆ABC ponieważ oba te trójkąty są prostokątne i zawierają kąt ∡DCE.

Skoro ∆FBG jest podobny do ∆ABC i ∆CDE jest podobny do ∆ABC to ∆FBG jest podobny do ∆CDE

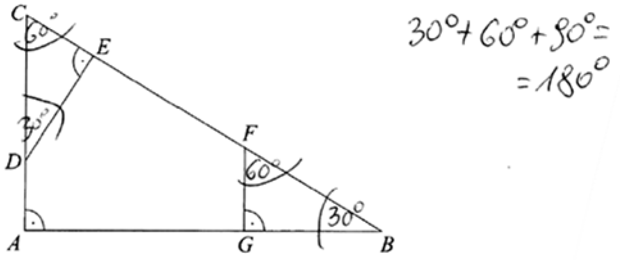
Przykład 7.

Trójkąt ABC jest prostokątny, więc jeśli kąt ∡ACB oznaczę jako α, kąt ∡ABC mogę oznaczyć jako 90°−α (180°−90°−α = 90°−α). Analogicznie kąt ∡EDC wynosi wtedy 90°−α, a kąt ∡GFB wynosi α. Trójkąty CED i BGF mają więc identyczne kąty (90°, α, 90°−α), więc są podobne („kąt-kąt-kąt”), co kończy dowód.

Po analizie rozwiązań zadania zamkniętego z tego samego arkusza maturalnego, w kontekście wielu poprawnych rozwiązań zadania, związanego z podobieństwem trójkątów można by przypuszczać, że umiejętności związane ze stosowaniem cech podobieństwa trójkątów są dobrze opanowane. Okazuje się jednak, że dla maturzystów czym innym jest korzystanie z informacji o tym, że trójkąty są podobne, a czym innym przedstawienie takiej informacji wraz z uzasadnieniem. Szczególnie trudny, w zadaniu wymagającym uzasadnienia podobieństwa figur, był brak konkretnych informacji o miarach kątów ostrych w rozpatrywanych trójkątach. Maturzyści na ogół dobrze operują na konkretach, a znacznie gorzej funkcjonują w sytuacjach takich jak w tym zadaniu, gdy trzeba stwierdzić równość odpowiednich kątów bez podanej w treści zadania informacji o miarach kątów.

Stąd wynikają błędne próby rozwiązania zadania, polegające na ustaleniu konkretnych miar kątów, jak choćby na przykładzie poniżej.

Przykład 8.



Δ EDC ~ Δ FBG (kkk)

Pomimo że zadania z poleceniem typu: uzasadnij, udowodnij, wykaż są elementem arkuszy egzaminacyjnych od wielu lat, w wielu pracach można zauważyć brak doświadczenia przy zapisywaniu rozwiązania zadania tego typu. Zdający niejednokrotnie ma pomysł na rozwiązanie problemu, ale nie komentuje ważnych elementów przedstawionego rozwiązania, co uniemożliwia przyznanie przez egzaminatorów pełnej liczby punktów. W przykładzie 9. zdający nie podał, które kąty w poszczególnych trójkątach mają równe miary ani dlaczego te miary są równe. Przedstawiono tu odwołanie się do przechodniości relacji podobieństwa, ale nie wskazano żadnej pary równych kątów ostrych, co musi być potraktowane jako ominięcie istotnego fragmentu rozumowania.

Przykład 9.

Δ GBF ~ Δ ABC (zasada „kąt, kąt, kąt")
Δ DEC ~ Δ ABC (zasada kąt, kąt, kąt)
z tego wynika, że
Δ DEC ~ Δ FGB

W wielu pracach zdający korzystają z tezy przy dowodzeniu tej tezy, co świadczy o braku zrozumienia istoty dowodu. Oto przykład takiego błędnego rozumowania.

Przykład 10.

$$\frac{|CE|}{|CD|} = \frac{|FG|}{|FB|} \Rightarrow |\sphericalangle C| = |\sphericalangle F|$$
$$\Downarrow$$
$$|\sphericalangle D| = |\sphericalangle B| = \Delta CDE \sim \Delta FBG$$
cechy kkk

Tylko co trzeci maturzysta poprawnie rozwiązał zadanie 34. z rachunku prawdopodobieństwa. Oto poprawne rozwiązania tego zadania (przykład 11. i 12.).

Zadanie 34. (0–4)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie równa 30. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Przykład 11.

Znajdźmy wszystkie pary liczb naturalnych dwucyfrowych, których suma daje 30:

10 20
11 19
12 18
13 17
14 16
15 15 – ~~to zdarzenie~~ ta możliwość odpada, bo losujemy liczby bez zwracania
16 14
17 13
18 12
19 11
20 10

do liczby 21 i większych (od niej) należałoby dodać liczbę jednocyfrową lub byłyby to liczby ≥ 30, zatem to już wszystkie możliwości.

Jest ich 10. Liczb od 10 do 99 jest $99-10+1$, czyli 90.

Wszystkich możliwych zdarzeń jest ~~natomiast~~ zatem $90 \cdot 89$, bo za pierwszym razem możemy wylosować 90 liczb, a za drugim o jedną mniej (o tą, którą wylosowaliśmy najpierw).

$90 \cdot 89 = 8010$

Zatem warunku zadania spełnia 10 z ~~90·89~~ 8010 zdarzeń. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma liczb wylosowanych to 30, wynosi więc $\frac{10}{8010} = \frac{1}{801}$

Przykład 12.

nieskracalnego. 90 liczb dwucyfrowych naturalnych

$\overline{\overline{\Omega}} = 90 \cdot 89$

A – suma wylosowanych liczb będzie równa 30

$\overline{\overline{A}} = \{(10,20), (20,10), (11,19), (19,11), (12,18), (18,12), (13,17), (17,13), (14,16), (16,14), \}$

$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{10}{90 \cdot 89} = \frac{10}{8010} = \frac{1}{801}$

Dla wielu maturzystów już pierwszy, zupełnie elementarny etap rozwiązania tego zadania stał się przekraczającym ich możliwości wyzwaniem. Okazuje się, że stwierdzenie, ile jest naturalnych liczb dwucyfrowych może nie być oczywiste. W ustaleniach pojawiają się wyniki 89, 91, 99 oraz inne, których wystąpienie trudno wytłumaczyć. Bardzo często ustalenie, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90, było ostatnim poprawnym zapisem w rozwiązaniu zadania. Zdający często utożsamiają tę liczbę z liczbą wszystkich zdarzeń elementarnych (przykład 13.).

Przykład 13.

$\overline{\overline{\Omega}} = 9 \cdot 10 = 90$

$\overline{\overline{A}} = \{(10,20)(11,19)(12,18)(13,17)(14,16),$
$(16,14)(17,13)(18,12)(19,11)(20,10)\}$

$\overline{\overline{A}} = 10$

$P(A) = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$

W przypadku części zdających dało się zauważyć popełnianie błędu, polegającego na kreowaniu sprzeczności w przedstawianym modelu przestrzeni probabilistycznej, pomimo poprawnego wyznaczenia liczby wszystkich wyników losowania, o którym mowa w zadaniu. Na przykład przy obliczaniu, ile jest wszystkich zdarzeń elementarnych, zdający nie uwzględniali kolejności losowanych liczb, a przy zliczaniu wyników sprzyjających danemu zdarzeniu uwzględniali tę kolejność. Ten rodzaj błędu ilustruje przykład 14.

Przykład 14.

90 - ilość liczb dwucyfrowych

$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{90}{2}$ - z 90 liczb losujemy 2 dowolne liczby

$$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{90}{2} = \frac{90!}{2!\cdot 88!} = \frac{90\cdot 89\cdot 88!}{2!\cdot 88!} = 4005$$

A - zdarzenie: losujemy dwie liczby, których suma jest równa 30

A: (10; 20), (11; 19), (12; 18), (13; 17), (14; 16), (16; 14), (17; 13), (18; 12), (19; 11), (20; 10)

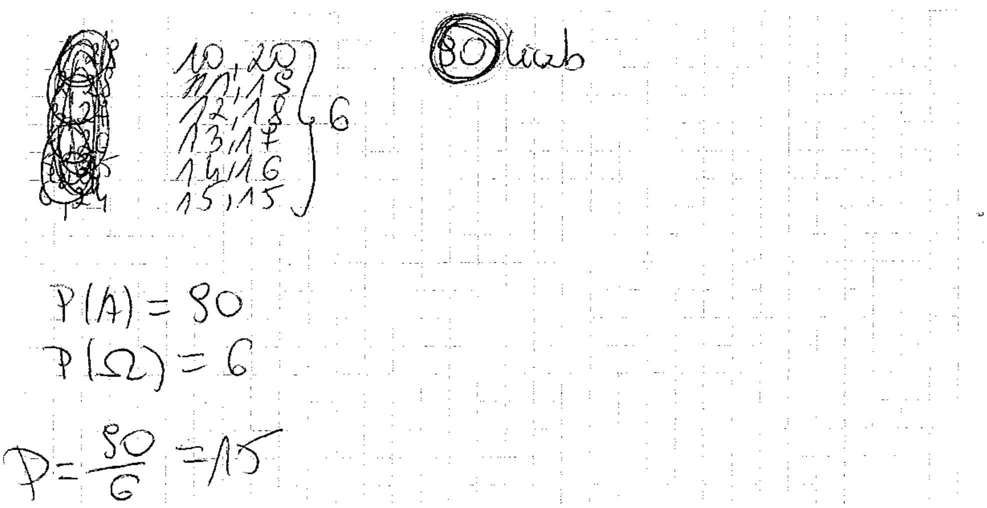
$\overline{\overline{A}} = 10$

P - prawdopodobieństwo wylosowania dwóch liczb, których suma jest równa 30.

$$P = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{10}{4005} = \frac{2}{801}$$

Własności prawdopodobieństwa są dla wielu maturzystów treściami, które nie korespondują z zapisami w prezentowanych przez nich rozwiązaniach. W wielu pracach zdający w wyniku obliczenia prawdopodobieństwa otrzymuje, jako wynik końcowy, liczbę większą niż jeden. Elementarna własność prawdopodobieństwa, jaką jest jego wartość z przedziału liczbowego $\langle 0,1 \rangle$, powinna prowadzić do natychmiastowej weryfikacji rozumowania, w przypadku uzyskania wyniku spoza wspomnianego zakresu liczbowego. Tymczasem brak sensowności otrzymanego wyniku nie prowadzi niektórych zdających do żadnej refleksji. Poniżej przykład 15., ilustrujący taką sytuację.

Przykład 15.



Na **poziomie rozszerzonym** najwięcej trudności tegoroczni maturzyści mieli z rozwiązaniem zadania 13., sprawdzającego opanowanie umiejętności z zakresu geometrii na płaszczyźnie kartezjańskiej. Szczegółowe omówienie tego zadania zamieszczamy w dalszej części niniejszego opracowania.

Również zadanie 9., wymagające przeprowadzenia rozumowania z wykorzystaniem własności podobieństwa figur w planimetrii, miało bardzo niski poziom wykonania – 14%.

Zadanie 9. (0–3)
Dany jest prostokąt *ABCD*. Okrąg wpisany w trójkąt *BCD* jest styczny do przekątnej *BD* w punkcie *N*. Okrąg wpisany w trójkąt *ABD* jest styczny do boku *AD* w punkcie *M*, a środek *S* tego okręgu leży na odcinku *MN*, jak na rysunku. **Błąd! Nie można odnaleźć źródła odwołania.** Wykaż, że $\lvert MN \rvert = \lvert AD \rvert$.

Duża część zdających, także ci, którzy dobrze sobie radzili przy rozwiązywaniu innych zadań, nie potrafiła znaleźć właściwej drogi do wykazania równości odcinków *MN* i *AD*. Warto podkreślić natomiast, że ogromna większość spośród tych maturzystów, którzy uzyskali choćby niewielki postęp w rozwiązaniu zadania, doprowadzała swoje rozumowanie do końca.

Dowód algebraiczny również nie był łatwym zadaniem. Świadczy o tym niski poziom wykonania zadania – 16%.

Zadanie 8. (0–3)
Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2 + y^2 = 2$, prawdziwa jest nierówność $x + y \leq 2$.

W przypadku tego zadania wielu zdających, po kilku nieudanych próbach równoważnych przekształceń tezy, rezygnowało z dalszych poszukiwań rozwiązania. Przy tym zadaniu w arkuszach egzaminacyjnych wystąpiły dość chaotyczne zapisy prób rozwiązań, co sygnalizuje konieczność wprowadzenia większej liczby zadań tego typu do procesu edukacji przyszłych maturzystów. Absolwenci liceów i techników dysponują na ogół sporym zasobem narzędzi matematycznych, pozwalających uzasadnić prawdziwość wzorów z zakresu algebry. Tymczasem bardzo popularne okazało się podjęcie decyzji o rezygnacji z doboru odpowiedniego rozumowania do uzasadnienia tezy z treści zadania. Większość zdających opuściła zadanie lub nie potrafiła zapisać właściwych przekształceń, które prowadziłyby do wykazania prawdziwości własności sumy dwóch liczb na podstawie informacji o sumie kwadratów tych liczb.

Zadanie 15. dotyczące zagadnień ze stereometrii również należało do trudnych.

Zadanie 15. (0–6)
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym *ABCDS* o podstawie *ABCD* wysokość jest równa 5, a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa ma miarę $120°$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zdający, którzy podjęli próbę rozwiązania tego zadania, mieli kłopot już w początkowej fazie rozwiązywania zadania. Duża część zdających miała trudności z wykonaniem przydatnej do przeprowadzania rozumowania ilustracji graficznej. Część zdających ujawniła brak zrozumienia pojęcia kąta między sąsiednimi ścianami. Ponadto w gronie zdających, którzy przebrnęli przez etap tworzenia rysunku i interpretacji kąta dwuściennego, większość miała problem z zaplanowaniem kolejnych kroków, prowadzących do poszukiwania odpowiedzi na postawione pytanie. W szczególności trudno było zdającym wyznaczyć wielkości potrzebne do obliczenia objętości ostrosłupa. Stosowanie algorytmów, nawet złożonych, jest dla maturzystów znacznie łatwiejsze niż samodzielne opracowanie strategii postępowania, a takiego samodzielnego wyboru strategii wymagało zadanie, dotyczące własności figur w geometrii przestrzennej.

Problemy „pod lupą"

MATEMATYCZNE MODELOWANIE RZECZYWISTOŚCI

Możliwość zastosowania matematyki jako narzędzia, umożliwiającego poznanie otaczającego środowiska i pozwalającego na opisanie rzeczywistych zagadnień za pomocą pojęć i reguł matematycznych – to jeden z ważnych powodów powszechnego nauczania tego przedmiotu. Rozumieją to także sami uczniowie, często powtarzający argumenty na rzecz konieczności przekazywania szczególnie takiego zakresu wiedzy czy umiejętności, który pozostaje w ścisłym związku z konkretami i ma przełożenie na sytuacje realne. Umiejętność opisu rzeczywistości z wykorzystaniem modelu matematycznego to jednak wciąż dla wielu ludzi wchodzących w dorosłe życie sfera nieosiągalna.

W arkuszu maturalnym z matematyki dla poziomu podstawowego znalazło się zadanie z treścią, której większą część stanowi tekst popularnonaukowy. W zadaniu tym podano wzór opisujący rzeczywiste zjawisko.

Zadanie 31. (0–2)
Skala Richtera służy do określania siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest wzorem $R = \log \dfrac{A}{A_0}$, gdzie A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, $A_0 = 10^{-4}$ cm jest stałą, nazywaną amplitudą wzorcową. 5 maja 2014 roku w Tajlandii miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 6,2 w skali Richtera. Oblicz amplitudę trzęsienia ziemi w Tajlandii i rozstrzygnij, czy jest ona większa, czy – mniejsza od 100 cm.

Aby rozwiązać zadanie, należało wstawić do podanego wzoru odpowiednie wartości liczbowe, występujące w treści zadania oraz zastosować odpowiednie własności logarytmu i potęgowania, które zdający mogą odnaleźć w dopuszczonym do wykorzystania w trakcie matury zestawie wzorów matematycznych. Oto przykładowe poprawne rozwiązania zadań, przedstawione przez tegorocznych maturzystów (przykłady 16. i 17.).

Przykład 16.

$\log_a c = b \Rightarrow a^b = c$

$R = \log \frac{A}{A_0}$

$6{,}2 = \log \frac{A}{10^{-4}}$

$6{,}2 = \log_{10} A - \log_{10} 10^{-4}$

$6{,}2 = \log_{10} A - (-4)$

$6{,}2 = \log_{10} A + 4$

$2{,}2 = \log_{10} A$

$10^{2{,}2} = A \Rightarrow A > 100$, ponieważ

$10^2 < 10^{2{,}2}$ $\quad 10^2 = 100$

Odpowiedź: Obliczona amplituda wynosi 2,2 ; jest większa od 100 cm.

Przykład 17.

$6{,}2 = \log \frac{A}{10^{-4}}$

$6\frac{2}{10} = \log \frac{A}{10^{-4}}$

$\frac{62}{10} = \log_{10} \frac{A}{10^{-4}}$

$10^{\frac{62}{10}} = \frac{A}{10^{-4}} \quad / \cdot 10^{-4}$

$10^{6{,}2} \cdot 10^{-4} = A$

$A = 10^{6{,}2-4} = 10^{2{,}2}$

$A = 10^{2{,}2} = 10^{\frac{11}{5}} > 100\,cm$

większa niż 100cm

Dla wielu zdających rozwiązanie zadania nie mogło zakończyć się sukcesem, ponieważ mieli poważne trudności z podstawieniem odpowiednich wartości do wzoru. W zamieszczonych przykładowych rozwiązaniach (przykład 18. i 19.) pomylono siłę trzęsienia ziemi z amplitudą trzęsienia ziemi.

Przykład 18.

$R = \log \frac{A}{A_0}$ ← amplituda trzęsienia (cm)

$A_0 = 10^{-4}$ cm

$R = \log \frac{6,2}{10^{-4}} =$ siła = 6,2

$R = \log_{10} \frac{6,2}{10^{-4}} = \log_{10} 6,2 - \log_{10} 10^{-4}$

$= \log_{10} 6,2 - \log_{10} 0,0001 =$

$= \log_{10} 6,1999$

$\cancel{10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000}}$

$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0,0001$

$\log_{10} 6,1999 = 10$

$\log_{10} 6,1999 = b$

$\log_{10} 6,2 = b$

$10^b = 6,2$

$10b = \frac{6,2}{10}$

$b = 0,62$

$-3,8^{-4} = 3\frac{8}{10}^{-4}$

$-3,8^{-4} = \frac{1}{3,8^4}$

$=$

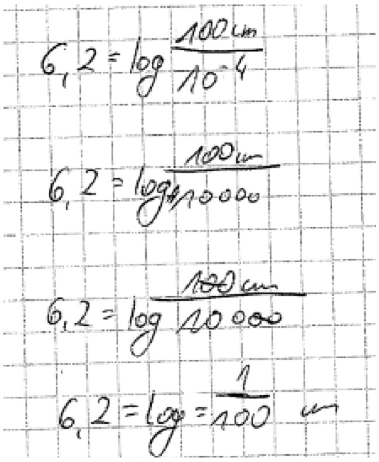
Przykład 19.

$R = \log \frac{6,2}{A_0} = \log \frac{6,2}{10^{-4}} = \frac{6,2}{10^{\frac{1}{4}}} =$

$= 6,2 \cdot 10^4 = 6,2 \cdot 10000 =$

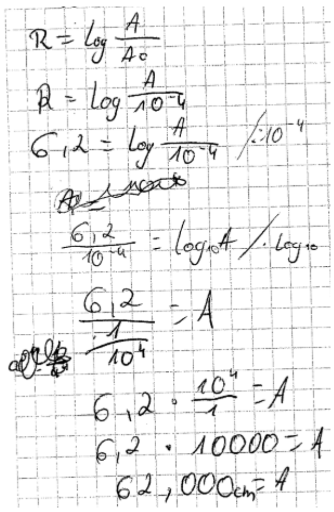
Innym charakterystycznym błędem było umieszczanie we wzorze w miejscu amplitudy trzęsienia ziemi wartości liczbowej, z którą należało ową amplitudę porównać. Oto przykładowe błędne podejście do rozwiązania problemu.

Przykład 20.



Duża część zdających nie mogła poprawnie odnieść się do sformułowanego w zadaniu zagadnienia, ponieważ nie przyswoiła pojęcia logarytmu lub nie potrafiła zastosować elementarnych własności logarytmu. Przykłady przedstawione poniżej świadczą o tym, że mianownik ułamka, stanowiącego liczbę logarytmowaną, może być postrzegany jako liczba niezwiązana z logarytmem. Według części zdających, dzięki wymnożeniu obu stron nierówności przez mianownik liczby logarytmowanej, można pominąć mianownik liczby logarytmowanej. Dodatkowo w przykładzie 21. ujawniono, że sam symbol „log" może być traktowany jako liczba/zmienna, przez którą można mnożyć obie strony równania. Również w tym przykładzie utożsamianie „log10" (tj. symbolu logarytmu bez liczby logarytmowanej) z „log10" (czyli z liczbą 1) świadczy o tym, że zrozumienie, czym jest logarytm, może okazać się nie lada wyzwaniem. Dla sporej części absolwentów szkół, w których edukacja kończy się egzaminem maturalnym, logarytm pozostaje jedynie nic nieznaczącym, skomplikowanym zapisem symbolicznym.

Przykład 21.



Przykład 22.

$Q = \log \frac{A}{A_0}$ $\quad$ A – amplituda

$A_0 = 10^{-4}$ cm

$6{,}2 = \log \frac{A}{10^{-4}} \quad | \cdot 10^{-4}$

$620000 = \log A$

$62\,0000 = \log_{10} A$

Często w arkuszach maturalnych, wypełnionych przez zdających, którzy podjęli próbę rozwiązania omawianego zadania, można zauważyć wypisanie wszystkich potrzebnych do rozwiązania zadania wzorów i równocześnie brak jakiegokolwiek poprawnego połączenia ich z konkretnymi danymi. Taka sytuacja była popularna także w przypadku uczniów, którzy bez szczególnych trudności rozwiązali większą część zadań z arkusza maturalnego. Dla absolwentów liceów i techników matematyka okazała się sferą oderwaną od rzeczywistych zjawisk. Jest to ważny sygnał, że nauczanie matematyki nie powinno być jedynie ćwiczeniem w posługiwaniu się algorytmami i wzorami, a zapisy symboliczne nie mogą stanowić wyłącznie abstrakcyjnego opisu pojęć lub działań matematycznych.

GEOMETRIA NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

Inaczej niż w poprzednich latach najtrudniejszym zadaniem maturalnym z matematyki nie było zadanie wymagające dowodu czy przeprowadzenia rozumowania uzasadniającego sformułowaną w treści zadania tezę. Tym razem najniższy wynik (poziom wykonania zadania – 12%) osiągnęło zadanie z geometrii na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający nie mają większych kłopotów ze stosowaniem własności obiektów geometrycznych w układzie kartezjańskim w sytuacjach, gdy do rozwiązania zadania potrzebna jest pojedyncza umiejętność, pozwalająca na wskazanie właściwej odpowiedzi. Zadania wymagające jedynie wyznaczenia współrzędnych środka odcinka lub obliczenia współrzędnych punktu przecięcia dwóch prostych należą zawsze do najłatwiejszych i najbardziej przez maturzystów lubianych. Jednak zadanie, w którym wymaga się przeprowadzenia kilkuetapowego rozumowania, dla ogromnej większości maturzystów staje się przeszkodą nie do pokonania.

Oto zadanie, które przysporzyło zdającym matematykę najwięcej trudności.

Zadanie 13. (0–5)
Punkty $A = (30, 32)$ i $B = (0, 8)$ są sąsiednimi wierzchołkami czworokąta *ABCD* wpisanego w okrąg. Prosta o równaniu $x - y + 2 = 0$ jest jedyną osią symetrii tego czworokąta i zawiera przekątną *AC*. Oblicz współrzędne wierzchołków *C* i *D* tego czworokąta.

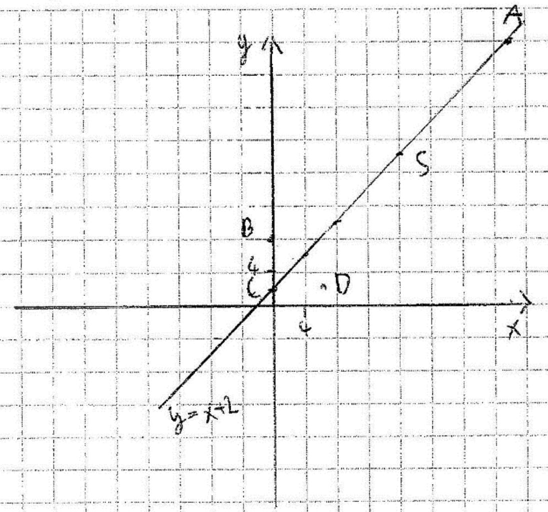
Aby rozwiązać zadanie, należało wykazać się umiejętnościami wyznaczania równania prostej, która jest prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt, obliczania współrzędnych punktu przecięcia dwóch prostych, a także wyznaczania współrzędnych środka odcinka. Należało jednak umiejętnie opracować strategię prowadzącą do znalezienia współrzędnych punktów C i D dwóch sąsiednich wierzchołków deltoidu (tj. czworokąta mającego dokładnie jedną oś symetrii).

Aby obliczyć współrzędne punktu D, który jest obrazem danego punktu B w symetrii osiowej względem danej prostej zawierającej odcinek AC, wystarczyło znaleźć równanie prostej prostopadłej do danej, przechodzącej przez dany punkt, a następnie wyznaczyć współrzędne punktu przecięcia obu prostych. Tak wyznaczony punkt przecięcia prostych jest środkiem odcinka BD, którego jeden z końców podano w treści zadania. Zatem wyznaczenie współrzędnych drugiego końca odcinka przy znanych współrzędnych środka odcinka i pierwszego z końców nie powinno stanowić trudności dla przystępujących do matury, zwłaszcza że ta część rozwiązania wymagała prowadzenia rachunków jedynie na liczbach całkowitych.

Do ustalenia wartości współrzędnych punktu C wystarczyło wyznaczyć współrzędne punktu S – środka okręgu opisanego na deltoidzie, na przykład z wykorzystaniem równości długości odcinków AS i BS, oraz fakt, że punkt S leży na osi symetrii figury. Następnie można było dodatkowo wykorzystać informację o tym, że punkt S jest środkiem odcinka AC lub równość długości odcinków AS i CS. Tym razem rachunki wymagały działań na liczbach wymiernych (ułamki o mianowniku 3).
Z powyższego opisu wynika, że umiejętności niezbędne do rozwiązania zadania nie wykraczały poza zakres podstawowy. Kolejne etapy rozwiązania zaś są naturalną konsekwencją własności obiektów geometrycznych wskazanych w zadaniu.

Poniżej zamieszczono przykładowe poprawne rozwiązania zadania. W przykładzie 23. zdający przedstawił rozwiązanie w ujęciu takim, jak opisano powyżej, w przykładzie 24. zdający wykorzystał równanie okręgu przechodzącego przez punkty ABD do wyznaczenia współrzędnych punktu C.

Przykład 23.



$x - y + 2 = 0$

$y = x+2$

$y = x+2$ – oś symetrii   pkt A leży na tej prostej

czyli pkt C leży na prostej $y = x+2$ a pkt D jest

odbiciem pkt B względem tej prostej

$B = (0,8)$ $y_1 = -x + 8$ $-x + 8 = x + 2$

$6 = 2x$

$3 = x$

czyli   połowa BD z B do $(3;5)$

$D = (6;2)$

$|SA| = |SB|$ $S = (x, x+2)$

$\sqrt{(x)^2 + (-8+x+2)^2} = \sqrt{(30-x)^2 + (32-x-2)^2}$

$x^2 + x^2 - 12x + 36 = 2\cdot(30^2 - 60x + x^2)$

$1800 - 36 = +108x$

$x = \cancel{17\,86}\ \frac{1764}{108} = \frac{49}{3} = 16\frac{1}{3}$

$S = \left(16\frac{1}{3} ; 18\frac{1}{3}\right)$

$|SA| = |SC|$

$30 - 16\frac{1}{3} = 13\frac{2}{3}$

$30 - 2\cdot 13\frac{2}{3} = 30 - 26 - \frac{4}{3} = \cancel{2}\ 2\frac{2}{3}$

$C = \left(2\frac{2}{3} ; 4\frac{2}{3}\right)$

Odpowiedź: $C = \left(2\frac{2}{3} ; 4\frac{2}{3}\right)$, $D = (6;2)$

Przykład 24.

$A(30, 32)$

$B(0, 8)$

czworokąt wpisany w okrąg czyli okrąg jest opisany

zatem sumy ~~~~ miar naprzeciwległych kątów są ~~~~ równe 180°

dlatego $\sphericalangle ABC = 90°$

$\sphericalangle ADC = 90°$

~~~~ $k: x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = x + 2$

$C(x, x+2)$

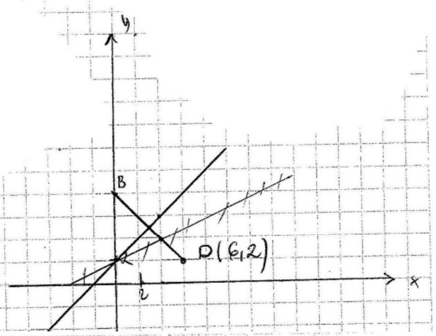
punkty A i B należą do okręgu

prosta k osią symetrii więc $|AB| = |AD|$ i $|BC| = |BD|$

czyli ~~~~ punkt D jest odbiciem B względem prostej k

odczytujemy z układu

że punkt D to $(6, 2)$



$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$$\begin{cases} (30-a)^2 + (32-b)^2 = r^2 \\ (0-a)^2 + (8-b)^2 = r^2 \quad \Rightarrow a^2 + (8-b)^2 = r^2 \\ (6-a)^2 + (2-b)^2 = r^2 \end{cases}$$

$(6-a)^2 + (2-b)^2 = a^2 + (8-b)^2$

~~~~ $36 - 12a + \cancel{a^2} + 4 - 4b + \cancel{b^2} = \cancel{a^2} + 64 - 16b + \cancel{b^2}$

$40 - 12a = 64 - 12b \qquad 12a - 24 = 12b \qquad a - 2 = b$

Prosta przechodząca przez ~~~~ AB to $y = \frac{4}{5}a + 8$

$$\begin{cases} 32 = 30a + b \\ 8 = 0 \cdot a + b \end{cases} \quad b = 8 \quad 32 = 30a + 8 \quad 30a = 24a \quad a = \frac{4}{5}$$

prosta prostopadła przechodząca przez punkt B zawiera punkt C ~~~~ (bo $\sphericalangle ABC = 90°$)

$y = -\frac{5}{4}a + b_1 \qquad 8 = -\frac{5}{4} \cdot 0 + b \qquad b_1 = 8$

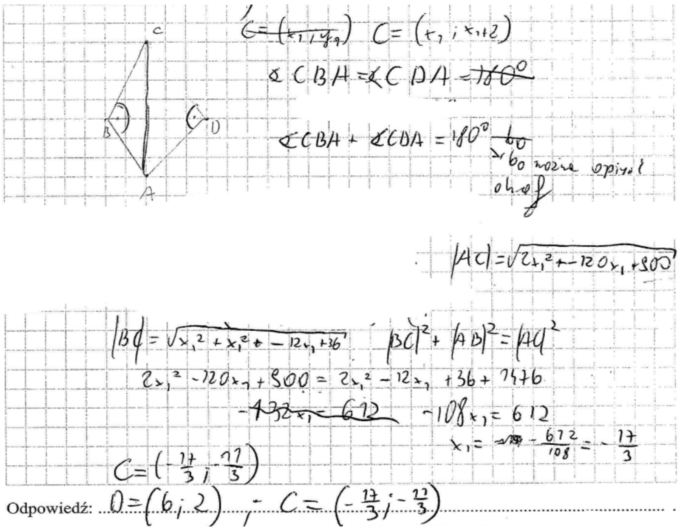
$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -\frac{5}{4}x + 8 \end{cases} \quad x + 2 = -\frac{5}{4}x + 8 \Rightarrow \frac{9}{4}x = 6 \quad x = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

$y = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3} \qquad$ ~~~~ $C\left(\frac{8}{3}, \frac{14}{3}\right)$

Odpowiedź: $C\left(\frac{8}{3}, \frac{14}{3}\right)$, $D(6, 2)$

Do wyznaczenia współrzędnych wierzchołka *C* część zdających korzystała z faktu, że trójkąt *ABC* jest prostokątny (konsekwencja wpisania deltoidu w okrąg). Poniżej przykład takiego rozwiązania (przykład 25.), w którym, długość odcinka AC została policzona błędnie. Zdający zastosował twierdzenie Pitagorasa. Z kolei w przykładzie 26. zdający zapisuje równanie prostej BC, prostopadłej do prostej AB, ale popełnia błąd rachunkowy ($1+\frac{10}{8}=\frac{26}{8}$).

Przykład 25.



$\cancel{C=(x_1;y_1)}$ $C=(x_1;x_1+2)$

$\cancel{\sphericalangle CBA = \sphericalangle CDA = 180^\circ}$

$\sphericalangle CBA + \sphericalangle CDA = 180^\circ$ ~~bo~~ → bo można opisać okrąg

$|AC|=\sqrt{2x_1^2+-120x_1+800}$

$|BC|=\sqrt{x_1^2+x_1^2+-12x_1+36}$ $\quad |BC|^2+|AB|^2=|AC|^2$

$2x_1^2-120x_1+800=2x_1^2-12x_1+36+7476$

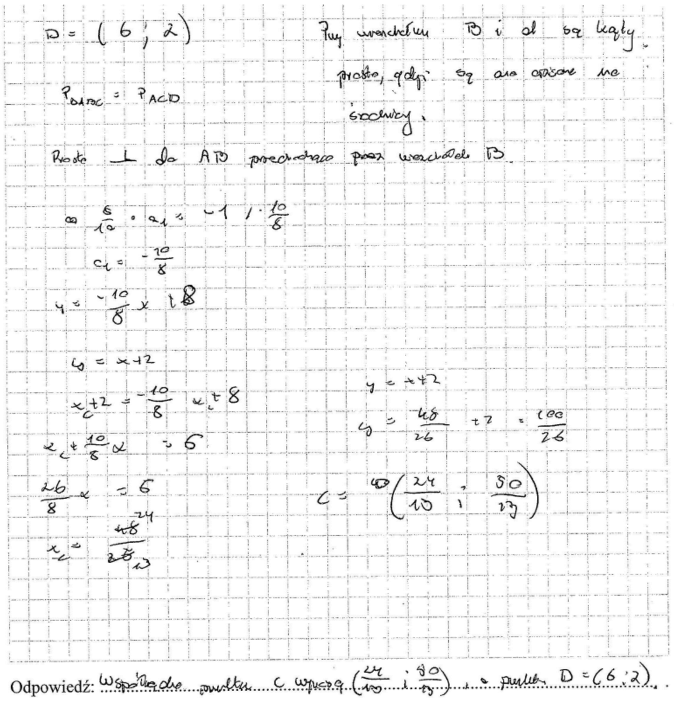
$\cancel{-432x_1=612}$ $\quad -108x_1=612$

$x_1=-\frac{612}{108}=-\frac{17}{3}$

$C=\left(-\frac{17}{3};-\frac{11}{3}\right)$

Odpowiedź: $D=(6;2)$, $C=\left(-\frac{17}{3};-\frac{11}{3}\right)$

Przykład 26.



$D=(6;2)$

Przy wierzchołku B i D są kąty proste, gdyż są one oparte na średnicy.

$P_{\Delta ABC}=P_{ACD}$

Prosta $\perp$ do AB przechodząca przez wierzchołek B.

$\frac{8}{10}\cdot a_1=-1 \;/\cdot\frac{10}{8}$

$a_1=-\frac{10}{8}$

$y=-\frac{10}{8}x+8$

$y=x+2$

$x_C+2=-\frac{10}{8}x_C+8$

$x_C+\frac{10}{8}x=6$

$\frac{26}{8}x=6$

$x_C=\frac{\cancel{48}^{24}}{\cancel{26}_{13}}$

$y=x+2$

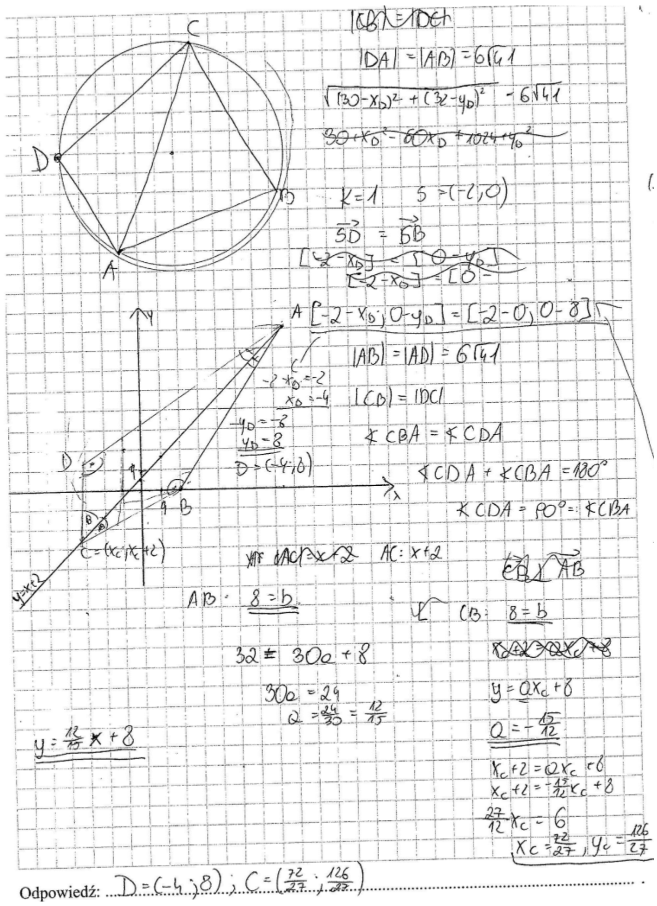
$y=\frac{48}{26}+2=\frac{100}{26}$

$C=\left(\frac{24}{13};\frac{50}{13}\right)$

Odpowiedź: Współrzędne punktu C wynoszą $\left(\frac{24}{13};\frac{50}{13}\right)$, a punktu $D=(6;2)$.

Oprócz błędów rachunkowych maturzyści popełniali też błędy merytoryczne. W poniższym przykładzie zdający umieścił punkt *B* błędnie na osi *Ox*.

Przykład 27.



W kolejnym zamieszczonym tu rozwiązaniu zdający wykorzystał poprawnie fakt występowania kąta prostego przy wierzchołku B i wyznaczył współrzędne punktu C. Niestety, w dalszej części błędnie przyjął, że kąt przy wierzchołku C również jest prosty.

Przykład 28.

$-\frac{5}{4}x + 8 = x + 2$

$-5x + 32 = 4x + 8$

$9x = 24$

$x = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$ $\quad y = \frac{14}{3}$

$C\left(\frac{8}{3}, \frac{14}{3}\right)$

prosta $DC \Rightarrow y = \frac{4}{5}x + d$

$\frac{14}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{3} + d$ $\qquad \frac{16}{20} + \frac{25}{20}$

$\frac{14}{3} = \frac{32}{15} + d$

$d = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

$\begin{cases} y = \frac{4}{5}x + \frac{2}{3} \\ y = -\frac{5}{4}x + \frac{139}{2} \end{cases}$ $\qquad y = -\frac{5}{4}x + e$ $\quad |AD|$

$32 = -\frac{5}{4} \cdot 30 + e$

$e = \frac{139}{2} = 69{,}5$

$\frac{4}{5}x + \frac{2}{3} = -\frac{5}{4}x + \frac{139}{2}$

$16x + \frac{40}{3} = -25x + 1390$

$41x = 1390 - \frac{40}{3}$

$123x = 4170 - 40$

$123x = 4130$

$x = 33{,}58$

$y = -27{,}525$

$D = (33{,}58; -27{,}525)$

Odpowiedź: $C\left(\frac{8}{3}, \frac{14}{3}\right)$ $D(33{,}58; -27{,}525)$

Rozwiązania, w których zastosowano poprawne rozumowanie do wyznaczenia jednego wierzchołka i korzystano z błędnych wniosków przy wyznaczaniu drugiego wierzchołka, zdarzały się stosunkowo często. Najbardziej powszechne jednak było opuszczanie zadania, a także brak nawet niewielkiego postępu przy podejmowanych próbach rozwiązania. W przykładzie 29. zdający obliczył jedynie długość odcinka AB. W kolejnym rozwiązaniu (przykład 30.) zdający podjął próbę zapisania prostej prostopadłej do danej, ale przyjął niewłaściwy współczynnik kierunkowy.

Przykład 29.

$A = (30, 32)$

$B = (0, 8)$

$x - y + 2 = 0$

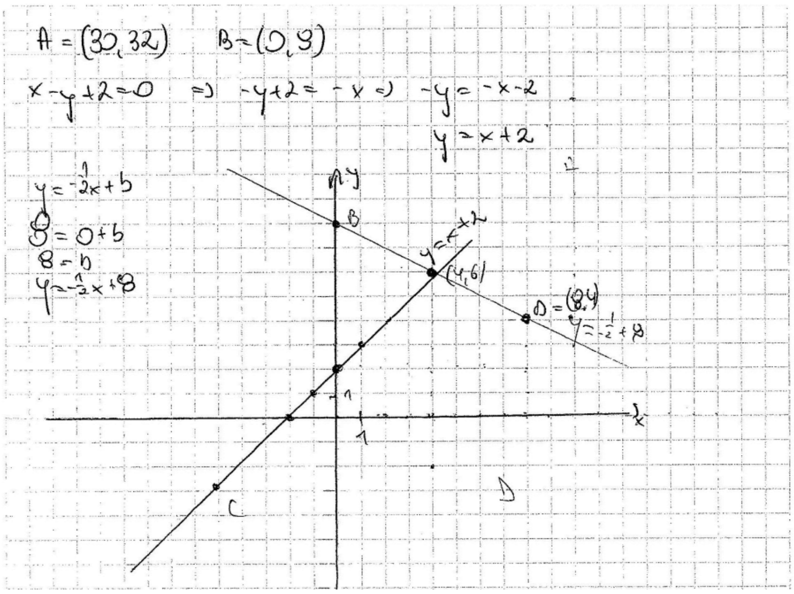
$y = x + 2$

$|AB| = \sqrt{(0-30)^2 + (8-32)^2} =$

$= \sqrt{900 - 576}$

$|AB| = 18$

Przykład 30.



Analiza rozwiązań zadania maturalnego z geometrii analitycznej nie może prowadzić do optymistycznych wniosków. Uzyskany przez maturzystów niski wynik jest ważnym sygnałem dotyczącym konieczności zmiany podejścia do nauczania umiejętności potrzebnych do rozwiązywania zagadnień geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Wnioski i rekomendacje

Egzamin maturalny z matematyki na **poziomie podstawowym** potwierdził, że zadania sprawdzające pojedyncze, nieskomplikowane, umiejętności na ogół nie sprawiają trudności absolwentom liceów i techników. W tym roku najlepsze wyniki zdający uzyskali za zadania geometryczne. W skali kraju 86% zdających poprawnie zastosowało zależność między kątem środkowym i kątem wpisanym, przy czym dodać należy, że w zadaniu trzeba było też wykazać się znajomością własności kątów wierzchołkowych i znajomością sumy miar kątów w trójkącie. Wysoki odsetek maturzystów (85%) potrafi wykorzystać fakt, że współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych końców odcinka. Ustalenie miar długości odcinków w figurach podobnych, zwłaszcza, jeśli rozważana sytuacja przedstawiona jest na rysunku, również nie stanowi problemu dla zdecydowanej większości zdających. Wysoki odsetek zdających, którzy poprawnie wyznaczyli wartość funkcji sinus przy danym tangensie tego samego kąta, a także tych, którzy poprawnie odczytali z rysunku zbiór wartości funkcji, potwierdzają, że rozwiązanie zadania w przypadku, gdy możliwe jest wykorzystanie graficznej interpretacji pojęć, najczęściej kończy się sukcesem.

Na **poziomie rozszerzonym** szczególnie dobre rezultaty zdający uzyskali w zadaniach, wymagających jedynie zastosowania wzorów, co potwierdzili w sytuacjach, sprawdzających znajomość wzorów skróconego mnożenia i na funkcję pochodną.

Tegoroczny egzamin maturalny z matematyki na **poziomie rozszerzonym** ujawnił, że poważny problem stanowi opanowanie przez absolwentów liceów i techników umiejętności z zakresu geometrii na płaszczyźnie kartezjańskiej. Choć pojedyncze umiejętności wydają się być dobrze opanowane przez maturzystów, to rozwiązanie zadania sprawdzającego te same umiejętności, ale w połączeniu z koniecznością przeprowadzenia kilkuetapowego rozumowania i wykorzystania konkretnych własności rozważanych figur geometrycznych jest niemożliwe do zrealizowania w przypadku zdecydowanej większości zdających maturę. Jest to szczególnie niepokojące w sytuacji, gdy na poziomie rozszerzonym najtrudniejszym zadaniem okazuje się takie, które wymaga zastosowania wyłącznie umiejętności, przypisanych w podstawie programowej do poziomu podstawowego i zaplanowania kolejnych kroków poszukiwania rozwiązania. Warto podkreślić, że konieczne w tym zadaniu do wykonania rachunki wymagały jedynie operacji na liczbach całkowitych bądź na ułamkach o jednocyfrowym mianowniku.

Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej nie może być przez uczniów sprowadzona jedynie do zestawu wzorów. Ważne jest, by maturzyści mieli okazję połączyć własności figur geometrycznych z zależnościami, wynikającymi z położenia figury w układzie współrzędnych. Warto zachęcać uczniów do rozwiązywania tych samych problemów w geometrii metodami osadzonymi w tradycyjnej geometrii euklidesowej, jak i na płaszczyźnie kartezjańskiej, by eliminować powstawanie sztucznej bariery, która utrudnia maturzystom opracowanie strategii, wymagającej opisania własności figur geometrycznych z wykorzystaniem współrzędnych punktów i równań, odpowiadających obiektom osadzonym w układzie współrzędnych.

Analiza rozwiązań, przedstawionych w pracach maturalnych z matematyki, pozwala zauważyć także, że często zdający stosują skomplikowane narzędzia w prostych sytuacjach, poszukują odpowiedzi według ściśle wyuczonego algorytmu, nie zważając na to, że rozwiązanie można znaleźć, o wiele łatwiej i szybciej, jeśli wykorzysta się własności konkretnych obiektów matematycznych, na przykład poszukiwanie pierwiastków trójmianu kwadratowego, niezależnie od postaci tego trójmianu, odbywa się z użyciem wyróżnika (liczenie delty), a pozbywanie się mianownika w przypadku nierówności realizowane jest przez mnożenie przez kwadrat wyrażenia z mianownika, nawet w sytuacji, gdy mianownik jest zawsze dodatni. W przypadku zadań geometrycznych zdający często stosują czasochłonne algorytmy i nie mają nawyku poszukiwania takich metod rozwiązania, które pozwalają na znalezienie odpowiedzi w krótkim czasie. Wielu przyszłych maturzystów traktuje matematykę jak zestaw gotowych algorytmów i procedur, których zastosowanie pozwala poprawnie rozwiązać zadania i w konsekwencji zdać egzamin. Stosowanie wyuczonych algorytmów w dążeniu do pozytywnego wyniku egzaminu nie zawsze oznacza dobór trafnych metod do poszukiwania odpowiedzi na postawione pytania. Nauczycielom trudno jest zmienić takie podejście uczniów. Warto jednak, tam gdzie to możliwe, odchodzić w procesie nauczania od stosowania wyłącznie popularnych algorytmów i pokazywać przyszłym maturzystom alternatywne ujęcia zagadnienia, pozwalające na szybsze rozwiązanie problemu.

Do zadań, które sprawiają maturzystom najwięcej trudności, należą te wymagające uzasadnienia prawdziwości twierdzenia lub własności obiektów matematycznych, szczególnie z zakresu algebry. Zadania ze sformułowaniem „uzasadnij, że” są bardzo często pomijane. W przypadku podejmowania próby rozwiązania typowym błędem jest ograniczenie się do sprawdzenia prawdziwości wzoru lub tezy twierdzenia jedynie w konkretnym przypadku. Innym łatwym do zaobserwowania nawykiem jest pomijanie istotnej części rozumowania lub zapisywanie sformułowania w stylu „oczywiste jest…” bez jakichkolwiek komentarzy w kluczowych miejscach przedstawianego uzasadnienia. Zdający powinni mieć świadomość, że stosowanie wyżej wspomnianych zabiegów nie przyczyni się do poprawienia wyniku egzaminu.

Tegoroczny egzamin maturalny z matematyki pozwolił zaobserwować niepokojącą sytuację. Stosunkowo często dało się zauważyć niższy wynik za rozwiązanie problemów typowych niż w przypadku zadań, wymagających opanowania złożonych umiejętności – u tego samego zdającego. Zadania, dotykające elementarnych zagadnień, dla części maturzystów stanowiły punkt wyjścia do komplikowania typowych problemów i wyszukiwania na siłę pułapek, które w rzeczywistości nie występowały. Na przykład zdarzały się prace maturzystów, niemogących zadowolić się rozwiązaniem prostej nierówności trygonometrycznej i prezentujących w zamian nietypowe metody rozwiązań, które wręcz nie mogły doprowadzić do znalezienia właściwej odpowiedzi w typowym zadaniu. W trakcie nauki, także w ramach przygotowania do matury, należy pamiętać, że podstawą sukcesu jest dobre opanowanie umiejętności elementarnych. Skupianie się wyłącznie na poszukiwaniu rozwiązań zagadnień nietypowych może przyczynić się w efekcie do uzyskania rezultatów poniżej potencjalnych możliwości. Takie doświadczenie nie było obce uczniom, którzy zrezygnowali z utrwalania umiejętności mniej wyrafinowanych na rzecz poszukiwania problemów nietypowych.

Warto na koniec podkreślić, że większość maturzystów potrafiła poprawnie rozwiązać zadania, wymagające zastosowania konkretnego wzoru i odwołujące się do pojedynczych umiejętności, zapisanych w podstawie programowej. Chętnie, i na ogół poprawnie, rozwiązywane były przez maturzystów zadania, w których zamieszczono rysunek oraz takie, w których sporządzenie rysunku ułatwiało rozwiązanie. Trzeba zaznaczyć, że do zadań z dobrym wynikiem należały też takie, które wymagały przeprowadzenia krótkiego rozumowania lub połączenia kilku własności obiektów matematycznych. Daje się jednak zauważyć, że te same osoby, który uzyskują dobry wynik na maturze z poziomu podstawowego, nie potrafią rozwiązać większości zadań z poziomu rozszerzonego. W procesie edukacji ważne jest, by kształceniu umiejętności z poziomu rozszerzonego nadać równorzędne znaczenie jak utrwalaniu umiejętności z poziomu podstawowego.