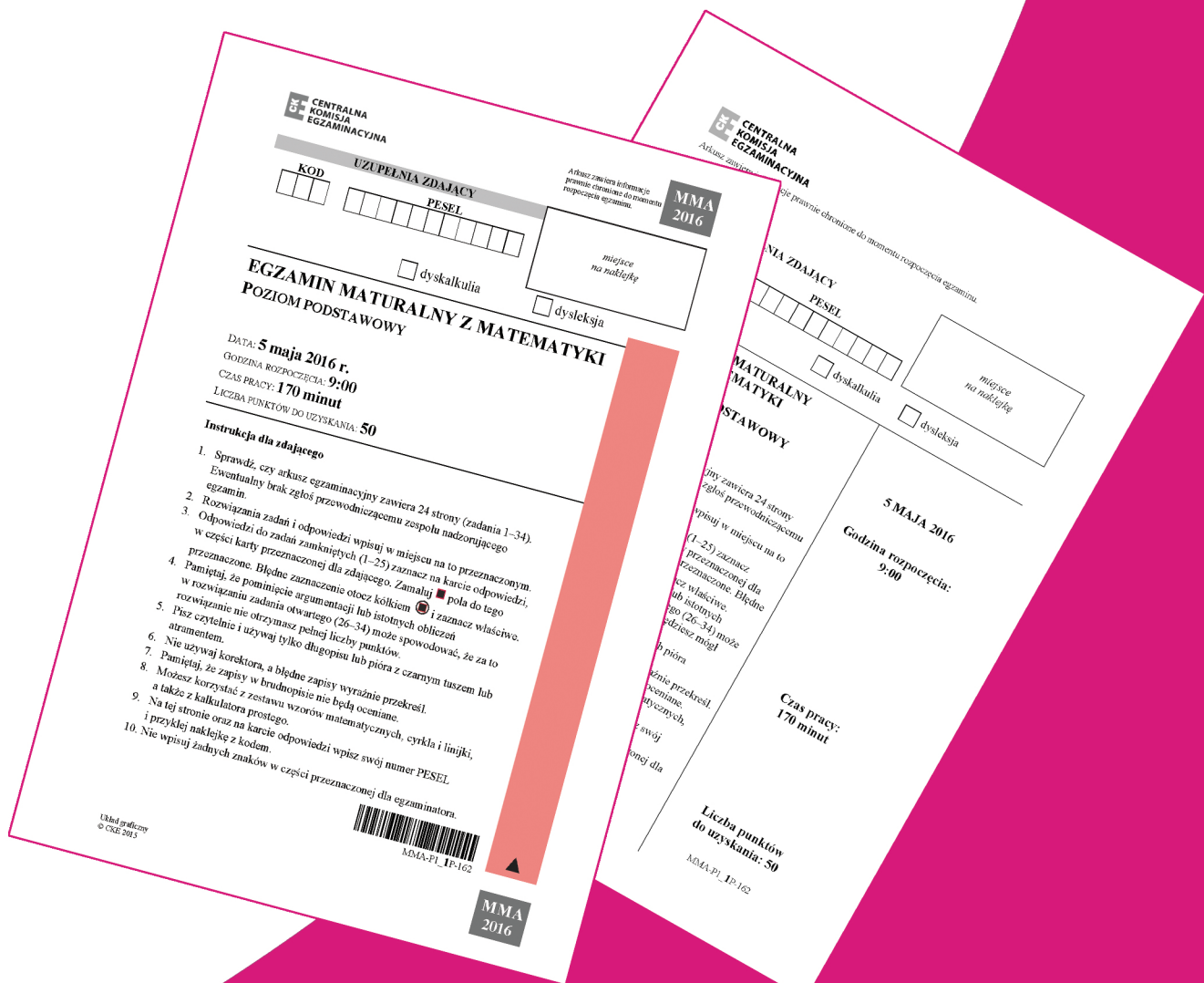


# Sprawozdanie z egzaminu maturalnego 2016

# Matematyka



**Opracowanie**

Józef Daniel (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Piotr Ludwikowski (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie)

Maria Pająk-Majewska (Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku)

**Redakcja**

dr Wioletta Kozak (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

**Opracowanie techniczne**

Bartosz Kowalewski (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

**Współpraca**

Beata Dobrosielska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Agata Wiśniewska (Centralna Komisja Egzaminacyjna)

Pracownie ds. Wyników Egzaminacyjnych okręgowych komisji egzaminacyjnych

# Matematyka

## Poziom podstawowy

### 1. Opis arkusza

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie podstawowym składał się z 25 zadań zamkniętych wyboru wielokrotnego oraz 9 zadań otwartych, w tym 6 zadań krótkiej odpowiedzi i 3 zadań rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności opisane w pięciu obszarach wymagań ogólnych podstawy programowej matematyki: **wykorzystanie i tworzenie informacji** (pięć zadań zamkniętych i jedno zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi), **wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji** (czternaście zadań zamkniętych i dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi), **modelowanie matematyczne** (dwa zadania zamknięte, jedno zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi i jedno zadanie otwarte rozszerzonej odpowiedzi), **użycie i tworzenie strategii** (cztery zadania zamknięte, dwa zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi) oraz **rozumowanie i argumentacja** (dwa zadania otwarte krótkiej odpowiedzi). Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 50 punktów.

### 2. Dane dotyczące populacji zdających

Tabela 1. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym\*

Liczba zdających		261 216
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	171 803
	z techników	89 413
	ze szkół na wsi	10 325
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	50 173
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	98 678
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	102 040
	ze szkół publicznych	243 495
	ze szkół niepublicznych	17 721
	kobiety	144 287
	mężczyźni	116 929
	bez dysleksji rozwojowej	240 830
	z dysleksją rozwojową	20 386

\* Dane w tabeli dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 77 uczniów – laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

Tabela 2. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach w wersji dostosowanej	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	291
	słabowidzący	348
	niewidomi	25
	słabosłyszący	268
	niesłyszący	179
	<b>ogółem</b>	<b>1111</b>

### 3. Przebieg egzaminu

Tabela 3. Informacje dotyczące przebiegu egzaminu

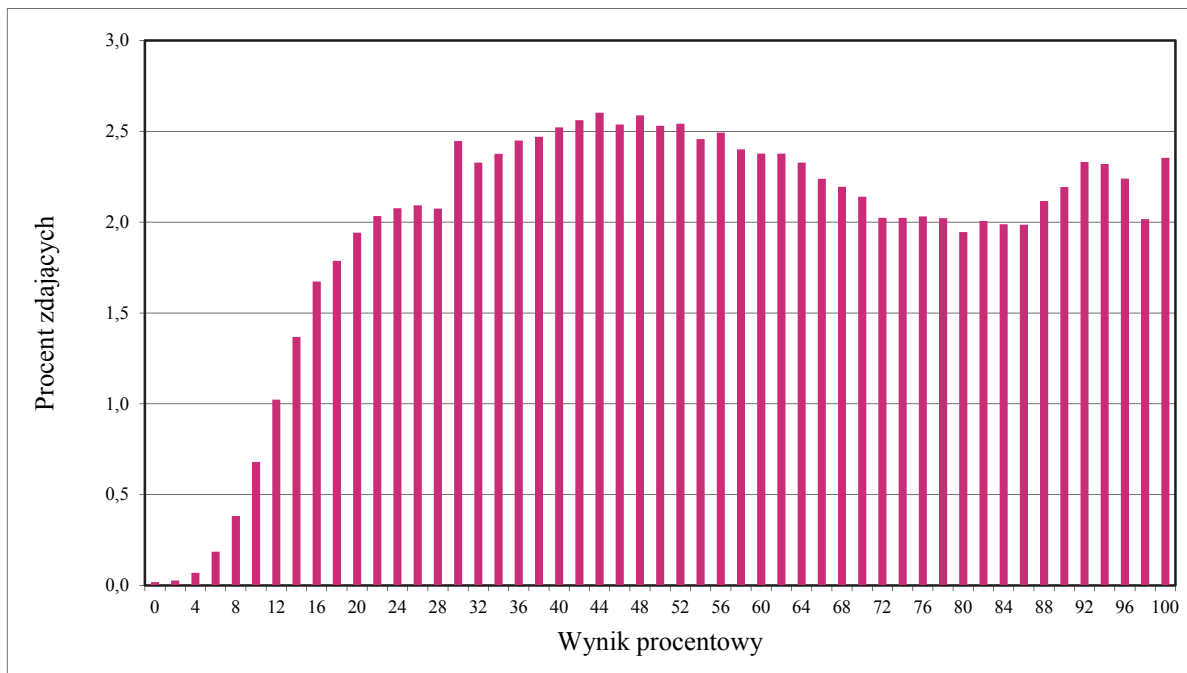
Termin egzaminu		5 maja 2016 r.	
Czas trwania egzaminu		170 minut	
Liczba szkół		5242	
Liczba zespołów egzaminatorów		304	
Liczba egzaminatorów		6252	
Liczba obserwatorów <sup>1</sup> (§ 8 ust. 1)		298	
Liczba unieważnień <sup>2</sup>	w przypadku:		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	7
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	10
	art. 44zzv pkt 3	zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu	0
	art. 44zzw ust. 1.	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	36
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu	7
	art. 44zzy ust. 10	niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)	0
	inne	3	
Liczba wglądów <sup>2</sup> (art. 44zzz)		1954	
Liczba prac, w których nie podjęto rozwiązania zadań		40	

<sup>1</sup>Na podstawie rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 25 czerwca 2015 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu przeprowadzania sprawdzianu, egzaminu gimnazjalnego i egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2015, poz. 959).

<sup>2</sup>Na podstawie ustawy z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (tekst jedn. Dz.U. z 2015, poz. 2156, ze zm.).

## 4. Podstawowe dane statystyczne

### Wyniki zdających



Wykres 1. Rozkład wyników zdających

Tabela 4. Wyniki zdających – parametry statystyczne\*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)	Odsetek sukcesów**
<b>ogółem</b>	<b>261 216</b>	<b>0</b>	<b>100</b>	<b>56</b>	<b>44</b>	<b>56</b>	<b>25</b>	<b>83</b>
w tym:								
z liceów ogólnokształcących	171 803	0	100	62	100	61	25	87
z techników	89 413	0	100	44	30	46	22	75
bez dysleksji rozwojowej	240 830	0	100	54	44	56	25	83
z dysleksją rozwojową	20 386	0	100	56	42	57	24	86

\* Parametry statystyczne podane zostały dla grup liczących 100 lub więcej zdających.

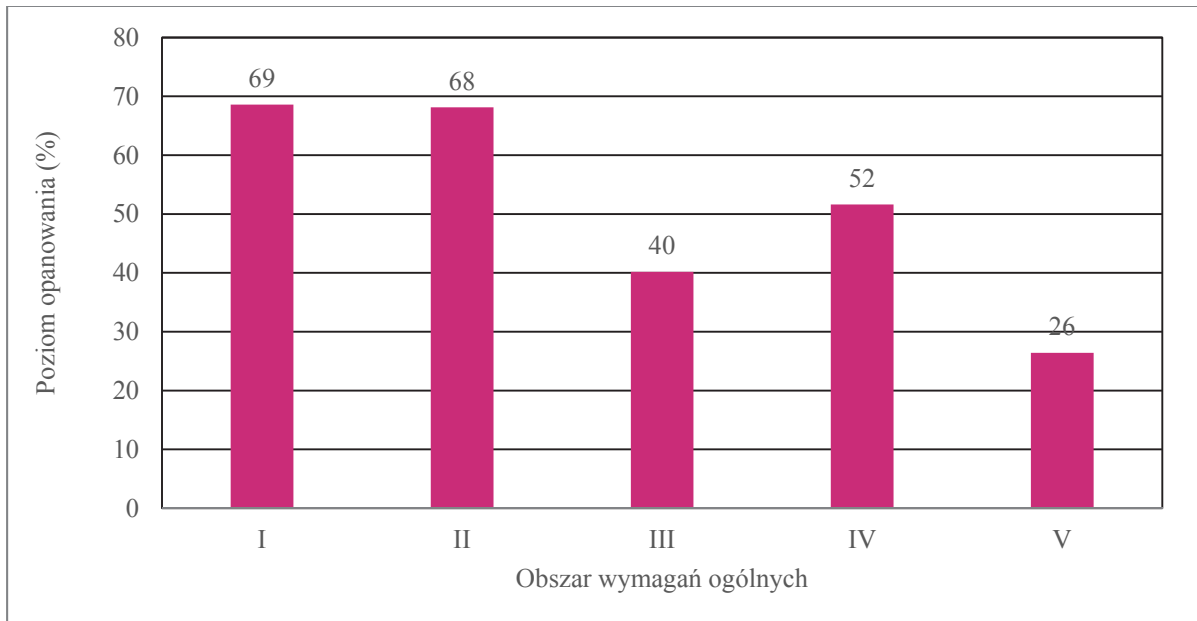
\*\* Dane dotyczą tegorocznych absolwentów, którzy przystąpili do wszystkich egzaminów obowiązkowych.

**Poziom wykonania zadań**

Tabela 5. Poziom wykonania zadań

Numer zadania w arkuszu	Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poziom wykonania zadania (%)
1.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (1.4).	76
2.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.6).	68
3.	III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (1.9).	60
4.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).	73
5.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności (3.1).	70
6.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych (8.4).	71
7.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym (7.1).	88
8.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość (4.2).	72
9.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3} = 2$ , $\frac{x+1}{x} = 2x$ (3.8).	73
10.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji – zbiór wartości (4.3).	81
11.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji – punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą (4.3).	78
12.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu (4.2).	60
13.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (6.2).	58
14.	III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).	69
15.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	5. Ciągi. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny (5.2).	66
16.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów (7.3).	85
17.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający, znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego (6.5).	81
18.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	SP9. Wielokąty, koła, okręgi. Zdający ustala możliwość zbudowania trójkąta (SP9.2).	66
19.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych (7.2).	60

20.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostokątowość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.2).	<b>65</b>
21.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka (8.6).	<b>87</b>
22.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).	<b>53</b>
23.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w walcach i stożkach kąty między odcinkami i płaszczyznami (9.3).	<b>68</b>
24.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami i płaszczyznami (9.2).	<b>60</b>
25.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Zdający wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych (G9.4).	<b>64</b>
26.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Zdający wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych (G9.4). 1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia (1.7).	<b>60</b>
27.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą (3.5).	<b>60</b>
28.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	3. Równania i nierówności. Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7) = 0$ (3.7).	<b>66</b>
29.	V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów (7.3).	<b>30</b>
30.	V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).	<b>23</b>
31.	III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym oraz wykorzystuje podstawowe własności potęg – również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką (1.6, 1.5).	<b>34</b>
32.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	SP9. Wielokąty, koła, okręgi. Zdający stosuje twierdzenie o sumie kątów trójkąta (SP9.3). G7. Równania. Zdający rozwiązuje równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą (G7.3).	<b>56</b>
33.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6). G10. Figury płaskie. Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa (G10.7).	<b>32</b>
34.	III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).	<b>31</b>



Wykres 2. Poziom wykonania zadań w obszarze wymagań ogólnych



## Poziom rozszerzony

### 1. Opis arkusza

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie rozszerzonym zawierał 5 zadań zamkniętych wyboru wielokrotnego, 11 zadań otwartych, w tym 7 zadań krótkiej i 4 zadania rozszerzonej odpowiedzi. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności opisane w pięciu obszarach wymagań ogólnych podstawy programowej matematyki: **wykorzystanie i tworzenie informacji** (jedno zadanie zamknięte), **wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji** (cztery zadania zamknięte), **modelowanie matematyczne** (trzy zadania otwarte krótkiej odpowiedzi i dwa zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi), **użycie i tworzenie strategii** (dwa zadania krótkiej i dwa rozszerzonej odpowiedzi) oraz **rozumowanie i argumentacja** (2 zadania krótkiej odpowiedzi). Za rozwiązanie wszystkich zadań zdający mógł otrzymać 50 punktów.

### 2. Dane dotyczące populacji zdających

Tabela 6. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym\*

Liczba zdających		72 046
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	47 789
	z techników	24 257
	ze szkół na wsi	1 604
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	11 422
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	27 341
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	31 679
	ze szkół publicznych	69 916
	ze szkół niepublicznych	2 130
	kobiety	27 226
	mężczyźni	44 820

\* Dane w tabeli dotyczą wszystkich tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 77 uczniów – laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

Tabela 7. Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach w wersji dostosowanej	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	76
	słabowidzący	63
	niewidomi	3
	słabosłyszący	75
	niesłyszący	22
	<b>ogółem</b>	<b>239</b>

### 3. Przebieg egzaminu

Tabela 8. Informacje dotyczące przebiegu egzaminu

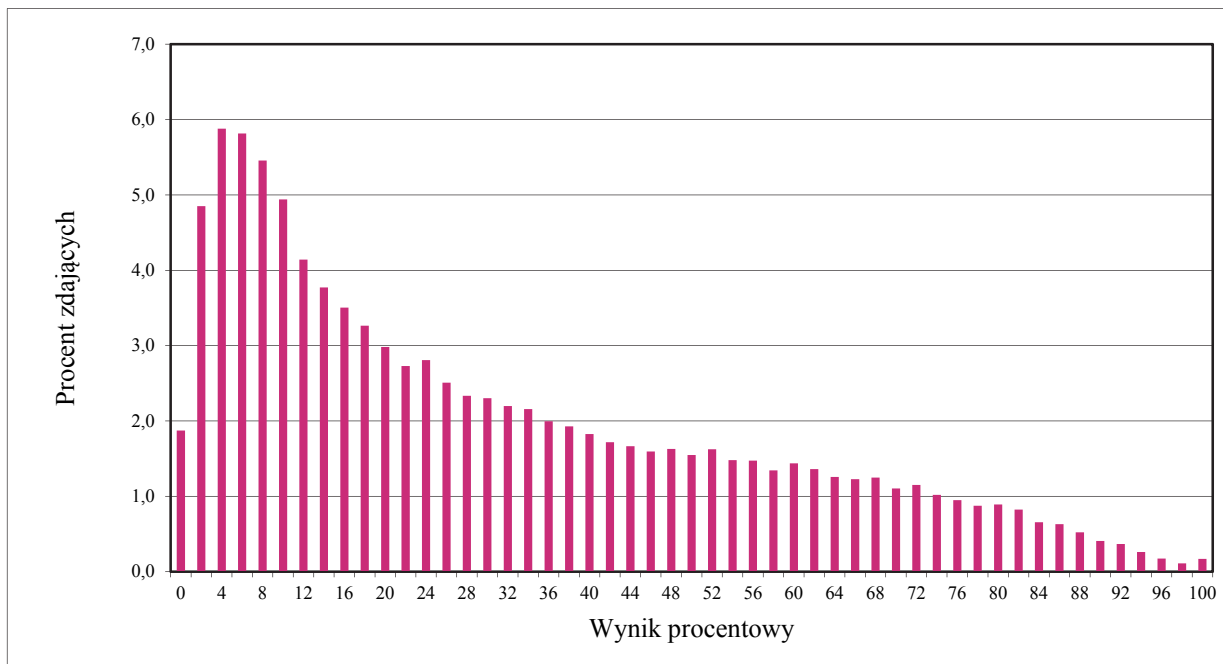
Termin egzaminu		9 maja 2016 r.	
Czas trwania egzaminu		180 minut	
Liczba szkół		3529	
Liczba zespołów egzaminatorów		304	
Liczba egzaminatorów		6252	
Liczba obserwatorów <sup>2</sup> (§ 8 ust. 1)		57	
Liczba unieważnień <sup>2</sup>	w przypadku:		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	1
	art. 44zzv pkt 3	zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu	0
	art. 44zzw ust. 1.	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	0
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu	1
	art. 44zzy ust. 10	niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)	0
	inne		1
Liczba wglądów <sup>2</sup> (art. 44zzz)		756	
Liczba prac, w których nie podjęto rozwiązania zadań		39	

<sup>1</sup>Na podstawie rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 25 czerwca 2015 r. w sprawie szczegółowych warunków i sposobu przeprowadzania sprawdzianu, egzaminu gimnazjalnego i egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2015, poz. 959).

<sup>2</sup>Na podstawie ustawy z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (tekst jedn. Dz.U. z 2015, poz. 2156, ze zm.).

## 4. Podstawowe dane statystyczne

### Wyniki zdających



Wykres 3. Rozkład wyników zdających

Tabela 9. Wyniki zdających – parametry statystyczne\*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
<b>ogółem</b>	<b>72 046</b>	<b>0</b>	<b>100</b>	<b>24</b>	<b>4</b>	<b>31</b>	<b>25</b>
w tym:							
z liceów ogólnokształcących	47 789	0	100	36	16	40	24
z techników	24 257	0	94	8	4	13	13

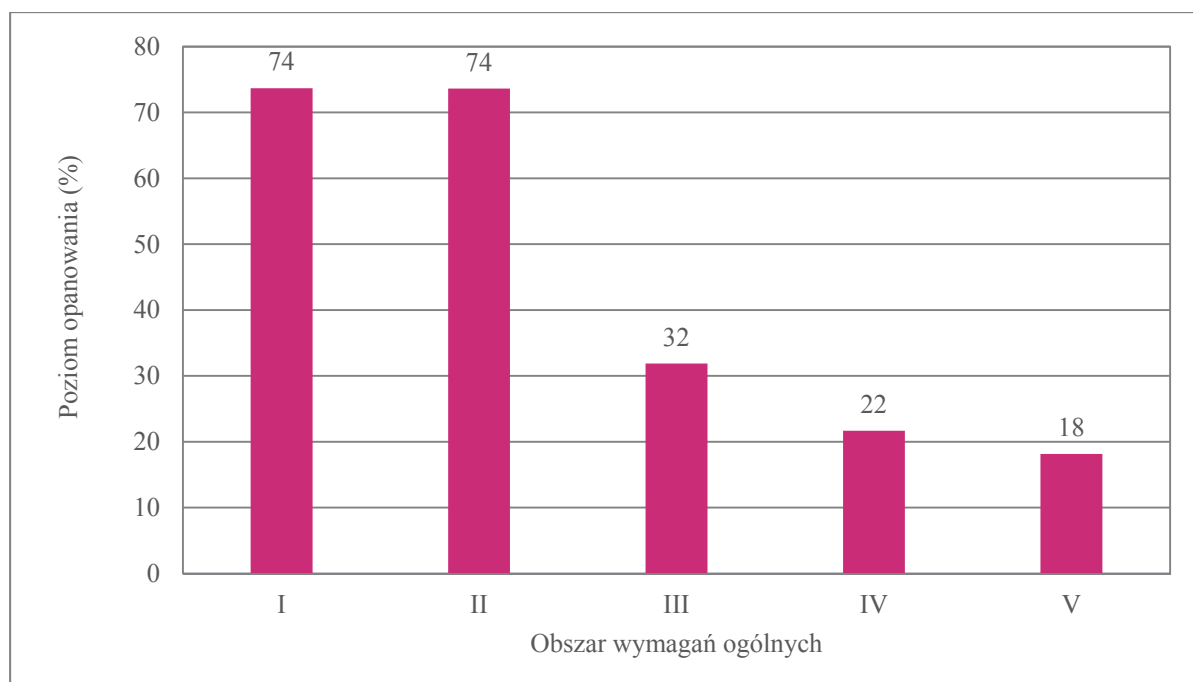
\* Dane dotyczą tegorocznych absolwentów, którzy przystąpili do wszystkich egzaminów obowiązkowych.

**Poziom wykonania zadań**

Tabela 10. Poziom wykonania zadań

Numer zadania w arkuszu	Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poziom wykonania zadania (%)
1.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$ (R2.1).	87
2.	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$ (R3.4).	74
3.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y =  f(x) $ , $y = c \cdot f(x)$ , $y = f(cx)$ (R4.1).	58
4.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza pochodne funkcji wymiernych (R11.2).	81
5.	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych (R11.1).	69
6.	III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwo warunkowe (R10.2).	39
7.	III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy (R5.3).	32
8.	V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).	20
9.	V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności (R7.4).	16
10.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	4. Funkcje. Zdający wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. także osadzonych w kontekście praktycznym) (4.12).	28
11.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne oraz posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (R6.6, R6.4).	26
12.	III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a, rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem, rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą oraz równania i nierówności z wartością bezwzględną (R3.1, R3.2, 3.5, R3.9).	33
13.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt, oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych oraz wyznacza współrzędne środka odcinka (8.3, 8.4, 8.5).	15
14.	III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych (R10.1).	41

15.	IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami, stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.4, 9.6).	<b>20</b>
16.	III. Modelowanie matematyczne.	11. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6).	<b>25</b>



Wykres 4. Poziom wykonania zadań w obszarze wymagań ogólnych

## Komentarz

### ANALIZA JAKOŚCIOWA ZADAŃ

Analiza wyników matury z matematyki na **poziomie podstawowym** pozwala zauważyć, że do najlepiej opanowanych umiejętności należą te, które wymagają zastosowania prostych i często pojawiających się w trakcie nauki własności figur geometrycznych.

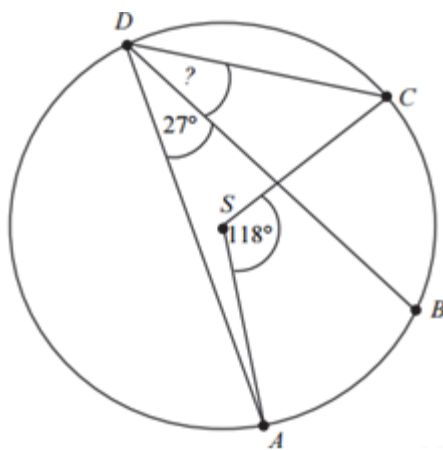
Najłatwiejszym zadaniem (poziom wykonania zadania – 88%) okazało się zadanie badające poziom opanowania umiejętności stosowania zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym.

#### Zadanie 7. (0–1)

Punkty  $ABCD$  leżą na okręgu o środku  $S$  (zobacz rysunek).

Miara kąta  $BDC$  jest równa

- A.  $91^\circ$
- B.  $72,5^\circ$
- C.  $18^\circ$
- D.  $32^\circ$



Wysoki poziom realizacji tego zadania potwierdza fakt opisany w raporcie po badaniach PIZA, że polscy uczniowie dość dobrze radzą sobie w sytuacjach typowych, a poprawne rozwiązanie wynika prawie bezpośrednio z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym, opartych na tym samym łuku okręgu. Nie bez znaczenia jest też zapewne możliwość „odgadnięcia” poprawnej odpowiedzi poprzez porównanie zaproponowanych dystraktorów z miarą zaznaczonego na rysunku kąta  $ADB$ .

Również bardzo dobrze poradzili sobie maturzyści z rozwiązaniem zadania, w którym trzeba było wykorzystać zależność pomiędzy współrzędnymi środka i współrzędnymi końców tego samego odcinka (poziom wykonania zadania – 87%).

#### Zadanie 21. (0–1)

W układzie współrzędnych dane są punkty  $A = (a, 6)$  oraz  $B = (7, b)$ . Środkiem odcinka  $AB$  jest punkt  $A = (3, 4)$ . Wynika stąd, że

- A.  $a = 5$  i  $b = 5$
- B.  $a = -1$  i  $b = 2$
- C.  $a = 4$  i  $b = 10$
- D.  $a = -4$  i  $b = -2$

Konstrukcja tego zadania umożliwiała zastosowanie kilku strategii jego rozwiązania. Oprócz oczywistej, wynikającej z zastosowania znanego wzoru na współrzędne środka odcinka, można było zastosować metodę sprawdzania warunków i po kolei wstawiać zaproponowane wartości  $a$  i  $b$ . Wówczas nie jest potrzebny wspomniany wzór, a wystarczy na przykład sporządzić stosowny rysunek. Zapisy w brudnopisach prac maturalnych potwierdzały stosowanie takiej strategii.

Kolejnym przykładem, potwierdzającym tezę, że maturzyści dość dobrze radzą sobie w sytuacjach typowych jest wysoki poziom wykonania zadania (85%), w którym należało wykorzystać cechy podobieństwa trójkątów i na podstawie informacji, zawartych na rysunku, podać długość boku trójkąta. Zawarta w treści zadania informacja o podobieństwie trójkątów pozwalała na trafny wybór właściwych narzędzi do rozwiązania przedstawionego problemu. W szczególności, po ustaleniu odpowiedniości boków oraz skali podobieństwa, naturalnym było utworzenie i rozwiązanie prostego równania, wynikającego z twierdzenia o stosunku odpowiednich boków w trójkątach podobnych.

Wysoki poziom wykonania (81%) osiągnęli zdający także w przypadku zadań, sprawdzających opanowanie umiejętności wyznaczania wartości funkcji sinus kąta, dla którego podano wartość funkcji tangens, oraz umiejętności odczytywania z wykresu funkcji jej zbioru wartości.

Na **poziomie rozszerzonym** najłatwiejsze okazały się zadania, w których trzeba było wykazać się umiejętnościami, zapisanymi w podstawie programowej w części wyznaczającej zakres rozszerzony, ale w sytuacjach typowych, odwołujących się do popularnych wzorów lub wymagających zastosowania konkretnego twierdzenia.

Najłatwiejsze okazało się zadanie, wymagające zastosowania wzoru skróconego mnożenia na sześcian sumy, z poziomem wykonania zadania – 87%.

**Zadanie 1. (0–1)**

W rozwinięciu wyrażenia  $(2\sqrt{3}x + 4y)^3$  współczynnik przy iloczynie  $xy^2$  jest równy

A.  $32\sqrt{3}$

B. 48

C.  $96\sqrt{3}$

D. 144

Dobry wynik uzyskany przez maturzystów w tym zadaniu zakłóca jednak obserwacja po analizie zapisów rozwiązań w brudnopisach. Wielu zdających, poszukując współczynnika przy iloczynie  $xy^2$ , obliczało po kolei wszystkie pozostałe współczynniki rozwinięcia wyrażenia  $(2\sqrt{3}x + 4y)^3$ , co świadczy o mechanicznym stosowaniu wzoru. Takie podejście prowadziło do wykonywania nieprzydatnych obliczeń. Docenić jednak należy skuteczność w poszukiwaniu rozwiązania w przypadku zdecydowanej większości maturzystów.

W zadaniu, wymagającym zastosowania wzoru na pochodną ilorazu funkcji, zdający osiągnęli poziom wykonania – 81%.

**Zadanie 4. (0–1)**

Funkcja  $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+4}$  jest określona dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . Pochodna tej funkcji jest określona wzorem

A.  $f'(x) = \frac{-3x^2 + 2x + 12}{(x^2 + 4)^2}$

B.  $f'(x) = \frac{-9x^2 + 2x - 12}{(x^2 + 4)^2}$

C.  $f'(x) = \frac{3x^2 - 2x - 12}{(x^2 + 4)^2}$

D.  $f'(x) = \frac{9x^2 - 2x + 12}{(x^2 + 4)^2}$

Podstawa programowa nauczania matematyki przewiduje obliczanie pochodnych jedynie z wybranych funkcji, w szczególności z funkcji wielomianowych i wymiernych. Rezultat osiągnięty w tym zadaniu wskazuje, że większość zdających solidnie opanowała umiejętność obliczania pochodnych w tym wyznaczonym zakresie. Tegorocznych maturzystów na ogół cechuje sprawne posługiwanie się popularnymi algorytmami.

W 2016 roku najtrudniejsze na maturze z matematyki okazały się zadania, w których należało wykazać prawdziwość wzoru lub uzasadnić własności figur geometrycznych. Częstą reakcją na samo sformułowanie zawierające polecenie „wykaż” lub „uzasadnij” jest opuszczenie zadania. Liczna grupa zdających w ogóle nie podejmuje próby rozwiązania zadań, wymagających uzasadnienia tezy, z góry rezygnując z możliwości uzyskania punktów za umiejętność rozumowania i argumentacji. Regularnie w egzaminach maturalnych występuje prawidłowość, że dowód z zakresu algebry okazuje się trudniejszy od dowodu geometrycznego.

Oto najtrudniejsze zadanie z matury na **poziomie podstawowym** (poziom wykonania zadania – 23%).

**Zadanie 30. (0–2)**

Ciąg  $(a_n)$  jest określony wzorem  $a_n = 2n^2 + 2n$  dla  $n \geq 1$ . Udowodnij, że suma każdych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

Poniżej zamieszczono przykładowe poprawne rozwiązania zadania (przykład 1. i 2.).

Przykład 1.

$$\begin{aligned}
 a_n &= 2n^2 + 2n & n \geq 1 & & n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\
 a_{n+1} &= 2(n+1)^2 + 2(n+1) \\
 2n^2 + 2n + 2(n+1)^2 + 2(n+1) &= 2n^2 + 2n + \\
 + 2(n^2 + 2n + 1) + 2n + 2 &= 2n^2 + 2n + 2n^2 + 4n + 2 + 2n + \\
 + 2 &= 4n^2 + 8n + 4 = 4(n^2 + 2n + 1) = 4(n+1)^2 = \\
 = 2^2 \cdot (n+1)^2 &= (2(n+1))^2 = (2n+2)^2
 \end{aligned}$$

$\uparrow$   
 $n$  jest liczbą naturalną różną od 0. Każda liczba naturalna pomnożona przez 2 i  $\uparrow$  do której po sformułowaniu mnożenia dodano 2 jest również liczbą naturalną.

Przykład 2.

$$\begin{aligned}
 a_m &= 2m^2 + 2m \quad \text{dla } m \geq 1 \\
 a_m + a_{m+1} &= 2m^2 + 2m + 2(m+1)^2 + 2(m+1) \\
 &= 2m^2 + 2m + 2(m^2 + 2m + 1) + 2m + 2 \\
 &= 2m^2 + 2m + 2m^2 + 4m + 2 + 2m + 2 \\
 &= 4m^2 + 8m + 4 \\
 &= (2m+2)^2 \\
 &\quad \downarrow \\
 & m \in \mathbb{N}, \text{ więc } (2m+2) \text{ także } \in \mathbb{N}, \text{ c.k.d.}
 \end{aligned}$$

Wielu maturzystów nie podjęło w ogóle próby zmierzenia się z problemem zaproponowanym w treści zadania. Z kolei duża grupa zdających popełniła błąd polegający na wnioskowaniu na podstawie analizy



sumy sąsiednich wyrazów ciągu w kilku konkretnych przypadkach o własnościach wszystkich wyrazów tego ciągu. Oto przykładowe rozwiązanie zawierające ten błąd.

Przykład 3.

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 4 & a_1 + a_2 &= 16 = 4^2 + \\ a_2 &= 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 12 & a_2 + a_3 &= 36 = 6^2 + \\ a_3 &= 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 24 & a_3 + a_4 &= 64 = 8^2 + \\ a_4 &= 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 = 40 & & \text{itd. tak podobnie zawsze cnd.} \end{aligned}$$

Trudnością w tym zadaniu, którą zdający musieli pokonać już na samym początku rozwiązania, było zapisanie w sposób ogólny sumy dwóch kolejnych wyrazów danego ciągu. Niektórzy zdający popełniali błędy rachunkowe przy wyznaczaniu wzorów na kolejne wyrazy ciągu bądź w trakcie przekształcania otrzymanego wyrażenia, określającego sumę dwóch sąsiednich wyrazów. To uniemożliwiało pomyślne zakończenie dowodu (jak w przypadku zilustrowanym w przykładzie 4.).

Przykład 4.

$$\begin{aligned} a_n &= 2n^2 + 2n & a_{n+1} &= 2(n+1)^2 + 2(n+1) = 2n^2 + 4n + 2 \\ a_n + a_{n+1} &= 2n^2 + 2n + 2 + 2n^2 + 4n + 2 = 4n^2 + 6n + 4 \\ \Delta &= 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = -16 \end{aligned}$$

Okazuje się także, że w wielu przypadkach pomimo przebrnięcia przez pierwszy etap rozwiązania, nie udało się zdającym doprowadzić rozumowania do końca. W przykładzie 5. zdający wyznaczył poprawnie wzór na sumę dowolnych sąsiednich wyrazów, która może być zapisana w postaci trójmianu kwadratowego. Jednak tym razem mechaniczne obliczanie wyróżnika trójmianu kwadratowego, popularnej delty ( $\Delta$ ) nie wystarczyło do poprawnego dokończenia rozumowania – pojawiła się wyraźna trudność w opisie istotnych konsekwencji wyróżnika równego 0.

Przykład 5.

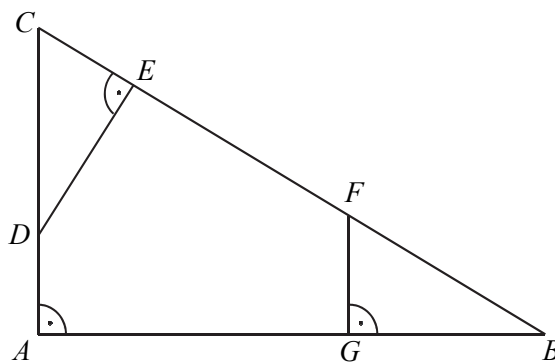
$$\begin{aligned} &(2n^2 + 2n) + [2(n+1)^2 + 2(n+1)] = \\ &= (2n^2 + 2n) + [2(n^2 + 2n + 1) + 2n + 2] = (2n^2 + 2n) + (2n^2 + 4n + \\ &+ 2 + 2n + 2) = 2n^2 + 2n + 2n^2 + 6n + 4 = \\ &= 4n^2 + 8n + 4 \\ \Delta &= 64 - 4 \cdot 4 \cdot 4 = 0 & \text{skoro } n_1 &= \frac{-8}{8} = -1 \end{aligned}$$

Skoro ~~suma~~ w wyniku dodania wzorów na dwa kolejne wyrazy otrzymaliśmy równanie kwadratowe, które może być rozwiązane dla jednej liczby to możemy łatwo z tego wyprowadzić, że po wstawieniu w równanie kwadratowe odpowiedniej liczby  $n$  da otrzymamy kwadrat liczby naturalnej

Również dowód geometryczny sprawił trudności zdającym, choć tradycyjnie rezultaty, jakie zdający osiągnęli w tym przypadku (poziom wykonania zadania – 30%), są zdecydowanie lepsze niż w przypadku dowodu algebraicznego. Oto treść zadania i poprawne rozwiązania (przykład 6. i 7.).

### Zadanie 29. (0–2)

Dany jest trójkąt prostokątny  $ABC$ . Na przyprostokątnych  $AC$  i  $AB$  tego trójkąta obrano odpowiednio punkty  $D$  i  $G$ . Na przeciwprostokątnej  $BC$  wyznaczono punkty  $E$  i  $F$  takie, że  $|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle BGF| = 90^\circ$  (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąt  $CDE$  jest podobny do trójkąta  $FBG$ .



#### Przykład 6.

Trójkąt  $\triangle FBG$  jest podobny ponieważ do  $\triangle ABC$   
 ponieważ oba te trójkąty zawierają kąt  $\sphericalangle FBG$  i są trójkątami prostokątnymi.  
 Na tej samej zasadzie  $\triangle CDE$  jest podobny do  $\triangle ABC$   
 ponieważ oba te trójkąty są prostokątne i zawierają kąt  $\sphericalangle DCE$ .  
 Skoro  $\triangle FBG$  jest podobny do  $\triangle ABC$  i  $\triangle CDE$  jest podobny do  $\triangle ABC$  to  $\triangle FBG$  jest podobny do  $\triangle CDE$ .

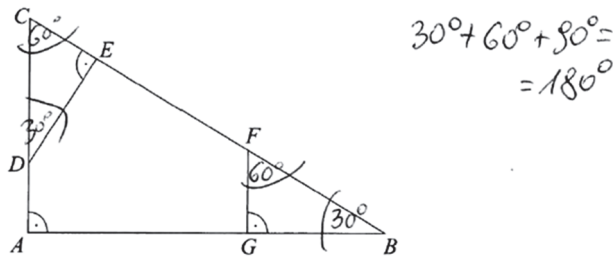
#### Przykład 7.

Trójkąt  $ABC$  jest prostokątny, więc jeśli kąt  $\sphericalangle ACB$  oznaczymy jako  $\alpha$ , kąt  $\sphericalangle ABC$  mogą oznaczyć jako  $90^\circ - \alpha$  ( $180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$ ).  
 Analogicznie kąt  $\sphericalangle EDC$  wynosi wtedy  $90^\circ - \alpha$ , a kąt  $\sphericalangle GFB$  wynosi  $\alpha$ .  
 Trójkąty  $CED$  i  $BGF$  mają więc identyczne kąty ( $90^\circ, \alpha, 90^\circ - \alpha$ ), więc są podobne („kąt-kąt-kąt”), co kończy dowód.

Po analizie rozwiązań zadania zamkniętego z tego samego arkusza maturalnego, w kontekście wielu poprawnych rozwiązań zadania, związanego z podobieństwem trójkątów można by przypuszczać, że umiejętności związane ze stosowaniem cech podobieństwa trójkątów są dobrze opanowane. Okazuje się jednak, że dla maturzystów czym innym jest korzystanie z informacji o tym, że trójkąty są podobne, a czym innym przedstawienie takiej informacji wraz z uzasadnieniem. Szczególnie trudny, w zadaniu wymagającym uzasadnienia podobieństwa figur, był brak konkretnych informacji o miarach kątów ostrych w rozpatrywanych trójkątach. Maturzyści na ogół dobrze operują na konkretnych, a znacznie gorzej funkcjonują w sytuacjach takich jak w tym zadaniu, gdy trzeba stwierdzić równość odpowiednich kątów bez podanej w treści zadania informacji o miarach kątów. Stąd wynikają błędne próby

rozwiązania zadania, polegające na ustaleniu konkretnych miar kątów, jak choćby na przykładzie poniżej.

Przykład 8.



$$\triangle EDC \sim \triangle FBG \text{ (kkk)}$$

Pomimo że zadania z poleceniem typu: uzasadnij, udowodnij, wykaż są elementem arkuszy egzaminacyjnych od wielu lat, w wielu pracach można zauważyć brak doświadczenia przy zapisywaniu rozwiązania zadania tego typu. Zdający niejednokrotnie ma pomysł na rozwiązanie problemu, ale nie komentuje ważnych elementów przedstawionego rozwiązania, co uniemożliwia przyznanie przez egzaminatorów pełnej liczby punktów. W przykładzie 9. zdający nie podał, które kąty w poszczególnych trójkątach mają równe miary ani dlaczego te miary są równe. Przedstawiono tu odwołanie się do przechodniości relacji podobieństwa, ale nie wskazano żadnej pary równych kątów ostrych, co musi być potraktowane jako ominięcie istotnego fragmentu rozumowania.

Przykład 9.

$$\begin{aligned} \triangle GBF &\sim \triangle ABC \text{ (zasada "kąt, kąt, kąt")} \\ \triangle DEC &\sim \triangle ABC \text{ (zasada "kąt, kąt, kąt")} \\ \text{z tego wynika, że} \\ \triangle DEC &\sim \triangle FBG \end{aligned}$$

W wielu pracach zdający korzystają z tezy przy dowodzeniu tej tezy, co świadczy o braku zrozumienia istoty dowodu. Oto przykład takiego błędnego rozumowania.

Przykład 10.

$$\frac{|CE|}{|CD|} = \frac{|FG|}{|FB|} \Rightarrow |\sphericalangle C| = |\sphericalangle F|$$

↓

$$|\sphericalangle D| = |\sphericalangle B| = \sphericalangle CDE \sphericalangle FBG$$

cebe kkk

Tylko co trzeci maturzysta poprawnie rozwiązał zadanie 34. z rachunku prawdopodobieństwa. Oto poprawne rozwiązania tego zadania (przykład 11. i 12.).

### Zadanie 34. (0–4)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie równa 30. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

Przykład 11.

Znajdziemy wszystkie pary liczb naturalnych dwucyfrowych, których suma daje 30:

10	20
11	19
12	18
13	17
14	16
15	15
16	14
17	13
18	12
19	11
20	10

to zadanie to ma być - odpada, bo dostajemy liczby bez zwracania

do liczby 21 i największych naturalnych dodac' liczbe jednocyfrowa, lub by były to liczby  $\geq 30$ , zatem to już wszystkie możliwości.

jest ich 10. Liczb od 10 do 99 jest  $99 - 10 + 1 = 90$ .

Wszystkich możliwych zdarzeń jest zatem  $90 \cdot 89$ , bo za pierwszym razem możemy wylosować 90 liczb, a za drugim o jedną mniej (tę, którą cyfrowaliśmy najpierw).

$90 \cdot 89 = 8010$

Zatem wamieniu zadania spełnia 10 z ~~90~~ 8010 zdarzeń. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że suma liczb wylosowanych to 30, wynosi więc  $\frac{10}{8010} = \frac{1}{801}$

## Przykład 12.

meskracalnego. 90 liczb dwucyfrowych naturalnych

$$\bar{\Omega} = 90 \cdot 89$$

A - suma wylosowanych liczb bedzie rowna 20

$$\bar{A} = \{ (10, 20), (20, 10), (11, 19), (19, 11), (12, 18), (18, 12), \\ (13, 17), (17, 13), (14, 16), (16, 14), \dots \}$$

$$P(A) = \frac{|\bar{A}|}{|\bar{\Omega}|} = \frac{10}{90 \cdot 89} = \frac{10}{8010} = \frac{1}{801}$$

Dla wielu maturzystów już pierwszy, zupełnie elementarny etap rozwiązania tego zadania stał się przekraczającym ich możliwości wyzwaniem. Okazuje się, że stwierdzenie, ile jest naturalnych liczb dwucyfrowych może nie być oczywiste. W ustaleniach pojawiają się wyniki 89, 91, 99 oraz inne, których wystąpienie trudno wytłumaczyć. Bardzo często ustalenie, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90, było ostatnim poprawnym zapisem w rozwiązaniu zadania. Zdający często utożsamiają tę liczbę z liczbą wszystkich zdarzeń elementarnych (przykład 13.).

## Przykład 13.

$$\bar{\Omega} = 9 \cdot 10 = 90$$

$$\bar{A} = \{ (10, 20), (11, 19), (12, 18), (13, 17), (14, 16), \\ (16, 14), (17, 13), (18, 12), (19, 11), (20, 10) \}$$

$$|\bar{A}| = 10$$

$$P(A) = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$$

W przypadku części zdających dało się zauważyć popełnianie błędów, polegających na kreowaniu sprzeczności w przedstawianym modelu przestrzeni probabilistycznej, pomimo poprawnego wyznaczenia liczby wszystkich wyników losowania, o którym mowa w zadaniu. Na przykład przy obliczaniu, ile jest wszystkich zdarzeń elementarnych, zdający nie uwzględniali kolejności losowanych liczb, a przy zliczaniu wyników sprzyjających danemu zdarzeniu uwzględniali tę kolejność. Ten rodzaj błędów ilustruje przykład 14.

Przykład 14.

30 - dość lubo dziesiętnych

$\Omega = \binom{30}{2}$  - 2 dowolne lubo losujemy 2

$|\Omega| = \binom{30}{2} = \frac{30!}{2! \cdot 28!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28!}{2 \cdot 28!} = 4005$

A - zdarzenie: losujemy dwie lubo, których suma jest równa 30

A: (10; 20), (11; 19), (12; 18), (13; 17),  
 (14; 16), ~~(15; 15), (15; 15), (15; 15), (15; 15)~~ (16; 14),  
 (17; 13), (18; 12), (19; 11), (20; 10)

$\bar{A} = 10$

P - prawdopodobieństwo wylosowania dwóch lubo, których suma jest równa 30.

$P = \frac{\bar{A}}{|\Omega|} = \frac{10}{4005} = \frac{2}{801}$

Własności prawdopodobieństwa są dla wielu maturzystów treściami, które nie korespondują z zapisami w prezentowanych przez nich rozwiązaniach. W wielu pracach zdający w wyniku obliczenia prawdopodobieństwa otrzymuje, jako wynik końcowy, liczbę większą niż jeden. Elementarna własność prawdopodobieństwa, jaką jest jego wartość z przedziału liczbowego  $\langle 0, 1 \rangle$ , powinna prowadzić do natychmiastowej weryfikacji rozumowania, w przypadku uzyskania wyniku spoza wspomnianego zakresu liczbowego. Tymczasem brak sensowności otrzymanego wyniku nie prowadzi niektórych zdających do żadnej refleksji. Poniżej przykład 15., ilustrujący taką sytuację.

Przykład 15.

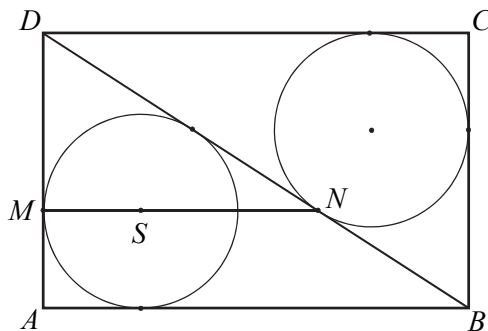
$P(A) = 80$   
 $P(\Omega) = 6$   
 $P = \frac{80}{6} = 15$

Na **poziomie rozszerzonym** najwięcej trudności tegorocznici maturzyści mieli z rozwiązaniem zadania 13., sprawdzającego opanowanie umiejętności z zakresu geometrii na płaszczyźnie kartezjańskiej. Szczegółowe omówienie tego zadania zamieszczamy w dalszej części niniejszego opracowania.

Również zadanie 9., wymagające przeprowadzenia rozumowania z wykorzystaniem własności podobieństwa figur w planimetrii, miało bardzo niski poziom wykonania – 16%. Mniej niż co piąty maturzysta, który wybrał poziom rozszerzony egzaminu z matematyki, wykazał równość odcinków – co było tematem zadania.

**Zadanie 9. (0–3)**

Dany jest prostokąt  $ABCD$ . Okrąg wpisany w trójkąt  $BCD$  jest styczny do przekątnej  $BD$  w punkcie  $N$ . Okrąg wpisany w trójkąt  $ABD$  jest styczny do boku  $AD$  w punkcie  $M$ , a środek  $S$  tego okręgu leży na odcinku  $MN$ , jak na rysunku.



Wykaż, że  $|MN| = |AD|$ .

Duża część zdających, także ci, którzy dobrze sobie radzili przy rozwiązywaniu innych zadań, nie potrafiła znaleźć właściwej drogi do wykazania równości odcinków  $MN$  i  $AD$ . Warto podkreślić natomiast, że ogromna większość spośród tych maturzystów, którzy uzyskali choćby niewielki postęp w rozwiązaniu zadania, doprowadzała swoje rozumowanie do końca.

Dowód algebraiczny również nie był łatwym zadaniem. Świadczy o tym niski poziom wykonania zadania – 20%.

#### **Zadanie 8. (0–3)**

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$  takich, że  $x^2 + y^2 = 2$ , prawdziwa jest nierówność  $x + y \leq 2$ .

W przypadku tego zadania wielu zdających, po kilku nieudanych próbach równoważnych przekształceń tezy, rezygnowało z dalszych poszukiwań rozwiązania. Przy tym zadaniu w arkuszach egzaminacyjnych wystąpiły dość chaotyczne zapisy prób rozwiązań, co sygnalizuje konieczność wprowadzenia większej liczby zadań tego typu do procesu edukacji przyszłych maturzystów. Absolwenci liceów i techników dysponują na ogół sporym zasobem narzędzi matematycznych, pozwalających uzasadnić prawdziwość wzorów z zakresu algebry. Tymczasem bardzo popularne okazało się podjęcie decyzji o rezygnacji z doboru odpowiedniego rozumowania do uzasadnienia tezy z treści zadania. Większość zdających opuściła zadanie lub nie potrafiła zapisać właściwych przekształceń, które prowadziłyby do wykazania prawdziwości własności sumy dwóch liczb na podstawie informacji o sumie kwadratów tych liczb.

Zadanie 15. dotyczące zagadnień ze stereometrii również należało do trudnych.

#### **Zadanie 15. (0–6)**

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym  $ABCD S$  o podstawie  $ABCD$  wysokość jest równa 5, a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa ma miarę  $120^\circ$ . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zdający, którzy podjęli próbę rozwiązania tego zadania, mieli kłopot już w początkowej fazie rozwiązywania zadania. Duża część zdających miała trudności z wykonaniem przydatnej do przeprowadzania rozumowania ilustracji graficznej. Część zdających ujawniła brak zrozumienia pojęcia kąta między sąsiednimi ścianami. Ponadto w gronie zdających, którzy przebrnęli przez etap tworzenia rysunku i interpretacji kąta dwuściennego, większość miała problem z zaplanowaniem kolejnych kroków, prowadzących do poszukiwania odpowiedzi na postawione pytanie. W szczególności trudno było zdającym wyznaczyć wielkości potrzebne do obliczenia objętości ostrosłupa. Stosowanie algorytmów, nawet złożonych, jest dla maturzystów znacznie łatwiejsze niż samodzielne opracowanie strategii postępowania, a takiego samodzielnego wyboru strategii wymagało zadanie, dotyczące własności figur w geometrii przestrzennej.

### **Problemy „pod lupą”**

#### **MATEMATYCZNE MODELOWANIE RZECZYWISTOŚCI**

Możliwość zastosowania matematyki jako narzędzia, umożliwiającego poznanie otaczającego środowiska i pozwalającego na opisanie rzeczywistych zagadnień za pomocą pojęć i reguł matematycznych – to jeden z ważnych powodów powszechnego nauczania tego przedmiotu. Rozumieją to także sami uczniowie, często powtarzający argumenty na rzecz konieczności przekazywania szczególnie takiego zakresu wiedzy czy umiejętności, który pozostaje w ścisłym związku z konkretnymi i ma przełożenie na sytuacje realne. Umiejętność opisu rzeczywistości z wykorzystaniem modelu matematycznego to jednak wciąż dla wielu ludzi wchodzących w dorosłe życie sfera nieosiągalna.

W arkuszu maturalnym z matematyki dla poziomu podstawowego znalazło się zadanie z treścią, której większą część stanowi tekst popularnonaukowy. W zadaniu tym podano wzór opisujący rzeczywiste zjawisko.



**Zadanie 31. (0–2)**

Skala Richtera służy do określania siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest wzorem  $R = \log \frac{A}{A_0}$ , gdzie  $A$  oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach,  $A_0 = 10^{-4}$  cm jest stałą, nazywaną amplitudą wzorcową. 5 maja 2014 roku w Tajlandii miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 6,2 w skali Richtera. Oblicz amplitudę trzęsienia ziemi w Tajlandii i rozstrzygnij, czy jest ona większa, czy – mniejsza od 100 cm.

Aby rozwiązać zadanie, należało wstawić do podanego wzoru odpowiednie wartości liczbowe, występujące w treści zadania oraz zastosować odpowiednie własności logarytmu i potęgowania, które zdający mogą odnaleźć w dopuszczonym do wykorzystania w trakcie matury zestawie wzorów matematycznych. Oto przykładowe poprawne rozwiązania zadań, przedstawione przez tegorocznych maturzystów (przykłady 16. i 17.).

Przykład 16.

$\log_a c = b \rightarrow a^b = c$   
 $R = \log \frac{A}{A_0}$   
 $6,2 = \log \frac{A}{10^{-4}}$   
 $6,2 = \log A - \log 10^{-4}$   
 $6,2 = \log A - (-4)$   
 $6,2 = \log A + 4$   
 $2,2 = \log_{10} A$   
 $10^{2,2} = A \Rightarrow A > 100$ , ponieważ  
 $10^2 < 10^{2,2}$        $10^2 = 100$

Odpowiedź: Obliczone amplituda wynosi 2,2 i jest większa od 100 cm.

Przykład 17.

$6,2 = \log \frac{A}{10^{-4}}$   
 $10^{6,2} = \log \frac{A}{10^{-4}}$   
 $10^{\frac{6,2}{10}} = \log_{10} \frac{A}{10^{-4}}$   
 $10^{\frac{6,2}{10}} = \frac{A}{10^{-4}} \quad / \cdot 10^{-4}$   
 $10^{6,2} \cdot 10^{-4} = A$   
 $A = 10^{6,2-4} = 10^{2,2}$   
 $A = 10^{2,2} = 10^{\frac{11}{5}} > 100 \text{ cm}$   
 większe niż 100 cm

Dla wielu zdających rozwiązanie zadania nie mogło zakończyć się sukcesem, ponieważ mieli poważne trudności z podstawieniem odpowiednich wartości do wzoru. W zamieszczonych przykładowych rozwiązaniach (przykład 18. i 19.) pomyślono siłę trzęsienia ziemi z amplitudą trzęsienia ziemi.

## Przykład 18.

$R = \log \frac{A}{A_0}$  ← amplituda przesłania (cm)

$A_0 = 10^{-4} \text{ cm}$

$R = \log \frac{6,2}{10^{-4}} =$

$R = \log_{10} \frac{6,2}{10^{-4}} = \log_{10} 6,2 - \log_{10} 10^{-4}$

$= \log_{10} 6,2 - \log_{10} 0,0001 =$

$= \log_{10} 6,1999$

$\log_{10} 6,1999 = 10$

$\log_{10} 6,1999 = 10b$

$\log_{10} 6,2 = b$

$10^b = 6,2$

$b = \frac{6,2}{10}$

$b = 0,62$

$10^{-4} = \frac{1}{10^4}$

$= \frac{1}{10000} = 0,0001$

$10^{-4} = \frac{1}{10^4}$

$= \frac{1}{10000}$

$-3,8^{-4} = \frac{1}{3,8^4}$

$-3,8^{-4} = \frac{1}{3,8^4}$

## Przykład 19.

$$R = \log \frac{6,2}{A_0} = \log \frac{6,2}{10^{-4}} = \frac{6,2}{10^{-4}} =$$

$$= 6,2 \cdot 10^4 = 6,2 \cdot 10000 =$$

Innym charakterystycznym błędem było umieszczanie we wzorze w miejscu amplitudy trzęsienia ziemi wartości liczbowej, z którą należało ową amplitudę porównać. Oto przykładowe błędne podejście do rozwiązania problemu.

Przykład 20.

$$6,2 = \log \frac{100 \text{ cm}}{10^{-4}}$$

$$6,2 = \log \frac{100 \text{ cm}}{10000}$$

$$6,2 = \log \frac{100 \text{ cm}}{10000}$$

$$6,2 = \log = \frac{1}{100} \text{ cm}$$

Duża część zdających nie mogła poprawnie odnieść się do sformułowanego w zadaniu zagadnienia, ponieważ nie przyswoiła pojęcia logarytmu lub nie potrafiła zastosować elementarnych własności logarytmu. Przykłady przedstawione poniżej świadczą o tym, że mianownik ułamka, stanowiącego liczbę logarytmowaną, może być postrzegany jako liczba niezwiązana z logarytmem. Według części zdających, dzięki wymnożeniu obu stron nierówności przez mianownik liczby logarytmowanej, można pominąć mianownik liczby logarytmowanej. Dodatkowo w przykładzie 21. ujawniono, że sam symbol „log” może być traktowany jako liczba/zmienna, przez którą można mnożyć obie strony równania. Również w tym przykładzie utożsamianie „log10” (tj. symbolu logarytmu bez liczby logarytmowanej) z „log10” (czyli z liczbą 1) świadczy o tym, że zrozumienie, czym jest logarytm, może okazać się nie lada wyzwaniem. Dla sporej części absolwentów szkół, w których edukacja kończy się egzaminem maturalnym, logarytm pozostaje jedynie nic nieznaczącym, skomplikowanym zapisem symbolicznym.

Przykład 21.

$$R = \log \frac{A}{A_0}$$

$$R = \log \frac{A}{10^{-4}}$$

$$6,2 = \log \frac{A}{10^{-4}} \quad /: 10^{-4}$$
~~$$6,2 = \log A$$~~

$$\frac{6,2}{10^{-4}} = \log A / \log 10$$

$$\frac{6,2}{\frac{1}{10^4}} = A$$
~~$$6,2 = A$$~~

$$6,2 \cdot \frac{10^4}{1} = A$$

$$6,2 \cdot 10000 = A$$

$$62,000 \text{ cm} = A$$

## Przykład 22.

$$R = \log \frac{A}{A_0} \quad A - \text{amplituda}$$

$$A_0 = 10^{-4} \text{ cm}$$

$$G_{12} = \log \frac{A}{10^{-4}} \quad | \cdot 10^{-4}$$

$$620000 = \log A$$

$$620000 = \log_{10} A$$

Często w arkuszach maturalnych, wypełnionych przez zdających, którzy podjęli próbę rozwiązania omawianego zadania, można zauważyć wypisanie wszystkich potrzebnych do rozwiązania zadania wzorów i równocześnie brak jakiegokolwiek poprawnego połączenia ich z konkretnymi danymi. Taka sytuacja była popularna także w przypadku uczniów, którzy bez szczególnych trudności rozwiązali większą część zadań z arkusza maturalnego. Dla absolwentów liceów i techników matematyka okazała się sferą oderwaną od rzeczywistych zjawisk. Jest to ważny sygnał, że nauczanie matematyki nie powinno być jedynie ćwiczeniem w posługiwaniu się algorytmami i wzorami, a zapisy symboliczne nie mogą stanowić wyłącznie abstrakcyjnego opisu pojęć lub działań matematycznych.

## GEOMETRIA NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

Inaczej niż w poprzednich latach najtrudniejszym zadaniem maturalnym z matematyki nie było zadanie wymagające dowodu czy przeprowadzenia rozumowania uzasadniającego sformułowaną w treści zadania tezę. Tym razem najniższy wynik (poziom wykonania zadania – 15%) osiągnęło zadanie z geometrii na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający nie mają większych kłopotów ze stosowaniem własności obiektów geometrycznych w układzie kartezjańskim w sytuacjach, gdy do rozwiązania zadania potrzebna jest pojedyncza umiejętność, pozwalająca na wskazanie właściwej odpowiedzi. Zadania wymagające jedynie wyznaczenia współrzędnych środka odcinka lub obliczenia współrzędnych punktu przecięcia dwóch prostych należą zawsze do najłatwiejszych i najbardziej przez maturzystów lubianych. Jednak zadanie, w którym wymaga się przeprowadzenia kilkietapowego rozumowania, dla ogromnej większości maturzystów staje się przeszkodą nie do pokonania.

Oto zadanie, które przysporzyło zdającym matematykę najwięcej trudności.

**Zadanie 13. (0–5)**

Punkty  $A = (30, 32)$  i  $B = (0, 8)$  są sąsiednimi wierzchołkami czworokąta  $ABCD$  wpisanego w okrąg. Prosta o równaniu  $x - y + 2 = 0$  jest jedyną osią symetrii tego czworokąta i zawiera przekątną  $AC$ . Oblicz współrzędne wierzchołków  $C$  i  $D$  tego czworokąta.

Aby rozwiązać zadanie, należało wykazać się umiejętnościami wyznaczania równania prostej, która jest prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt, obliczania współrzędnych punktu przecięcia dwóch prostych, a także wyznaczania współrzędnych środka odcinka. Należało jednak umiejętnie opracować strategię prowadzącą do znalezienia współrzędnych punktów  $C$  i  $D$  dwóch sąsiednich wierzchołków deltoidu (tj. czworokąta mającego dokładnie jedną oś symetrii).

Aby obliczyć współrzędne punktu  $D$ , który jest obrazem danego punktu  $B$  w symetrii osiowej względem danej prostej zawierającej odcinek  $AC$ , wystarczyło znaleźć równanie prostej prostopadłej do danej, przechodzącej przez dany punkt, a następnie wyznaczyć współrzędne punktu przecięcia obu prostych.

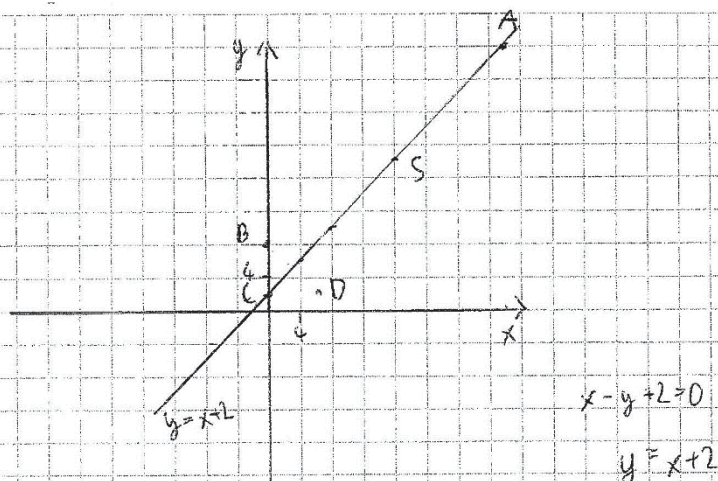
Tak wyznaczony punkt przecięcia prostych jest środkiem odcinka  $BD$ , którego jeden z końców podano w treści zadania. Zatem wyznaczenie współrzędnych drugiego końca odcinka przy znanych współrzędnych środka odcinka i pierwszego z końców nie powinno stanowić trudności dla przystępujących do matury, zwłaszcza że ta część rozwiązania wymagała prowadzenia rachunków jedynie na liczbach całkowitych.

Do ustalenia wartości współrzędnych punktu  $C$  wystarczyło wyznaczyć współrzędne punktu  $S$  – środka okręgu opisanego na deltoidzie, na przykład z wykorzystaniem równości długości odcinków  $AS$  i  $BS$ , oraz fakt, że punkt  $S$  leży na osi symetrii figury. Następnie można było dodatkowo wykorzystać informację o tym, że punkt  $S$  jest środkiem odcinka  $AC$  lub równość długości odcinków  $AS$  i  $CS$ . Tym razem rachunki wymagały działań na liczbach wymiernych (ułamki o mianowniku 3).

Z powyższego opisu wynika, że umiejętności niezbędne do rozwiązania zadania nie wykraczały poza zakres podstawowy. Kolejne etapy rozwiązania zaś są naturalną konsekwencją własności obiektów geometrycznych wskazanych w zadaniu.

Poniżej zamieszczono przykładowe poprawne rozwiązania zadania. W przykładzie 23. zdający przedstawił rozwiązanie w ujęciu takim, jak opisano powyżej, w przykładzie 24. zdający wykorzystał równanie okręgu przechodzącego przez punkty  $ABD$  do wyznaczenia współrzędnych punktu  $C$ .

## Przykład 23.



$y = x + 2$  - oś symetrii pkt A leży na tej prostej  
czyli pkt C leży na prostej  $y = x + 2$  a pkt D jest  
odbiciem pkt B względem tej prostej

$$B = (0, 8) \quad y_1 = -x + 8 \quad \begin{array}{l} -x + 8 = x + 2 \\ 6 = 2x \\ 3 = x \end{array}$$

czyli pkt C do  $(3; 5)$

$$DC = (6; 2)$$

$$|SA| = |SB|$$

$$S = (x, x + 2)$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (x+2-8)^2} = \sqrt{(30-x)^2 + (32-x-2)^2}$$

$$x^2 + x^2 - 12x + 36 = 2 \cdot (30^2 - 60x + x^2)$$

$$1800 - 36 = +108x$$

$$x = \frac{1764}{108} = \frac{49}{3} = 16 \frac{1}{3}$$

$$S = \left(16 \frac{1}{3}; 18 \frac{2}{3}\right)$$

$$|SA| = |SC|$$

$$30 - 16 \frac{1}{3} = 13 \frac{2}{3}$$

$$30 - 2 \cdot 13 \frac{2}{3} = 30 - 26 \frac{4}{3} = 2 \frac{2}{3}$$

$$C = \left(2 \frac{2}{3}; 4 \frac{2}{3}\right)$$

Odpowiedź:  $C = \left(2 \frac{2}{3}; 4 \frac{2}{3}\right)$ ,  $D = (6; 2)$

Przykład 24.

$A(30, 32)$

$B(0, 8)$

czworokąt wpisany w okrąg  
czyli okrag jest wpisany

zatem sumy miar naprzeciwleglych  
kątów są równe  $180^\circ$

Wzrost  $k: x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = x + 2$   $\angle ABC = 90^\circ$   
 $\angle ADC = 90^\circ$

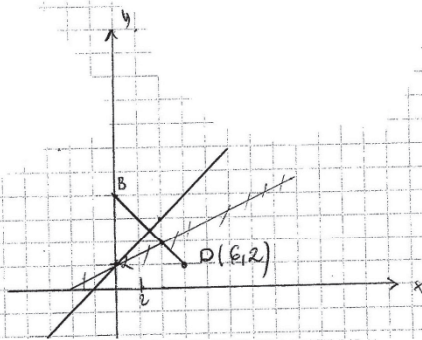
$C(x, x+2)$

punkty A i B należą do okręgu

proste k osia symetrii więc  $|AB| = |AD|$  i  $|BC| = |BD|$

czyli punkt D jest odbiciem B względem prostej k  
odczytajemy z układu

że punkt D to  $(6, 2)$



$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$(30-a)^2 + (32-b)^2 = r^2$

$(0-a)^2 + (8-b)^2 = r^2 \Rightarrow a^2 + (8-b)^2 = r^2$

$(6-a)^2 + (2-b)^2 = r^2$

$(6-a)^2 + (2-b)^2 = a^2 + (8-b)^2$

~~36 - 12a + 8^2 + 4 - 4b + b^2 = a^2 + 64 - 16b + b^2~~

$40 - 12a = 64 - 12b \quad 12a - 24 = 12b \quad a - 2 = b$

Proste przechodzące przez AB to  $y = \frac{4}{5}x + 8$

$32 = 30a + 8$   
 $8 = 0 \cdot a + b \quad b = 8 \quad 32 = 30a + 8 \quad 30a = 24 \quad a = \frac{4}{5}$

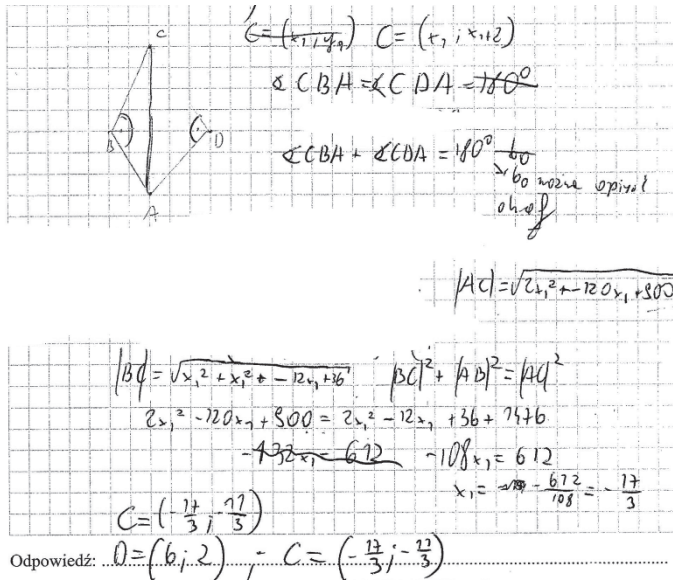
proste prostopadłe przechodzące przez punkt B  
przebiega przez punkt C (bo  $\angle ABC = 90^\circ$ )

$y = -\frac{5}{4}x + b_1 \quad 8 = -\frac{5}{4} \cdot 0 + b_1 \quad b_1 = 8$   
 $y = x + 2 \quad x + 2 = -\frac{5}{4}x + 8 \Rightarrow \frac{9}{4}x = 6 \quad x = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$   
 $y = -\frac{5}{4}x + 8 \quad y = -\frac{5}{4} \cdot \frac{8}{3} + 8 = \frac{14}{3} \quad C(\frac{8}{3}, \frac{14}{3})$

Odpowiedź:  $C(\frac{8}{3}, \frac{14}{3})$ ,  $D(6, 2)$

Do wyznaczenia współrzędnych wierzchołka  $C$  część zdających korzystała z faktu, że trójkąt  $ABC$  jest prostokątny (konsekwencja wpisania deltoidu w okrąg). Poniżej przykład takiego rozwiązania (przykład 25.), w którym, długość odcinka  $AC$  została policzona błędnie. Zdający zastosował twierdzenie Pitagorasa. Z kolei w przykładzie 26. zdający zapisuje równanie prostej  $BC$ , prostopadłej do prostej  $AB$ , ale popełnia błąd rachunkowy ( $1 + \frac{10}{8} = \frac{26}{8}$ ).

## Przykład 25.



$C = (x, x+2)$   
 $\sphericalangle CBA = \sphericalangle CDA = 90^\circ$   
 $\sphericalangle CBA + \sphericalangle CBA = 180^\circ$  *bo może opisać okół*  
 $|AC| = \sqrt{2x^2 + 120x + 800}$   
 $|BD| = \sqrt{x^2 + x^2 + 12x + 36}$      $|BC|^2 + |AD|^2 = |AC|^2$   
 $2x^2 + 120x + 800 = 2x^2 + 12x + 36 + 74 + 6$   
 $-132x = 612$      $-108x = 612$   
 $x = -\frac{612}{108} = -\frac{17}{3}$   
 $C = (-\frac{17}{3}, -\frac{11}{3})$   
 Odpowiedź:  $D = (6, 2)$ ,  $C = (-\frac{17}{3}, -\frac{11}{3})$

## Przykład 26.

$D = (6, 2)$     Pół wierzchołek  $TD$  i od  $BC$  kąty.  
 proste, gdyż są one odcinkami  
 ściętymi.  
 Prosta  $\perp$  do  $AD$  przechodzi przez wierzchołek  $T$ .  
 $\frac{6}{10} \cdot 2 = -1 \cdot \frac{10}{8}$   
 $c_1 = -\frac{10}{8}$   
 $y = -\frac{10}{8}x + 8$   
 $y = x + 2$   
 $x + 2 = -\frac{10}{8}x + 8$      $y = x + 2$   
 $x + \frac{10}{8}x = 6$      $x = \frac{48}{26} + 2 = \frac{100}{26}$   
 $\frac{26}{8}x = 6$      $C = \left(\frac{24}{10}, \frac{50}{26}\right)$   
 $x = \frac{24}{26}$

Odpowiedź: Współrzędne punktu  $C$  wynoszą  $\left(\frac{24}{10}, \frac{50}{26}\right)$ , a punktu  $D = (6, 2)$ .



Oprócz błędów rachunkowych maturzyści popełniali też błędy merytoryczne. W poniższym przykładzie zdający umieścił punkt  $B$  błędnie na osi  $Ox$ .

Przykład 27.

$|CB| = |DC|$   
 $|DA| = |DB| = 6\sqrt{41}$   
 $\sqrt{(130-x_D)^2 + (32-y_D)^2} = 6\sqrt{41}$   
 $30 + x_D^2 - 60x_D + 1024 + y_D^2$   
 $k=1 \quad s=(-2, 0)$   
 $\vec{SD} = \vec{SB}$   
 $\begin{bmatrix} x_D - x_B \\ -2 - x_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - y_B \\ 0 - y_D \end{bmatrix}$   
 $A = [-2 - x_D; 0 - y_D] = [-2 - 0; 0 - 8]$   
 $|AB| = |AD| = 6\sqrt{41}$   
 $|CB| = |DC|$   
 $\angle CBA = \angle CDA$   
 $\angle CDA + \angle CBA = 180^\circ$   
 $\angle CDA = 90^\circ = \angle CBA$   
 $AC: x+2$   
 $AB: 8=b$   
 $CB: 8=b$   
 $32 = 30a + 8$   
 $30a = 24$   
 $a = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$   
 $y = \frac{4}{5}x + 8$   
 $x_C + 2 = 2x_C + 6$   
 $x_C + 2 = \frac{12}{5}x_C + 8$   
 $\frac{27}{5}x_C = 6$   
 $x_C = \frac{10}{9}$   
 $y_C = \frac{126}{27}$   
 Odpowiedź:  $D = (-4; 8)$ ;  $C = (\frac{10}{9}; \frac{126}{27})$

W kolejnym zamieszczonym tu rozwiązaniu zdający wykorzystał poprawnie fakt występowania kąta prostego przy wierzchołku  $B$  i wyznaczył współrzędne punktu  $C$ . Niestety, w dalszej części błędnie przyjął, że kąt przy wierzchołku  $C$  również jest prosty.

Przykład 28.

$$\begin{aligned}
 y &= a \cdot x + b & x - y + 2 &= 0 \\
 32 &= 3a + b & y &= x + 2 \\
 8 &= b \\
 32 &= 10a + 8 \\
 a &= \frac{24}{10} = \frac{12}{5} = \frac{2}{5} \\
 y &= \frac{2}{5}x + 8 \in \text{prosta } AB \\
 BC &\Rightarrow y = -\frac{5}{4}x + c \\
 8 &= c \\
 y &= -\frac{5}{4}x + 8 \in \text{prosta } BC \\
 \begin{cases} y = -\frac{5}{4}x + 8 \\ y = x + 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{5}{4}x + 8 &= x + 2 \\
 -5x + 32 &= 4x + 8 \\
 9x &= 24 \\
 x &= \frac{24}{9} = \frac{8}{3} = \frac{8}{3} \quad y = \frac{14}{3} \\
 C &\left(\frac{8}{3}, \frac{14}{3}\right) \\
 \text{prosta } DC &\Rightarrow y = \frac{5}{3}x + d \\
 \frac{14}{3} &= \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{3} + d & \frac{16}{20} + \frac{25}{20} \\
 \frac{14}{3} &= \frac{40}{15} + d \\
 d &= \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \\
 \begin{cases} y = \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} \\ y = -\frac{5}{4}x + 8 \end{cases} & \quad y = -\frac{5}{4}x + e \quad (AD) \\
 y &= -\frac{5}{4}x + \frac{139}{2} & 32 &= -\frac{5}{4} \cdot \frac{139}{2} + e \\
 \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} &= -\frac{5}{4}x + \frac{139}{2} & e &= \frac{139}{2} = 69,5 \\
 16x + \frac{40}{3} &= -25x + 1390 & 129x &= 4130 \\
 41x &= 1390 - \frac{40}{3} & x &= 33,58 \\
 123x &= 4170 - 40 & y &= -27,525 \\
 \text{Odpowiedź: } & C\left(\frac{8}{3}, \frac{14}{3}\right) \quad D(33,58; -27,525)
 \end{aligned}$$

Rozwiązania, w których zastosowano poprawne rozumowanie do wyznaczenia jednego wierzchołka i korzystano z błędnych wniosków przy wyznaczeniu drugiego wierzchołka, zdarzały się stosunkowo często. Najbardziej powszechne jednak było opuszczanie zadania, a także brak nawet niewielkiego postępu przy podejmowanych próbach rozwiązania. W przykładzie 29. zdający obliczył jedynie długość odcinka  $AB$ . W kolejnym rozwiązaniu (przykład 30.) zdający podjął próbę zapisania prostej prostopadłej do danej, ale przyjął niewłaściwy współczynnik kierunkowy.

Przykład 29.

$$A = (30, 32)$$

$$B = (0, 8)$$

$$x - y + 2 = 0$$

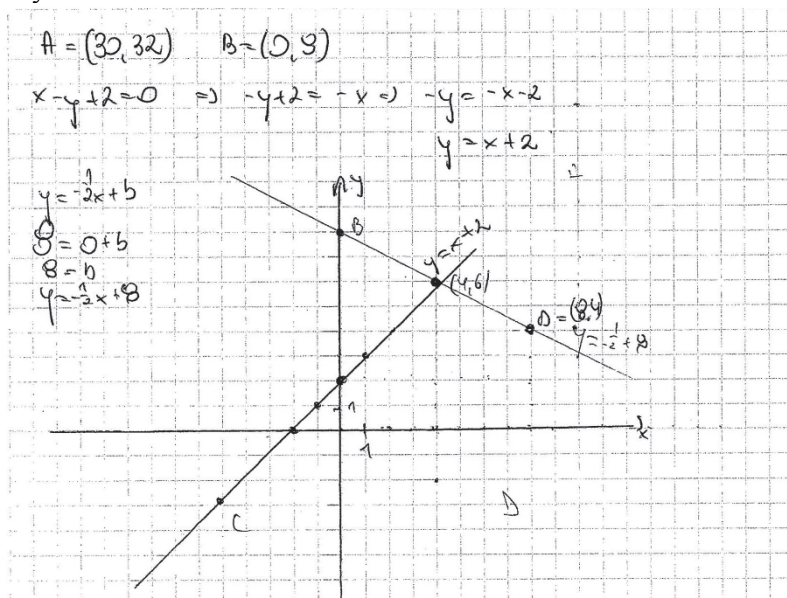
$$y = x + 2$$

$$|AB| = \sqrt{(0 - 30)^2 + (8 - 32)^2} =$$

$$= \sqrt{900 - 576}$$

$$|AB| = 18$$

Przykład 30.



Analiza rozwiązań zadania maturalnego z geometrii analitycznej nie może prowadzić do optymistycznych wniosków. Uzyskany przez maturzystów niski wynik jest ważnym sygnałem dotyczącym konieczności zmiany podejścia do nauczania umiejętności potrzebnych do rozwiązywania zagadnień geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej.

## Wnioski i rekomendacje

Egzamin maturalny z matematyki na **poziomie podstawowym** potwierdził, że zadania sprawdzające pojedyncze, nieskomplikowane, umiejętności na ogół nie sprawiają trudności absolwentom liceów i techników. W tym roku najlepsze wyniki zdający uzyskali za zadania geometryczne. W skali kraju 88% zdających poprawnie zastosowało zależność między kątem środkowym i kątem wpisanym, przy czym dodać należy, że w zadaniu trzeba było też wykazać się znajomością własności kątów wierzchołkowych i znajomością sumy miar kątów w trójkącie. Wysoki odsetek maturzystów (87%) potrafi wykorzystać fakt, że współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych końców odcinka. Ustalenie miar długości odcinków w figurach podobnych, zwłaszcza, jeśli rozważana sytuacja przedstawiona jest na rysunku, również nie stanowi problemu dla

zdecydowanej większości zdających. Wysoki odsetek zdających, którzy poprawnie wyznaczyli wartość funkcji sinus przy danym tangensie tego samego kąta, a także tych, którzy poprawnie odczytali z rysunku zbiór wartości funkcji, potwierdzają, że rozwiązanie zadania w przypadku, gdy możliwe jest wykorzystanie graficznej interpretacji pojęć, najczęściej kończy się sukcesem.

Na **poziomie rozszerzonym** szczególnie dobre rezultaty zdający uzyskali w zadaniach, wymagających jedynie zastosowania wzorów, co potwierdzili w sytuacjach, sprawdzających znajomość wzorów skróconego mnożenia i na funkcję pochodną.

Tegoroczny egzamin maturalny z matematyki na **poziomie rozszerzonym** ujawnił, że poważny problem stanowi opanowanie przez absolwentów liceów i techników umiejętności z zakresu geometrii na płaszczyźnie kartezjańskiej. Choć pojedyncze umiejętności wydają się być dobrze opanowane przez maturzystów, to rozwiązanie zadania sprawdzającego te same umiejętności, ale w połączeniu z koniecznością przeprowadzenia kilkuetapowego rozumowania i wykorzystania konkretnych własności rozważanych figur geometrycznych jest niemożliwe do zrealizowania w przypadku zdecydowanej większości zdających maturę. Jest to szczególnie niepokojące w sytuacji, gdy na poziomie rozszerzonym najtrudniejszym zadaniem okazuje się takie, które wymaga zastosowania wyłącznie umiejętności, przypisanych w podstawie programowej do poziomu podstawowego i zaplanowania kolejnych kroków poszukiwania rozwiązania. Warto podkreślić, że konieczne w tym zadaniu do wykonania rachunki wymagały jedynie operacji na liczbach całkowitych bądź na ułamkach o jednocyfrowym mianowniku.

Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej nie może być przez uczniów sprowadzona jedynie do zestawu wzorów. Ważne jest, by maturzyści mieli okazję połączyć własności figur geometrycznych z zależnościami, wynikającymi z położenia figury w układzie współrzędnych. Warto zachęcać uczniów do rozwiązywania tych samych problemów w geometrii metodami osadzonymi w tradycyjnej geometrii euklidesowej, jak i na płaszczyźnie kartezjańskiej, by eliminować powstawanie sztucznej bariery, która utrudnia maturzystom opracowanie strategii, wymagającej opisanie własności figur geometrycznych z wykorzystaniem współrzędnych punktów i równań, odpowiadających obiektom osadzonym w układzie współrzędnych.

Analiza rozwiązań, przedstawionych w pracach maturalnych z matematyki, pozwala zauważyć także, że często zdający stosują skomplikowane narzędzia w prostych sytuacjach, poszukują odpowiedzi według ściśle wyuczonego algorytmu, nie zważając na to, że rozwiązanie można znaleźć, o wiele łatwiej i szybciej, jeśli wykorzysta się własności konkretnych obiektów matematycznych, na przykład poszukiwanie pierwiastków trójmianu kwadratowego, niezależnie od postaci tego trójmianu, odbywa się z użyciem wyróżnika (liczenie delty), a pozbywanie się mianownika w przypadku nierówności realizowane jest przez mnożenie przez kwadrat wyrażenia z mianownika, nawet w sytuacji, gdy mianownik jest zawsze dodatni. W przypadku zadań geometrycznych zdający często stosują czasochłonne algorytmy i nie mają nawyku poszukiwania takich metod rozwiązania, które pozwalają na znalezienie odpowiedzi w krótkim czasie. Wielu przyszłych maturzystów traktuje matematykę jak zestaw gotowych algorytmów i procedur, których zastosowanie pozwala poprawnie rozwiązać zadania i w konsekwencji zdać egzamin. Stosowanie wyuczonych algorytmów w dążeniu do pozytywnego wyniku egzaminu nie zawsze oznacza dobór trafnych metod do poszukiwania odpowiedzi na postawione pytania. Nauczycielom trudno jest zmienić takie podejście uczniów. Warto jednak, tam gdzie to możliwe, odchodzić w procesie nauczania od stosowania wyłącznie popularnych algorytmów i pokazywać przyszłym maturzystom alternatywne ujęcia zagadnienia, pozwalające na szybsze rozwiązanie problemu.

Do zadań, które sprawiają maturzystom największą trudność, należą te wymagające uzasadnienia prawdziwości twierdzenia lub własności obiektów matematycznych, szczególnie z zakresu algebry. Zadania ze sformułowaniem „uzasadnij, że” są bardzo często pomijane. W przypadku podejmowania próby rozwiązania typowym błędem jest ograniczenie się do sprawdzenia prawdziwości wzoru lub tezy twierdzenia jedynie w konkretnym przypadku. Innym łatwym do zaobserwowania nawykiem jest pomijanie istotnej części rozumowania lub zapisywanie sformułowania w stylu „oczywiste jest...” bez

jakichkolwiek komentarzy w kluczowych miejscach przedstawianego uzasadnienia. Zdający powinni mieć świadomość, że stosowanie wyżej wspomnianych zabiegów nie przyczyni się do poprawienia wyniku egzaminu.

Tegoroczny egzamin maturalny z matematyki pozwolił zaobserwować niepokojącą sytuację. Stosunkowo często dało się zauważyć niższy wynik za rozwiązanie problemów typowych niż w przypadku zadań, wymagających opanowania złożonych umiejętności – u tego samego zdającego. Zadania, dotyczące elementarnych zagadnień, dla części maturzystów stanowiły punkt wyjścia do komplikowania typowych problemów i wyszukiwania na siłę pułapek, które w rzeczywistości nie występowały. Na przykład zdarzały się prace maturzystów, niemogących zadowolić się rozwiązaniem prostej nierówności trygonometrycznej i prezentujących w zamian nietypowe metody rozwiązań, które wręcz nie mogły doprowadzić do znalezienia właściwej odpowiedzi w typowym zadaniu. W trakcie nauki, także w ramach przygotowania do matury, należy pamiętać, że podstawą sukcesu jest dobre opanowanie umiejętności elementarnych. Skupianie się wyłącznie na poszukiwaniu rozwiązań zagadnień nietypowych może przyczynić się w efekcie do uzyskania rezultatów poniżej potencjalnych możliwości. Takie doświadczenie nie było obce uczniom, którzy zrezygnowali z utrwalania umiejętności mniej wyrafinowanych na rzecz poszukiwania problemów nietypowych.

Warto na koniec podkreślić, że większość maturzystów potrafiła poprawnie rozwiązać zadania, wymagające zastosowania konkretnego wzoru i odwołujące się do pojedynczych umiejętności, zapisanych w podstawie programowej. Chętnie, i na ogół poprawnie, rozwiązywane były przez maturzystów zadania, w których zamieszczono rysunek oraz takie, w których sporządzenie rysunku ułatwiało rozwiązanie. Trzeba zaznaczyć, że do zadań z dobrym wynikiem należały też takie, które wymagały przeprowadzenia krótkiego rozumowania lub połączenia kilku własności obiektów matematycznych. Daje się jednak zauważyć, że te same osoby, który uzyskują dobry wynik na maturze z poziomu podstawowego, nie potrafią rozwiązać większości zadań z poziomu rozszerzonego. W procesie edukacji ważne jest, by kształceniu umiejętności z poziomu rozszerzonego nadać równorzędne znaczenie jak utrwalaniu umiejętności z poziomu podstawowego.