

Analiza osiągnięć gimnazjalistów

Matematyka



Wstęp

W niniejszej publikacji przedstawiono osiągnięcia uczniów rozwiązujących zadania w **arkuszu standardowym z matematyki**, którzy przystąpili do egzaminu gimnazjalnego w 2015 r., w szkołach na terenie działania Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej w Poznaniu, tj. w gimnazjach w województwach: lubuskim, wielkopolskim i zachodniopomorskim. Dane statystyczne, dotyczące wyników egzaminu gimnazjalnego w 2015 r. podano na stronie internetowej www.oke.poznan.pl.

Arkusze standardowe składały się z 23 zadań, w tym 20 zadań zamkniętych i 3 zadań otwartych. Wśród zadań zamkniętych dominowały zadania wyboru wielokrotnego, w których uczeń wybierał jedną z czterech podanych odpowiedzi. W trzech zadaniach uczeń oceniał podane stwierdzenia. Zadania otwarte (21., 22. i 23.) wymagały od gimnazjalisty samodzielnego sformułowania rozwiązania.

W zadaniach wykorzystano schemat przedstawiający długość trasy kolejki liniowej, wykres punktowy oraz liniowy, rysunki figur płaskich oraz siatki brył.

Za rozwiązanie wszystkich zadań w arkuszu standardowym z matematyki uczeń mógł uzyskać maksymalnie 29 punktów (100%), w tym za każde zadanie zamknięte po jednym punkcie (razem 20 pkt), a za trzy zadania otwarte 9 punktów (zad. 21. – 3 pkt, zad. 22. – 2 pkt, zad. 23. – 4 pkt).

Za pomocą zadań sprawdzano, w jakim stopniu gimnazjaliści opanowali wymagania ogólne i szczegółowe z zakresu matematyki, określone w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla III etapu edukacyjnego oraz – w myśl zasady kumulatorywności przyjętej w podstawie – odnoszące się również do wymagań przypisanych wcześniejszym etapom edukacyjnym (I i II).

Średnie wyniki procentowe uzyskane przez uczniów (dane dla kraju, Okręgu oraz województw) za rozwiązanie zadań z zakresu matematyki zestawiono w Tabeli 1.

Tabela 1. Średnie wyniki procentowe uzyskane przez uczniów za rozwiązanie zadań z zakresu matematyki (arkusz standardowy)

kraj	Najwyższy średni wynik województwa w kraju	Okręg	Województwo		
			lubuskie	wielkopolskie	zachodniopomorskie
48%	51%	46,32%	45,84%	46,98%	45,13%

Najwyższy średni wynik z zakresu matematyki osiągnęli uczniowie przystępujący do egzaminu w województwie mazowieckim (51%).

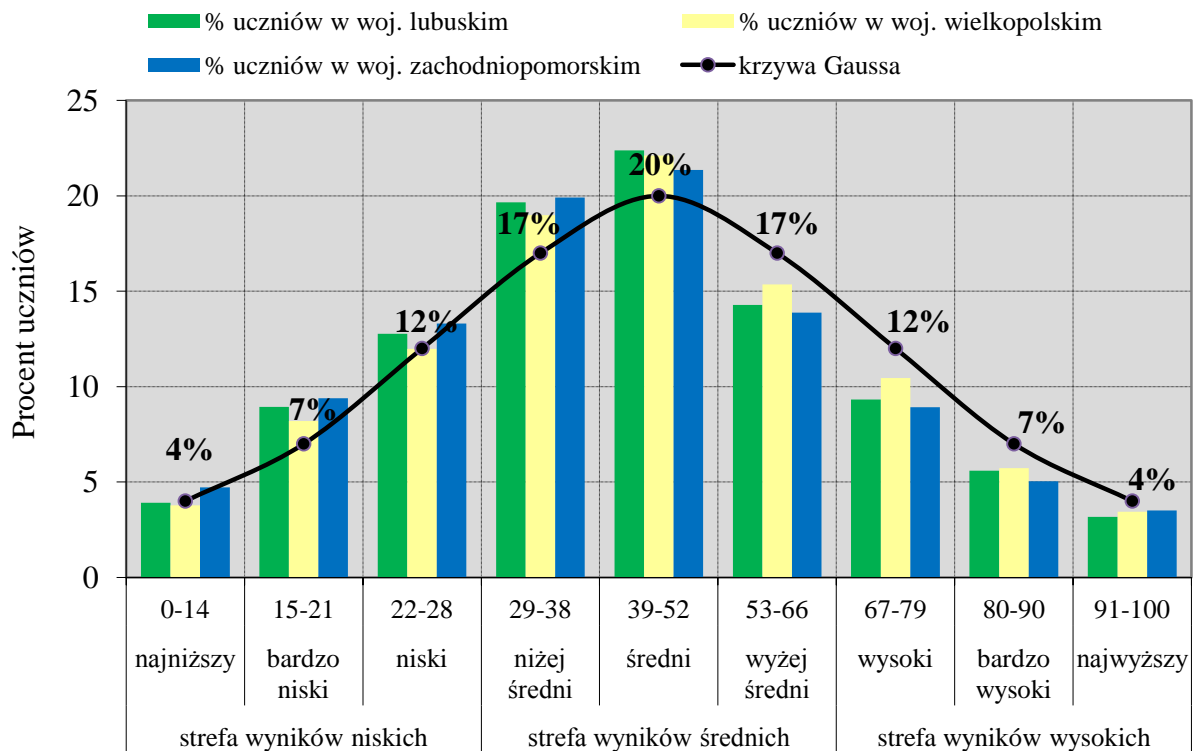
Uczniowie w województwie wielkopolskim osiągnęli wyniki wyższe od średniego wyniku w Okręgu (o około 0,66 p.p.), ale niższe zarówno od średniego wyniku w województwie mazowieckim (o około 4,02 p.p.), jak i od średniego wyniku w kraju (o 1,02 p.p.).

Gimnazjaliści w województwie lubuskim i w województwie zachodniopomorskim uzyskali wyniki niższe od średniego wyniku w Okręgu (odpowiednio o 0,48 p.p. i o 1,19 p.p.) oraz niższe od średniego wyniku w kraju (odpowiednio o 2,16 p.p. i o 2,87 p.p.). Uzyskane w tych województwach średnie wyniki są jednocześnie niższe od średniego wyniku w województwie mazowieckim, odpowiednio o 5,68 p.p. i 5,87 p.p.

Na kolejnych stronach przedstawiono analizę poziomu osiągnięć uczniów i szkół w zakresie matematyki.

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
Egzamin gimnazjalny 2015 - MATEMATYKA
analiza poziomu opanowania umiejętności

Na wykresie 1. zaprezentowano rozkład średnich wyników procentowych, uzyskanych przez uczniów w poszczególnych województwach w przedziałach krajowej skali staninowej.



Wykres 1. Rozkład średnich wyników procentowych uzyskanych przez uczniów w przedziałach krajowej skali staninowej z zakresu matematyki

Na podstawie analizy rozkładu średnich wyników procentowych można stwierdzić, że gimnazjaliści częściej uzyskiwali wyniki mieszczące się w strefie wyników niskich (stanin 1.-3.) niż w strefie wyników wysokich (stanin 7.-9.): w województwie lubuskim odpowiednio 25,6% i 18,1% uczniów, w województwie wielkopolskim 23,9% i 19,6% piszących, w województwie zachodniopomorskim 27,4% i 17,5% (zgodnie z rozkładem normalnym, przedstawionym na wykresie za pomocą krzywej Gaussa, wyników w tych strefach powinno być 23%). Uczniowie w Okręgu częściej uzyskiwali wyniki średnie (39-52% punktów, około 22% piszących) niż ich rówieśnicy w kraju (około 20%). Wyniki mieszczące się w przedziale 29-38% punktów uzyskało średnio około 19% uczniów w Okręgu, tj. o 2 p.p. więcej niż wynika to z rozkładu normalnego (17%).

Taki rozkład wyników świadczy o niewystarczającym poziomie panowania umiejętności matematycznych przez gimnazjalistów.

Wyniki na poziomie zadowalającym (równe lub większe od 70% punktów) uzyskało:

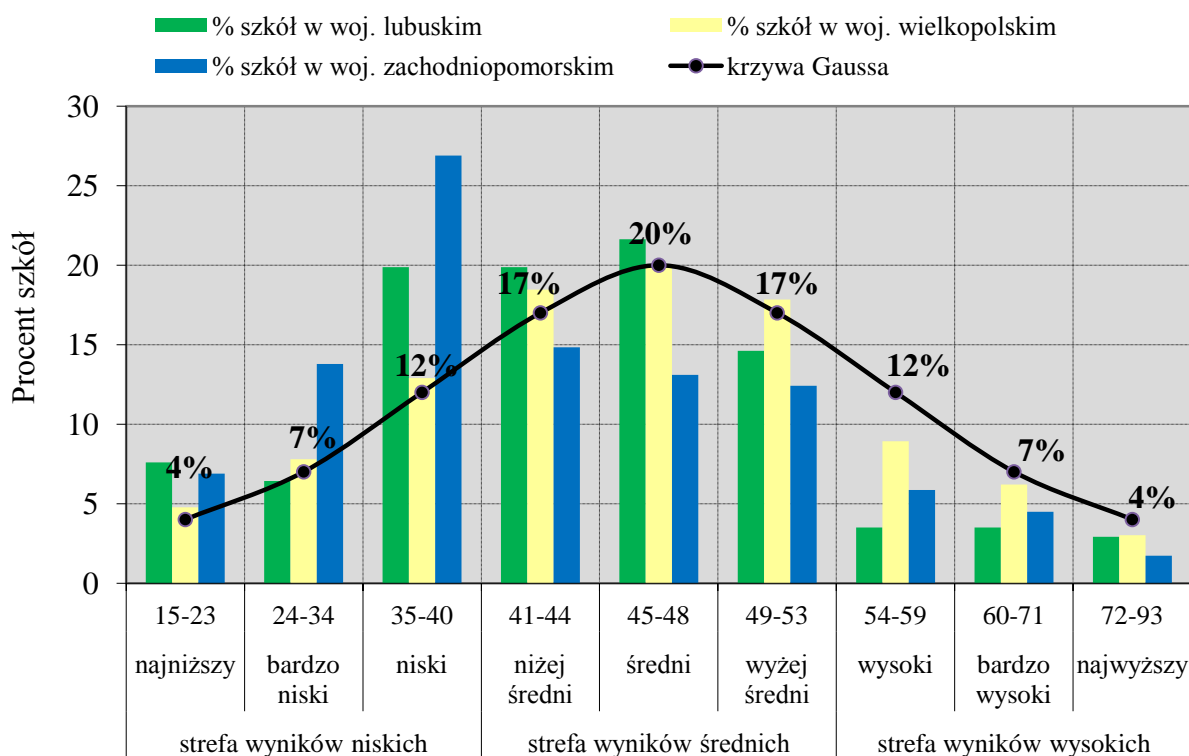
- 15,5% piszących w województwie lubuskim,
- 16,6% piszących w województwie wielkopolskim,
- 15,0% piszących w województwie zachodniopomorskim.

Maksymalną liczbę punktów (100%) uzyskało 497 uczniów (0,8% piszących), wśród nich 119 to laureaci konkursów przedmiotowych z zakresu przedmiotów przyrodniczych:

- 23 (0,2% piszących) w województwie lubuskim,
- 68 (0,2% piszących) w województwie wielkopolskim,
- 28 (0,2% piszących) w województwie zachodniopomorskim.

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
Egzamin gimnazjalny 2015 - MATEMATYKA
analiza poziomu opanowania umiejętności

Na wykresie 2. zaprezentowano rozkład średnich wyników procentowych, uzyskanych przez szkoły w poszczególnych województwach w przedziałach krajowej skali staninowej.



Wykres 2. Rozkład średnich wyników procentowych uzyskanych przez szkoły w przedziałach krajowej skali staninowej z zakresu matematyki

Poziom kształcenia w zakresie matematyki wśród szkół w Okręgu jest bardzo zróżnicowany. Najwyższy poziom kształcenia odnotowano dla szkół w województwie wielkopolskim: 25,5% szkół uzyskało wyniki w strefie wyników niskich, 56,4% osiągnęło wyniki w strefie wyników średnich. Odsetek szkół, uzyskujących wyniki w strefie wyników niskich w pozostałych województwach znacznie przekracza 23% – 33,9% w województwie lubuskim oraz 47,6% w województwie zachodniopomorskim. Wynik najniższy (stanin 1.) uzyskało prawie 8% szkół w województwie lubuskim i 7% w województwie zachodniopomorskim, tj. więcej niż w Wielkopolsce odpowiednio o około 2,8 p.p i 2,1 p.p. Wynik bardzo niski najczęściej uzyskiwały szkoły w województwie zachodniopomorskim (14% szkół). Również wynik niski częściej niż w Wielkopolsce uzyskały szkoły w województwie lubuskim (20% szkół) oraz zachodniopomorskim (27% gimnazjów). Odsetek szkół w województwie zachodniopomorskim, które uzyskały wyniki ze strefy wyników średnich, jest mniejszy niż w Wielkopolsce i w województwie lubuskim o 16 p.p. Wyniki w strefie wyników wysokich najczęściej uzyskiwały szkoły w województwie wielkopolskim – 18,2% szkół. W pozostałych województwach wyniki mieszczące się w tej strefie uzyskało około 10% szkół w województwie lubuskim i 12% w województwie zachodniopomorskim.

Największe zróżnicowanie między uzyskiwanymi przez szkoły wynikami wystąpiło w staninie 3., tj. wynik niski (około 20% szkół w województwie lubuskim, 18% gimnazjów w województwie wielkopolskim i 15% szkół w województwie zachodniopomorskim).

Na kolejnych stronach zaprezentowano analizę średnich wyników, uzyskanych za rozwiązanie poszczególnych zadań. Jest ona podstawą do wskazania mocnych i słabych stron gimnazjalistów w zakresie umiejętności matematycznych.

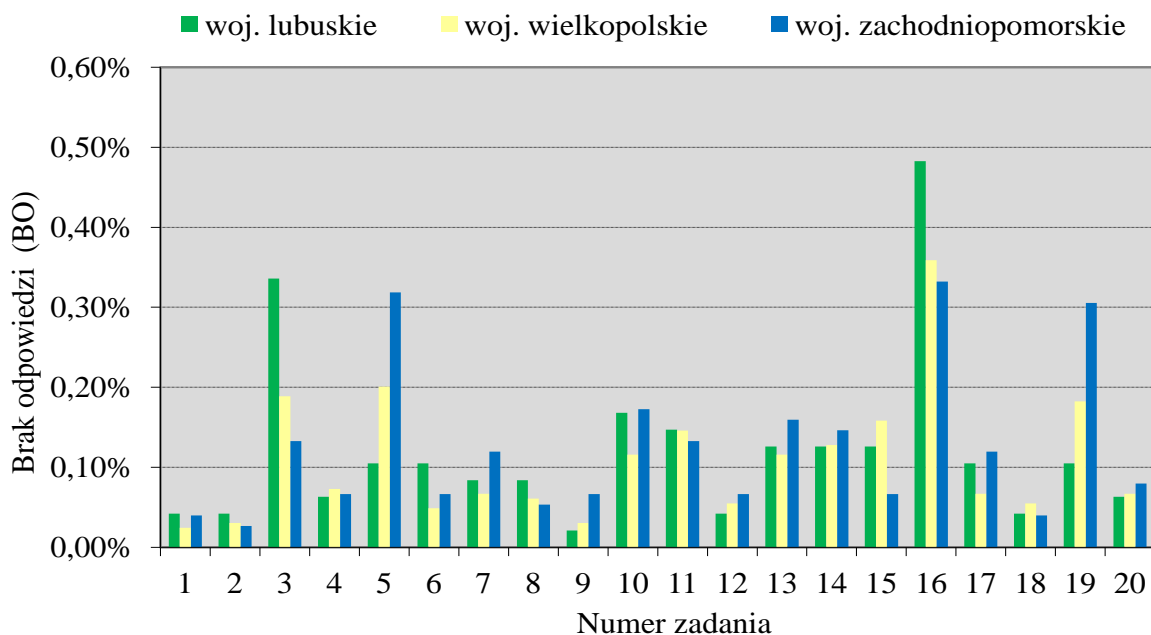
Wyniki analizowano w odniesieniu do podstawy programowej oraz z uwzględnieniem:

- braku odpowiedzi i wielokrotnych zaznaczeń odpowiedzi,
- stopnia trudności zadań w oparciu o wartość współczynnika łatwości/trudności¹ (również z podziałem na pięć wymagań ogólnych),
- wybieralności odpowiedzi do zadań zamkniętych,
- rozwiązań zadań otwartych.

1. Analiza wybieralności odpowiedzi

Analizę osiągnięć gimnazjalistów rozpoczynamy od przedstawienia, jaki procent piszących nie zaznaczył odpowiedzi do zadań zamkniętych, a jaki procent wskazał kilka odpowiedzi do jednego zadania. W obu przypadkach skutkowało to otrzymaniem zera punktów za dane zadanie.

Jak liczne były to grupy trzecioklasistów w poszczególnych województwach, przedstawiono na wykresie 3.



Wykres 3. Procent piszących, którzy nie zaznaczyli odpowiedzi do zadań zamkniętych z matematyki

W każdym województwie brak zaznaczenia odpowiedzi dotyczy wszystkich zadań w arkuszu. Podczas tegorocznego egzaminu z matematyki frakcja opuszczeń w zadaniach zamkniętych nie przekroczyła 0,50% populacji w każdym z województw.

¹ Trudność zadań częściej wyrażana jest współczynnikiem łatwości niż trudności. Łatwość zadania (p) punktowanego 0-1 (0 punktów za błędną odpowiedź lub jej brak, 1 punkt za podanie poprawnej odpowiedzi) jest stosunkiem liczby uczniów, którzy prawidłowo rozwiązyli zadanie, do liczby uczniów, którzy przystąpili do egzaminu. Trudność zadania (q) to stosunek liczby uczniów, którzy nie rozwiązyli zadania do liczby uczniów, którzy przystąpili do egzaminu. Związek między łatwością i trudnością wyraża się wzorem: $q = 1 - p$.

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
analiza poziomu opanowania umiejętności

Najwyższą frakcję opuszczeń odnotowano w zdaniu 16. (0,48% w województwie lubuskim, 0,36% w województwie wielkopolskim oraz 0,33% w województwie zachodniopomorskim), w którym należało obliczyć wysokość trapezu, który powstał w wyniku podzielenia sześciokąta foremnego o boku 2 cm na dwa przystające trapezy równoramienne.

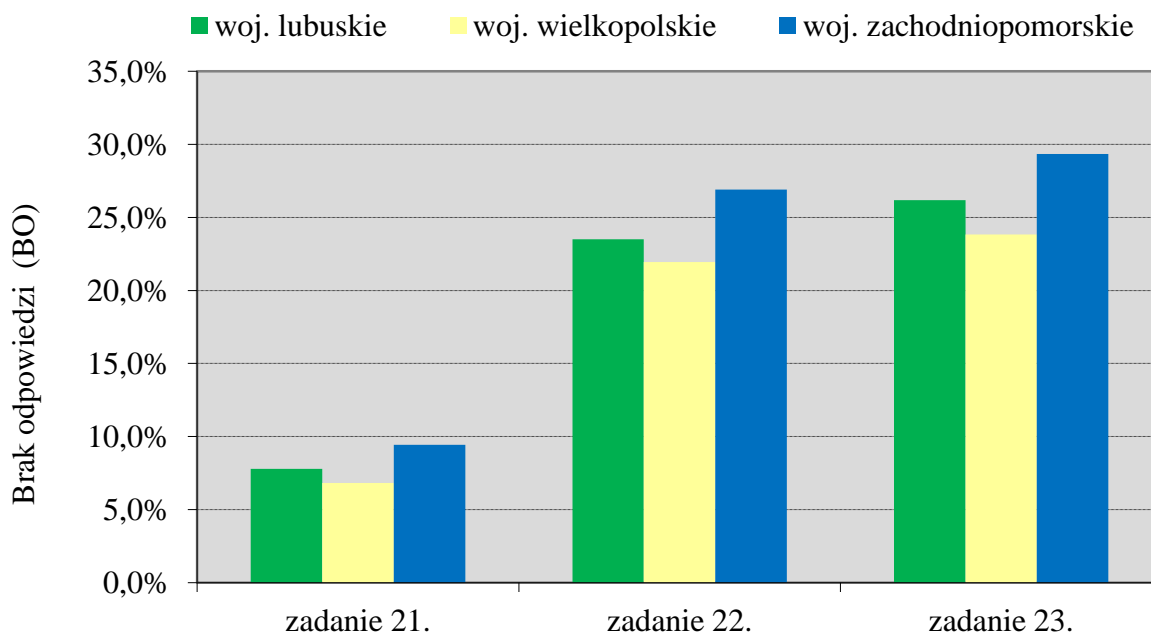
Frakcję opuszczeń przekraczającą 0,35% odnotowano również:

- a) w województwie lubuskim dla zadania 3., w którym należało obliczyć wartość wyrażenia algebraicznego, a następnie określić położenie otrzymanej liczby na osi liczbowej,
- b) w województwie zachodniopomorskim dla:
 - zadania 5., w którym należało porównać potęgi o różnych wykładnikach naturalnych i takich samych podstawach, a następnie wskazać cyfrę jedności liczby 7^{190} ,
 - zadania 19., za pomocą którego sprawdzano umiejętność obliczania objętości i pole powierzchni prostopadłościanu przy danych długościach krawędzi.

Najczęściej opuszczane zadania miały formę wyboru wielokrotnego – piszący wybierał jedną odpowiedź spośród czterech.

Istotny wpływ na średni wynik uzyskany za rozwiązanie zadań, ma frakcja opuszczeń zadań otwartych (wielopunktowych).

Na wykresie 4. przedstawiono, ilu piszących w poszczególnych województwach nie podjęło próby rozwiązania zadań otwartych.



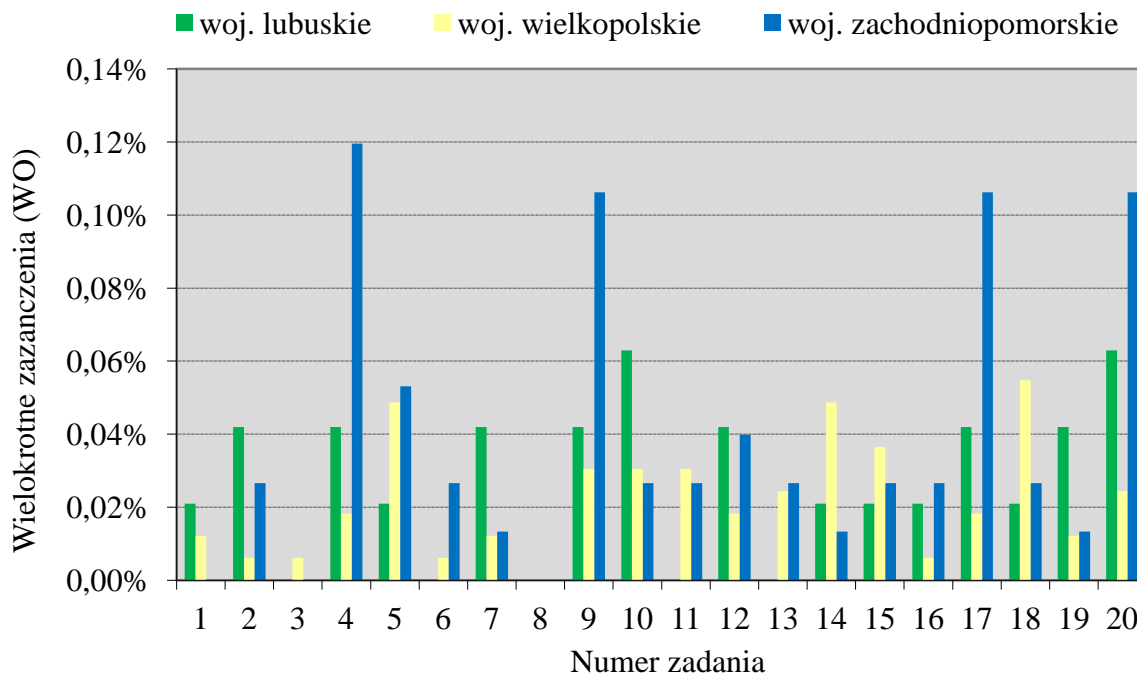
Wykres 4. *Procent piszących, którzy nie podjęli próby rozwiązania zadania otwartego z matematyki*

Na podstawie analizy wykresu należy stwierdzić, że:

- zachodniopomorscy gimnazjaliści częściej niż uczniowie z innych województw nie podjęli próby rozwiązania zadań otwartych,
- w każdym województwie największy odsetek piszących nie podjął próby rozwiązania zadania 23., w którym wymagano obliczenia objętości powstałej bryły.

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
analiza poziomu opanowania umiejętności

Drugim czynnikiem, wpływającym na otrzymane wyniki, jest zaznaczenie więcej niż jednej odpowiedzi do zadań zamkniętych. Rozkład wielokrotnych zaznaczeń dla poszczególnych zadań w trzech województwach Okręgu przedstawiono na wykresie 5.



Wykres 5. Procent piszących, którzy zaznaczyli kilka odpowiedzi do jednego zadania zamkniętego z matematyki

Więcej niż jedną (wymaganą) odpowiedź zaznaczono:

- w województwie wielkopolskim – w dziewiętnastu zadaniach,
- w województwie zachodniopomorskim – w siedemnastu zadaniach,
- w województwie lubuskim – w piętnastu zadaniach.

Wielokrotnego zaznaczenia odpowiedzi nie odnotowano dla zadania 8. (we wszystkich województwach).

Najwyższe wskaźniki dotyczące wielokrotnych zaznaczeń, przekraczające 0,10%, stwierdzono w województwie zachodniopomorskim dla:

- zadania 4., za pomocą którego sprawdzano umiejętność wyłączania czynnika przed znak pierwiastka,
- zadania 9., w którym uczeń obliczał procent danej liczby,
- zadania 17., za pomocą którego sprawdzano znajomość własności trójkątów prostokątnych podobnych piszący i umiejętność obliczania pola oraz obwodu czworokątów,
- zadania 20., w którym trzecioklasiści obliczali objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego i sześcianu oraz wyznacжали długość krawędzi sześcianu.

Wszystkie ww. zadania były zadaniami typu prawda-falsz, w których uczeń oceniał stwierdzenia na podstawie wykonanych działań.

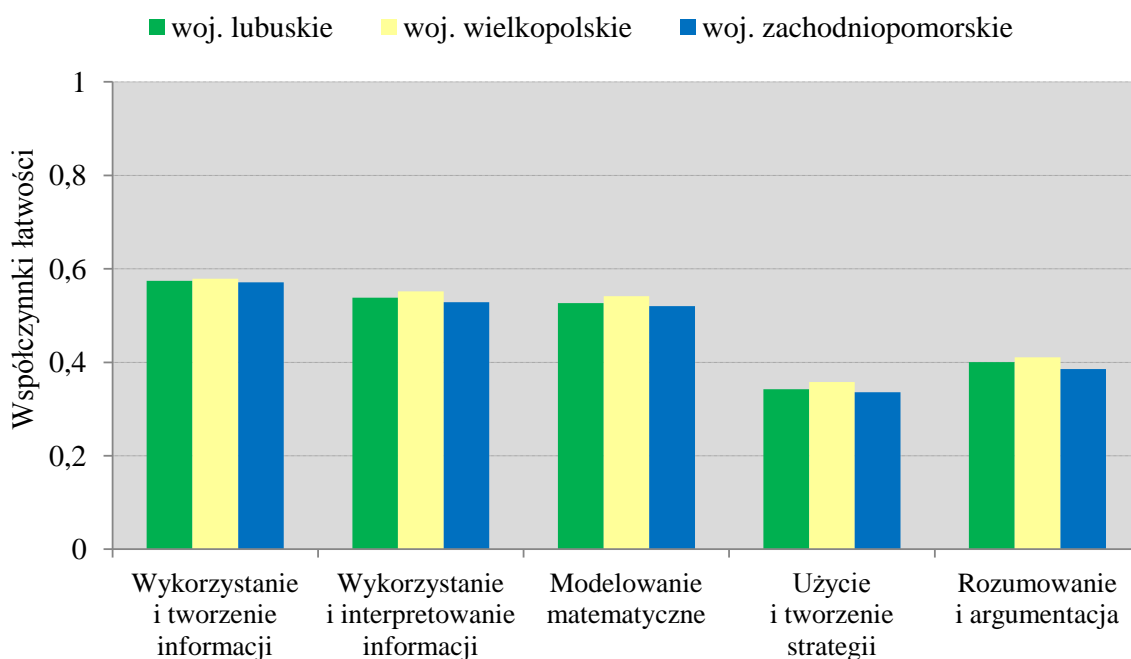
2. Analiza poziomu opanowania umiejętności ogólnych

Analizę jakościową wyników egzaminu gimnazjalnego z zakresu matematyki przeprowadzono w oparciu o interpretację współczynników łatwości/trudności zadań. W tabeli 2. podano wykaz wymagań ogólnych, który ułatwi ocenę stopnia opanowania przez tegorocznych trzecioklasistów wiadomości i umiejętności określonych w podstawie programowej.

Tabela 2. Wykaz wymagań ogólnych z zakresu matematyki

- Wymaganie ogólne I. – **Wykorzystanie i tworzenie informacji.**
- Wymaganie ogólne II. – **Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.**
- Wymaganie ogólne III. – **Modelowanie matematyczne.**
- Wymaganie ogólne IV. – **Użycie i tworzenie strategii.**
- Wymaganie ogólne V. – **Rozumowanie i argumentacja.**

Na wykresie 6. przedstawiono współczynniki łatwości otrzymane dla wymagań ogólnych z zakresu matematyki w poszczególnych województwach.

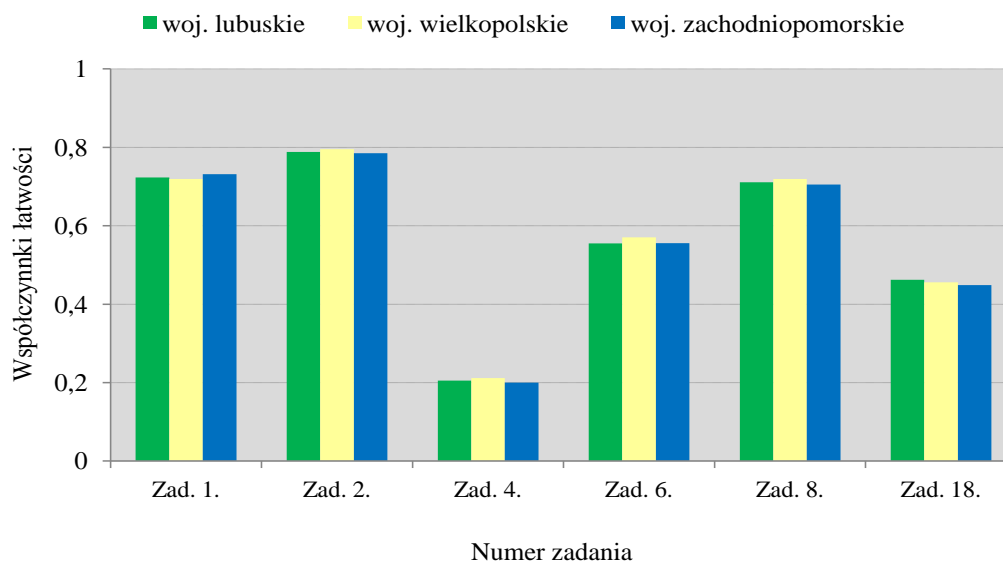


Wykres 6. Poziom opanowania wymagań ogólnych z matematyki

Na podstawie analizy wykresu można stwierdzić, że żadne z wymagań ogólnych nie zostało przez gimnazjalistów opanowane na poziomie zadowalającym. Umiejętnością opanowaną na najniższym poziomie jest użycie i tworzenie strategii.

Poziom oraz zróżnicowanie osiągnięć piszących, w odniesieniu do pięciu wymagań ogólnych z zakresu matematyki, przedstawiono na wykresach 7. – 11.

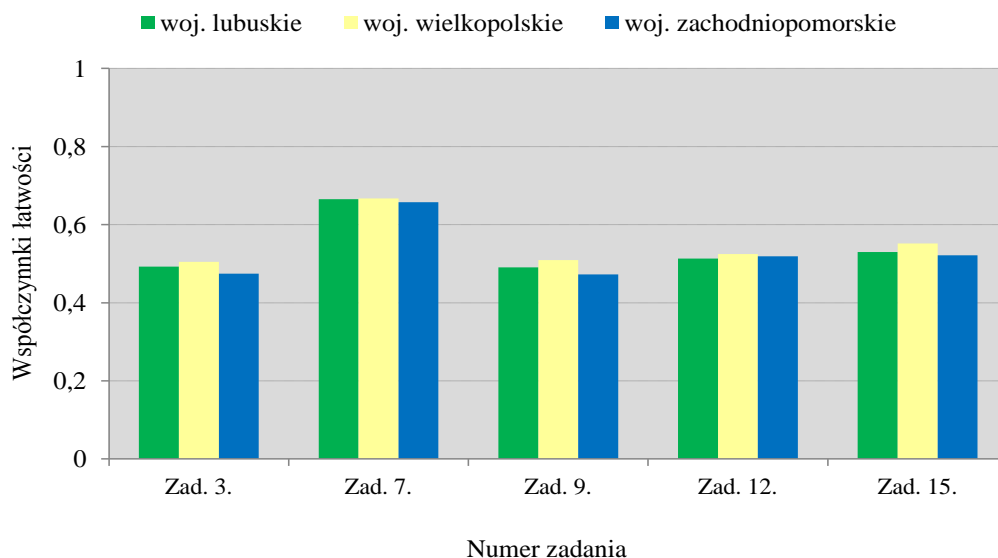
Wykorzystanie i tworzenie informacji



Wykres 7. Współczynniki łatwości zadań, za pomocą których sprawdzano wiadomości i umiejętności w ramach I wymagania ogólnego (wykorzystanie i tworzenie informacji)

Interpretowanie i tworzenie tekstów matematycznych oraz używanie języka matematycznego do opisu rozumowania okazało się dla gimnazjalistów umiarkowanie trudne. Na poziomie zadowalającym uczniowie rozwiązyli zadania 1., 2., i 8., w których gimnazjaliści wykorzystywali informacje podane w tekście lub na rysunku, a następnie wykonywali obliczenia prowadzące do rozwiązania problemu. Najniższy poziom rozwiązania zadania odnotowano dla zadania 4., w którym uczeń stosował różne prawa dotyczące działań na pierwiastkach.

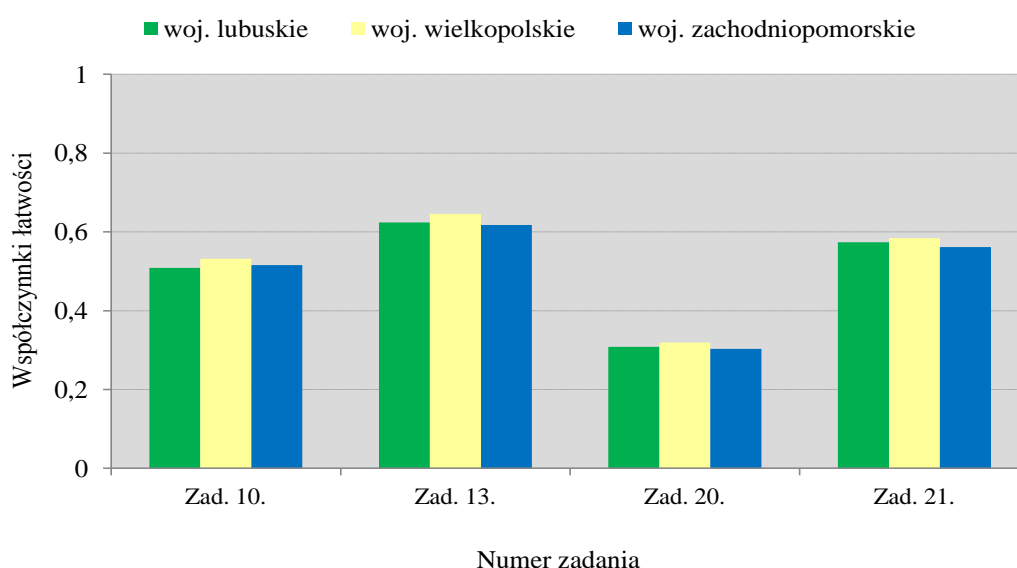
Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji



Wykres 8. Współczynniki łatwości zadań, za pomocą których sprawdzano wiadomości i umiejętności w ramach II wymagania ogólnego (wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji)

Umiarkowanie trudne były dla piszących umiejętności, związane z używaniem prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych i operowaniem nimi. Uczniowie nadal nie potrafili poprawnie obliczać wartości wyrażeń arytmetycznych oraz stosować definicji i twierdzeń w typowych kontekstach. Żadne z zadań (za pomocą których sprawdzano umiejętność wykorzystywania i interpretowania reprezentacji) nie zostało rozwiązane na poziomie zadowalającym. Najwyższy poziom wykonania zadania odnotowano dla zadania 7., w którym uczniowie zapisywali związek między wielkościami za pomocą układu dwóch równań. Najtrudniejsze dla gimnazjalistów okazały się obliczenia procentowe (zadanie 9.) oraz interpretacja liczby wymiernej na osi liczbowej (zadanie 3.)

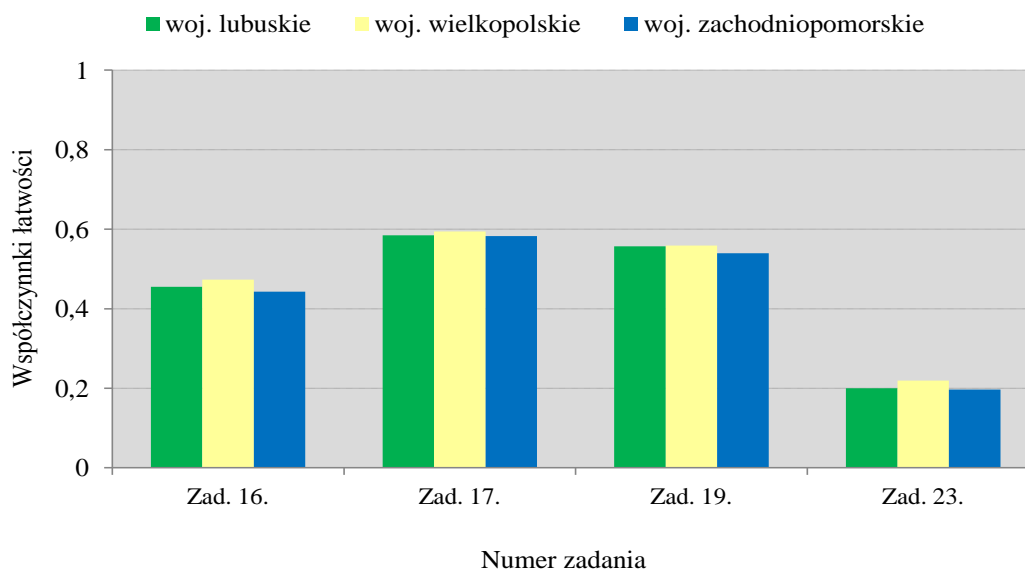
Modelowanie matematyczne



Wykres 9. *Współczynniki łatwości zadań, za pomocą których sprawdzano wiadomości i umiejętności w ramach III wymagania ogólnego (modelowanie matematyczne)*

Dobieranie bądź budowanie modelu matematycznego do opisanej sytuacji, szczególnie praktycznej okazało się dla gimnazjalistów umiarkowanie trudne. Żadne z zadań (za pomocą których sprawdzano umiejętność modelowania matematycznego) nie zostało rozwiązane na poziomie zadowalającym. W zadaniu 13. odnotowano najwyższy poziom wykonania zadania – około 62% piszących poprawnie wskazało wykres, będący graficzną interpretacją zależności zapisanej za pomocą wzoru. Najtrudniejsze dla gimnazjalistów okazało się zadanie sprawdzające umiejętność obliczania objętości brył (zadanie 20.)

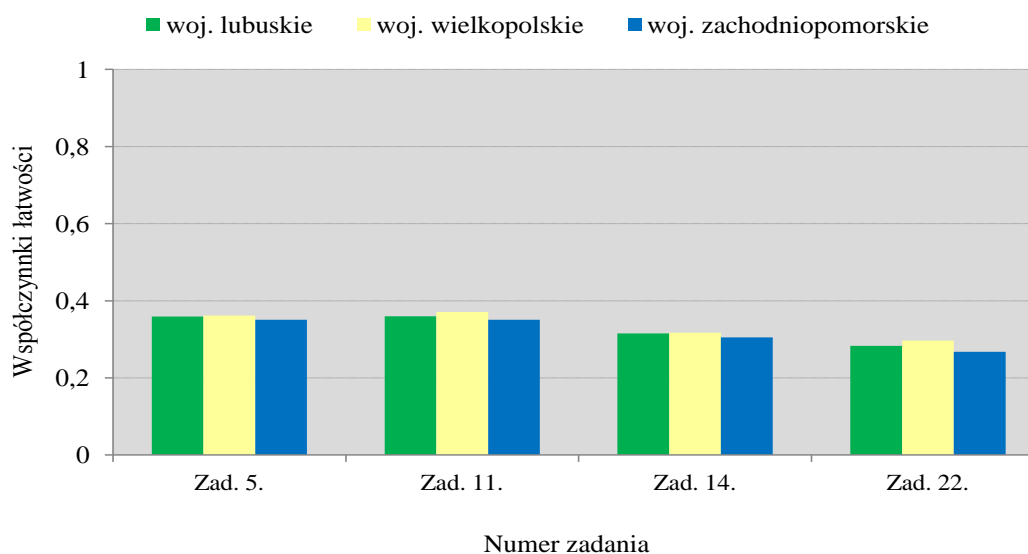
Użycie i tworzenie strategii



Wykres 10. Współczynniki łatwości zadań, za pomocą których sprawdzano wiadomości i umiejętności w ramach IV wymagania ogólnego (użycie i tworzenie strategii)

Użycie i tworzenie strategii – ustalanie zależności między podanymi informacjami, zaplanowanie i wykonanie ciągu czynności, prowadzących do rozwiązania problemu oraz krytyczna ocena otrzymanych wyników – to umiejętności, których uczniowie nie opanowali. Żadne z zadań nie zostało rozwiązane na poziomie zadowalającym. Za pomocą zadań sprawdzano m.in., czy gimnazjaliści potrafią obliczać obwody i pola trójkątów oraz czworokątów, stosując własności trójkątów prostokątnych. Najtrudniejsze dla uczniów okazało się zadanie 23., w którym należało obliczyć objętość walca, wykorzystując informacje zawarte w treści zadania.

Rozumowanie i argumentacja



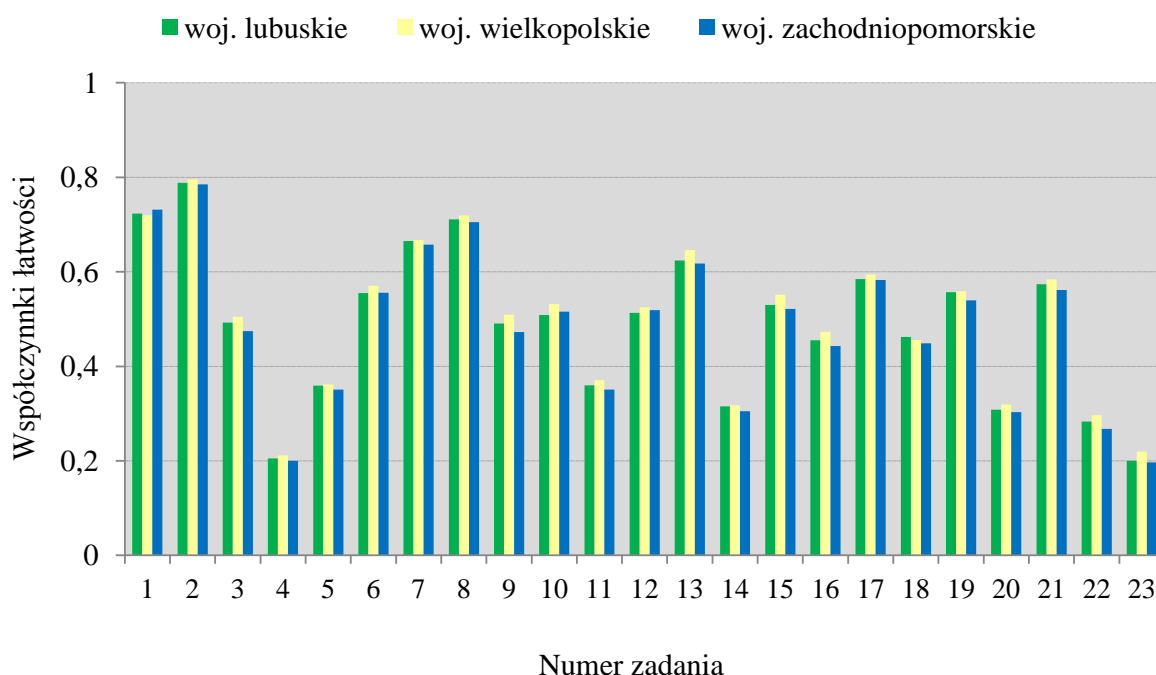
Wykres 11. Współczynniki łatwości zadań, za pomocą których sprawdzano wiadomości i umiejętności w ramach V wymagania ogólnego (rozumowanie i argumentacja)

Umiejętność rozumowania i argumentacji opanowana została na poziomie około 36%. Wszystkie zadania okazały się dla uczniów trudne. Za pomocą zadań sprawdzano, czy gimnazjaliści potrafią np. porównać potęgi o różnych wykładnikach naturalnych i takich samych podstawach, wyznaczyć średnią arytmetyczną i medianę oraz przeprowadzić prostego rozumowanie i uzasadnić jego poprawność.

3. Analiza poziomu opanowania umiejętności szczegółowych

Za miarę poziomu opanowania przez piszących wiadomości i umiejętności przyjęto współczynniki łatwości zadań.

Na wykresie 12. przedstawiono współczynniki łatwości zadań z zakresu matematyki w poszczególnych województwach.



Wykres 12. *Współczynniki łatwości zadań sprawdzających wiadomości i umiejętności z zakresu matematyki*

Na podstawie analizy współczynników łatwości poszczególnych zadań można stwierdzić, że:

- gimnazjaliści z Wielkopolski – w większości zadań – uzyskali wyższe wyniki niż uczniowie z województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego,
- na poziomie zadowalającym rozwiązano trzy zadania:
 - zadanie 1. i zadanie 2. (interpretacja danych i obliczenie długości wskazanego odcinka trasy kolejki górskiej oraz czasu trwania przejazdu),
 - zadanie 8. (interpretacja danych przedstawionych na wykresie i obliczenie wagi kulki lodów),
- najwyższy poziom rozwiązania odnotowano dla zadania 8.,
- najtrudniejsze okazały się dwa zadania:
 - zadanie 4., sprawdzające umiejętność wyłączania czynnika przed znak pierwiastka,
 - zadanie 23., wymagające od ucznia obliczenia objętości bryły.

3a. Analiza odpowiedzi do zadań zamkniętych

Na kolejnych stronach podano treść zadań, badane umiejętności, wybieralność odpowiedzi oraz współczynniki łatwości (dla całej populacji piszących) i krótki komentarz.

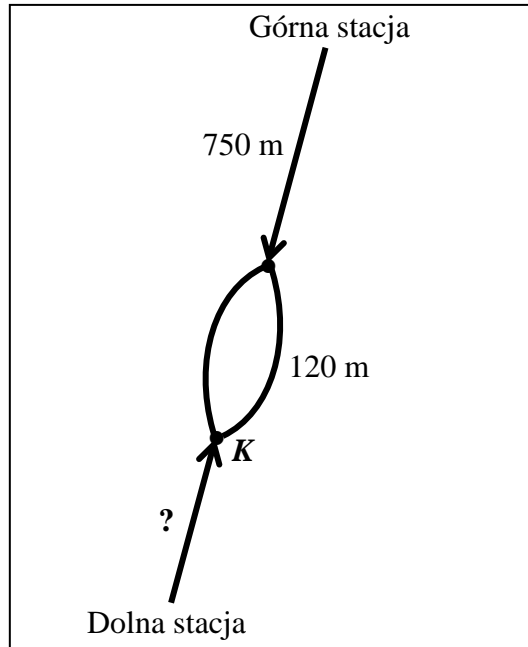
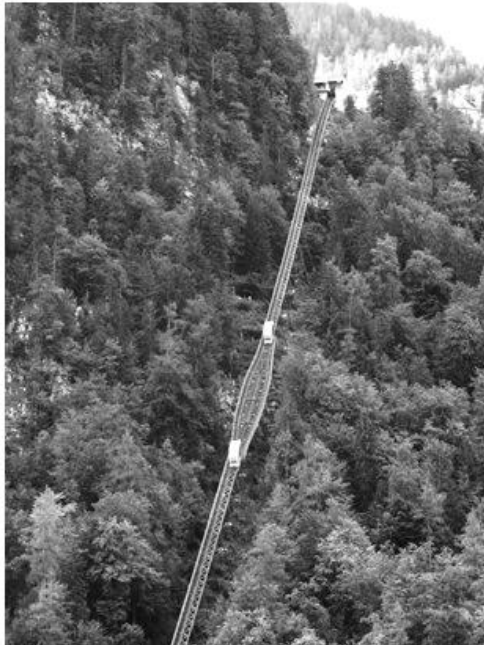
Aby ułatwić analizę odpowiedzi, jakich udzielali uczniowie, wprowadzono skróty. Wyjaśnienie skrótów zastosowanych w opracowaniu:

BO	– brak odpowiedzi	– oznacza, że uczeń nie podjął próby rozwiązania zadania,
WO	– wielokrotna odpowiedź	– oznacza, że uczeń zaznaczył w karcie kilka odpowiedzi do jednego zadania,
T	– tak	– oznacza, że podane uzasadnienie, wniosek czy stwierdzenie jest trafne (uzasadnione),
N	– nie	– oznacza, że podane uzasadnienie, wniosek czy stwierdzenie jest nietrafne (nieuzasadnione),
P	– prawda	– oznacza, że uczeń dokonał oceny zdania (wniosku, stwierdzenia) i uznał je za prawdziwe,
F	– fałsz	– oznacza, że uczeń dokonał oceny zdania (wniosku, stwierdzenia) i uznał je za fałszywe.

Poprawną odpowiedź wyróżniono.

Informacja do zadań 1. i 2.

Każda z dwóch kolejek górskich przebywa drogę 150 metrów w ciągu minuty. Na schemacie zaznaczono niektóre długości trasy pokonywanej przez kolejki.



Zadanie 1. (0-1)

Jak długo trwa przejazd kolejki od górnej stacji do punktu *K*? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 5 minut B. 5 minut i 8 sekund **C. 5 minut i 48 sekund** D. 6 minut

Wymagania ogólne

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

Wymagania szczegółowe

Umiejętność z zakresu szkoły podstawowej.

12. Obliczenia praktyczne. Uczeń:

9) w sytuacji praktycznej oblicza: drogę przy danej prędkości i danym czasie, prędkość przy danej drodze i danym czasie, czas przy danej drodze i danej prędkości; [...].

Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odp.	L	W	Z	L	W	Z
A.	6,27	6,28	6,06	0,72	0,72	0,73
B.	17,25	16,81	15,00			
C.	71,82	71,76	73,60			
D.	4,60	5,12	5,31			
BO	0,04	0,02	0,04			
WO	0,02	0,01	0,00			
Interpretacja współczynnika łatwości						
Zadanie okazało się dla piszących łatwe.						

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
analiza poziomu opanowania umiejętności

Komentarz

Treść zadania odwołuje się do sytuacji praktycznej. Za pomocą zadania sprawdzana była umiejętność odczytywania i przetwarzania informacji przedstawionych w formie opisu oraz schematu. Uczniowie obliczali czas potrzebny na przejazd kolejki od górnej stacji do wskazanego miejsca – znali długość drogi (interpretacja schematu – długość odcinków trasy wyrażona w metrach). Ponad 71% piszących poprawnie rozwiązało zadanie. Wśród błędnych odpowiedzi prawie co piąty uczeń wskazywał odpowiedź B, traktując 0,8 minuty jako 8 sekund. Dla gimnazjalistów zamiana czasu z minut na sekundy nie powinna stanowić problemu, jednak nie wszyscy uczniowie wykonali te działania poprawnie.

Zadanie 2. (0-1)

Z górnej stacji kolejka wyjeżdża o 1 minutę wcześniej niż z dolnej. Kolejki równocześnie wjeżdżają na pętlę mijania.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Długość trasy kolejki od dolnej stacji do punktu K jest równa

- A. 240 m B. 450 m **C. 600 m** D. 900 m

Wymagania ogólne

I. Wykorzystywanie i tworzenie informacji.

Wymagania szczegółowe

1. Liczby wymierne dodatnie. Uczeń:

7) stosuje obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, w tym do zamiany jednostek (jednostek prędkości, gęstości itp.).

Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odp.	L	W	Z	L	W	Z
A.	4,07	4,27	4,10	0,79	0,80	0,78
B.	8,27	7,37	8,09			
C.	78,28	79,01	78,54	Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	9,30	9,32	9,22	Zadanie okazało się dla piszących łatwe.		
BO	0,04	0,03	0,03			
WO	0,04	0,01	0,03			

Komentarz

Treść zadania dotyczy sytuacji praktycznych. Do rozwiązania zadania niezbędna była dokładna analiza zarówno schematu, jak i informacji dotyczącej kolejek. Na podstawie tych informacji piszący wnioskowali, że kolejki poruszają się z taką samą prędkością („Każda z dwóch kolejek górskich przebywa drogę 150 metrów w ciągu minuty”). Około 79% uczniów poprawnie wyznaczyło długość trasy kolejki od dolnej stacji do punktu K. Jednak średnio co dziesiąty uczeń uznał, że przy **krótszym czasie przejazdu** kolejki i przy **takiej samej prędkości**, przebywa ona **dłuższy odcinek trasy** – odpowiedź D. Zależności między prędkością, czasem i przebytą drogą są znane uczniom również z lekcji fizyki, jednak nie zostały one utrwalone i nie były przez uczniów poprawnie stosowane.

Zadanie 3. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Na osi liczbowej liczba równa wartości wyrażenia arytmetycznego $\left(1 - \frac{5}{6}\right) - 0,5$ znajduje się między

- A. -1 i $-0,5$ **B. $-0,5$ i 0** C. 0 i $0,5$ D. $0,5$ i 1

Wymagania ogólne

II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.

Wymagania szczegółowe

2. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie). Uczeń:

- 1) interpretuje liczby wymierne na osi liczbowej. Oblicza odległość między dwiema liczbami na osi liczbowej.
- 4) oblicza wartości nieskomplikowanych wyrażeń arytmetycznych zawierających liczby wymierne.

Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
A.	27,18	26,07	27,89	0,49	0,50	0,47
B.	50,43	51,59	48,49			
C.	9,97	10,34	11,32	Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	12,09	11,80	12,17	Zadanie okazało się dla piszących		
BO	0,34	0,19	0,13	trudne.	umiarkowanie	trudne.
WO	0,00	0,01	0,00		trudne.	

Komentarz

Za pomocą zadania sprawdzano umiejętność wykonywania działań na ułamkach. Piszący musiał obliczyć wartość wyrażenia arytmetycznego, a następnie usytuować uzyskany wynik między dwiema liczbami. Około 50% uczniów w Okręgu rozwiązało zadanie poprawnie. Pozostali wskazywali niepoprawne odpowiedzi, popełniali błąd w obliczeniu wartości wyrażenia lub błędnie określali położenie liczby na osi liczbowej: ponad 20% uczniów umiejscowiło wynik działania między dwiema dodatnimi liczbami (uzyskali w wyniku działania liczbę dodatnią), natomiast co czwarty piszący wskazał odpowiedź A.

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
 Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
analiza poziomu opanowania umiejętności

Zadanie 4. (0-1)

Dane jest przybliżenie $\sqrt{5} \approx 2,236$.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

$\sqrt{20} \approx 2 \cdot 2,236$	P	F
$\sqrt{500} \approx 22,36$	P	F

Wymagania ogólne

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

Wymagania szczegółowe

4. Pierwiastki. Uczeń:

2) wyłącza czynnik przed znak pierwiastka oraz włącza czynnik pod znak pierwiastka.

Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
PP	19,75	21,56	20,43	0,21	0,21	0,20
PF	21,47	20,63	21,54			
FP	26,34	26,17	26,48			
FF	32,34	31,54	31,36			
BO	0,06	0,07	0,07			
WO	0,04	0,02	0,12			
				Interpretacja współczynnika łatwości		
				Zadanie okazało się dla gimnazjalistów trudne.		

Komentarz

Za pomocą zadania sprawdzano umiejętność wykonywania działań na pierwiastkach. Jeden ze sposobów rozwiązania zadania polegał na przedstawieniu pierwiastków $\sqrt{20}$ i $\sqrt{500}$ w postaci iloczynów dwóch liczb: całkowitej i przybliżenia liczby $\sqrt{5}$. Uczeń musiał więc wyłączyć odpowiedni czynnik przed znak pierwiastka, a następnie po wykonaniu obliczeń piszący formułował wniosek, że przedstawione przybliżenia są poprawne. Inna metoda rozwiązania zadania polegała na porównaniu pierwiastków. Należało wykonać następujące działania:

$$\sqrt{20} : \sqrt{5} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{500} : \sqrt{5} = \sqrt{100} = 10$$

Na tej podstawie uczeń mógł stwierdzić, że pierwsza z liczb jest dwa razy większa od $\sqrt{5}$, a druga – dziesięć razy większa niż $\sqrt{5}$, co oznacza, że podane przybliżenia są poprawne.

Średnio co piąty gimnazjalista wykonał zadanie poprawnie.

Pozostali nie potrafili stosować reguł dotyczących działań na pierwiastkach. Wykorzystanie własności i działań na pierwiastkach to ważne umiejętności, potrzebne w dalszych etapach kształcenia.

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
 Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
analiza poziomu opanowania umiejętności

Zadanie 5. (0-1)

Poniżej podano kilka kolejnych potęg liczby 7.

$$7^1 = 7$$

$$7^2 = 49$$

$$7^3 = 343$$

$$7^4 = 2401$$

$$7^5 = 16\,807$$

$$7^6 = 117\,649$$

$$7^7 = 823\,543$$

$$7^8 = 5\,764\,801$$

$$7^9 = 40\,353\,607$$

.....

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cyfrą jedności liczby 7^{190} jest

A. 1

B. 3

C. 7

D. 9

Wymagania ogólne

V. Rozumowanie i argumentacja.

Wymagania szczegółowe

3. Potęgi. Uczeń:

3) porównuje potęgi o różnych wykładnikach naturalnych i takich samych podstawach [...].

Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
A.	12,61	12,69	11,85	0,36	0,36	0,35
B.	20,04	20,29	20,61			
C.	30,66	30,50	31,54			
D.	36,56	36,28	35,62			
BO	0,10	0,20	0,32			
WO	0,02	0,05	0,05			
Interpretacja współczynnika łatwości						
Zadanie okazało się dla piszących umiarkowanie trudne.						

Komentarz

Aby poprawnie rozwiązać zadanie uczeń nie musiał wykonać żadnych obliczeń, lecz musiał zauważyć pewną prawidłowość dotyczącą kolejnych wartości potęg liczby 7, a następnie zauważoną regułę zastosować do rozwiązania zadania.

W kolejnych potęgach liczby 7 jako cyfry jedności powtarzają się: 7, 9, 3 i 1. Analiza podanych potęg liczby 7 decydowała o właściwym wyborze odpowiedzi. Zadanie poprawnie rozwiązało około 36% uczniów w Okręgu. Pozostali dokonywali przypadkowych wyborów (nie zauważyli zależności) lub też próbowali obliczać kolejne wartości potęg liczby 7.

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
 Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
analiza poziomu opanowania umiejętności

Zadanie 6. (0-1)

W dodatniej liczbie trzycyfrowej cyfra dziesiątek jest równa 5, a cyfra setek jest o 6 mniejsza od cyfry jedności.

Ile jest liczb spełniających te warunki? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. Jedna. B. Dwie. **C. Trzy.** D. Cztery.

Wymagania ogólne

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

Wymagania szczegółowe

Umiejętność z zakresu szkoły podstawowej.

1. Liczby naturalne w dziesiętkowym układzie pozycyjnym. Uczeń:

1) odczytuje i zapisuje liczby naturalne wielocyfrowe.

Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
A.	12,70	12,39	13,51	0,55	0,57	0,56
B.	18,95	17,31	18,18			
C.	54,75	56,26	55,31			
D.	13,49	13,98	12,91			
BO	0,10	0,05	0,07			
WO	0,00	0,01	0,03			
				Interpretacja współczynnika łatwości		
				Zadanie okazało się dla trzecioklasistów umiarkowanie trudne.		

Komentarz

Za pomocą zadania sprawdzano umiejętność korzystania z informacji i wiadomości, dotyczących liczb naturalnych w dziesiętkowym systemie pozycyjnym, wprowadzanym w szkole podstawowej.

Dokładna analiza treści zadania prowadziła do następujących spostrzeżeń:

a) *cyfra setek jest o 6 mniejsza niż cyfra jedności, czyli*

$$\begin{aligned} \text{cyfra jedności} & \quad x, \\ \text{cyfra dziesiątek} & \quad 5 \\ \text{cyfra setek} & \quad (x - 6) \end{aligned}$$

b) *cyfrą jedności w tym przypadku może być tylko: 7, 8 lub 9 – inaczej cyfra setek będzie ujemna.*

Ponad połowa gimnazjalistów poprawnie oznaczyła cyfrę jedności i cyfrę setek w dodatniej liczbie trzycyfrowej, następnie wskazała, ile takich liczb dodatnich istnieje. Pozostali nie opanowali wiadomości wprowadzonych w szkole podstawowej.

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
 Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
analiza poziomu opanowania umiejętności

Zadanie 7. (0-1)

Zmieszano dwa gatunki herbaty, droższą i tańszą, w stosunku 2 : 3. Cena jednego kilograma tej herbacianej mieszanki wynosi 110 zł. Gdyby te herbaty zmieszano w stosunku 1 : 4, to cena za 1 kg tej mieszanki wynosiłaby 80 zł. Na podstawie podanych informacji zapisano poniższy układ równań.

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y = 110 \\ \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}y = 80 \end{cases}$$

Co oznacza x w tym układzie równań? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. Cenę 1 kg herbaty droższej.
- B. Cenę 1 kg herbaty tańszej.
- C. Cenę 5 kg herbaty droższej.
- D. Cenę 5 kg herbaty tańszej.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.

Wymagania szczegółowe

7. Równania. Uczeń:

4) zapisuje związki między wielkościami za pomocą układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
A.	65,81	67,27	66,16	0,66	0,67	0,66
B.	15,82	14,77	15,11			
C.	12,93	13,54	13,71			
D.	5,31	4,33	4,89			
BO	0,08	0,07	0,12			
WO	0,04	0,01	0,01			
				Interpretacja współczynnika łatwości		
				Zadanie okazało się dla piszących umiarkowanie trudne.		

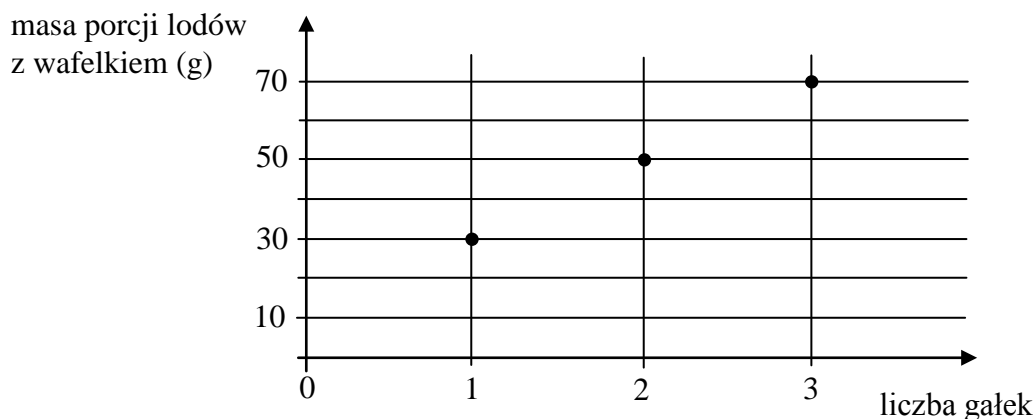
Komentarz

Zadanie sprawdzało umiejętność zapisywania związków między wielkościami za pomocą układu dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. W tym przypadku uczeń musiał zidentyfikować, co oznacza jedna ze zmiennych w układzie równań.

Zadanie poprawnie rozwiązało 66% uczniów w Okręgu. Około 15% piszących niedokładnie przeanalizowało treść zadania i uznało, że x oznacza cenę 1 kg herbaty tańszej.

Zadanie 8. (0-1)

Na wykresie przedstawiono, jak zmienia się masa porcji lodów z wafelkiem w zależności od liczby gałek lodów.



Jaką masę ma jedna gałka tych lodów bez wafelka? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 10 g **B. 20 g** C. 30 g D. 40 g

Wymagania ogólne

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

Wymagania szczegółowe

8. Wykresy funkcji. Uczeń:

4) odczytuje i interpretuje informacje przedstawione za pomocą wykresów funkcji (w tym wykresów opisujących zjawiska występujące w przyrodzie, gospodarce, życiu codziennym).

Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
A.	19,71	18,39	19,01	0,71	0,72	0,71
B.	70,81	72,42	71,55			
C.	8,46	8,15	8,31			
D.	0,94	0,97	1,08			
BO	0,08	0,06	0,05			
WO	0,00	0,00	0,00			
Interpretacja współczynnika łatwości						
Zadanie okazało się dla piszących łatwe.						

Komentarz

Za pomocą zadania sprawdzano umiejętność odczytywania i interpretowania danych. Na wykresie punktowym przedstawiono zmianę masy porcji lodów z wafelkiem w zależności od liczby gałek lodów. Wystarczyło odczytać np. masę porcji lodów składającą się

- a) z dwóch gałek lodów z wafelkiem (50 g)
- b) z trzech gałek lodów oraz wafelka (70 g)

a następnie wykonać odejmowanie $70\text{ g} - 50\text{ g} = 20\text{ g}$.

Ponad 70% uczniów poprawnie odczytało informacje z wykresu i zwróciło uwagę na opisy osi. Prawie co piąty uczeń wskazał masę wafelka (10 g) zamiast masy jednej kulki lodów.

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
 Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
analiza poziomu opanowania umiejętności

Zadanie 9. (0-1)

W konkursie przyznano nagrody pieniężne. Zdobycyca pierwszego miejsca otrzymał 5000 zł. Nagroda za zdobycie drugiego miejsca była o 30% mniejsza niż nagroda za zajęcie pierwszego miejsca. Nagroda za zdobycie trzeciego miejsca była o 40% mniejsza niż nagroda za zajęcie drugiego miejsca.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Uczestnik konkursu, który zdobył trzecie miejsce, otrzymał 1400 zł.	P	F
Nagroda za zdobycie trzeciego miejsca była o 70% mniejsza od nagrody za zajęcie pierwszego miejsca.	P	F

Wymagania ogólne

II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.

Wymagania szczegółowe

5. Procenty. Uczeń:

2) oblicza procent danej liczby,

4) stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym.

Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
PP	9,32	8,82	9,48	0,49	0,51	0,47
PF	14,80	13,36	14,92			
FP	26,59	26,57	27,61			
FF	49,23	51,19	47,82			
BO	0,02	0,03	0,07			
WO	0,04	0,03	0,11			
Interpretacja współczynnika łatwości						
Zadanie okazało się dla piszących						
				trudne.	umiarkowanie trudne.	trudne.

Komentarz

Typowe zadanie sprawdzające umiejętności w zakresie stosowania obliczeń procentowych. Treść zadania odwołuje się do sytuacji praktycznych. Rozwiązanie nie wymagało żadnych skomplikowanych rachunków. Należało uważnie przeanalizować treść zadania, następnie obliczyć wysokość nagrody pieniężnej za zajęcie trzeciego miejsca jako procent danej liczby (5000). Średnio co drugi uczeń w województwie wielkopolskim i lubuskim poprawnie ocenił obydwa zdania. Trudniejsze do oceny okazało się zdanie drugie – uczniowie uznawali je jako poprawne – popełniali błąd przy określaniu, o ile procent nagroda przyznana za zajęcie trzeciego miejsca jest mniejsza od nagrody przyznawanej za zajęcie pierwszego miejsca (sumowali 30% i 40% zamiast obliczyć, jaki procent nagrody za zajęcie I miejsca stanowi nagroda przyznana za zajęcie III miejsca – 12%, więc nagroda za zajęcie III miejsca jest mniejsza o 88% a nie o 70%). Uczniowie nadal nie potrafią poprawnie stosować obliczeń procentowych oraz niewłaściwie interpretują treść zadań.

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
 Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
analiza poziomu opanowania umiejętności

Zadanie 10. (0-1)

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie monetą. Jeśli wypadnie orzeł, zapisujemy 1, a jeśli reszka – zapisujemy 2. Wynikiem doświadczenia jest zapisana liczba dwucyfrowa.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że zapisana liczba jest podzielna przez 3? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. 0 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ **D. $\frac{1}{2}$**

Wymagania ogólne

III. Modelowanie matematyczne.

Wymagania szczegółowe

9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Uczeń:

5) analizuje proste doświadczenia losowe (np. rzut kostką, rzut monetą, wyciąganie losu), określa prawdopodobieństwa najprostszych zdarzeń (prawdopodobieństwo wypadnięcia orła w rzucie monetą itp.).

Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
A.	7,51	7,20	8,00	0,51	0,53	0,52
B.	13,43	12,97	13,34			
C.	28,08	25,48	26,62			
D.	50,75	54,21	51,85			
BO	0,17	0,12	0,17			
WO	0,06	0,03	0,03			
				Interpretacja współczynnika łatwości		
				Zadanie okazało się dla piszących umiarkowanie trudne.		

Komentarz

Za pomocą zadania sprawdzano, czy gimnazjaliści poprawnie posługują się podstawowymi pojęciami z zakresu prawdopodobieństwa oraz potrafią wskazać liczby podzielne przez 3. Pierwszy etap rozwiązania zadania to poprawne zapisanie wyniku przeprowadzonego doświadczenia losowego w postaci liczby dwucyfrowej: 11, 12, 21, 22. Druga część zadania to wskazanie, ile spośród tych liczb jest podzielnych przez trzy: 12, 21. Ostatni etap to obliczenie prawdopodobieństwa, że zapisana liczba jest podzielna przez 3 (dwie liczby z czterech). Średnio co drugi uczeń poprawnie rozwiązał zadanie. Pozostali popełniali błędy na etapie zapisywania wyniku doświadczenia zgodnie z warunkami zadania lub nie potrafili obliczyć prawdopodobieństwa prostego zdarzenia losowego.

Zadanie 11. (0-1)

Pięć różnych liczb naturalnych zapisano w kolejności od najmniejszej do największej: 1, a , b , c , 10. Mediana liczb: 1, a , b jest równa 3, a mediana liczb: a , b , c , 10 jest równa 5.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba c jest równa

- A. 4 B. 5 **C. 6** D. 7

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
 Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
analiza poziomu opanowania umiejętności

Wymagania ogólne

V. Rozumowanie i argumentacja.

Wymagania szczegółowe

9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Uczeń:

4) wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych.

Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
A.	14,92	13,75	14,78	0,36	0,37	0,35
B.	29,51	28,91	28,41			
C.	35,59	37,16	35,73	Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	19,83	19,99	20,92	Zadanie okazało się dla piszących trudne.		
BO	0,15	0,15	0,13			
WO	0,00	0,03	0,03			

Komentarz

Dotychczas zadania, w których uczeń wyznaczał medianę, ograniczały się do podania zestawu liczb i polecenia obliczenia mediany (uporządkowaniu liczb rosnąco i wskazaniu wartości środkowej). Tym razem liczby podane w zadaniu zostały już rosnąco uporządkowane, ale z pięciu liczb naturalnych podano wartości pierwszej i ostatniej liczby, natomiast trzy środkowe oznaczono literami. Dokładna analiza treści zadania prowadziła do następujących spostrzeżeń:

- a) mediana zestawu nieparzystej liczby danych (1, a, b) jest liczbą środkową, czyli liczba $a = 3$,
- b) mediana zestawu parzystej liczby danych jest średnią arytmetyczną dwóch środkowych liczb b i c, czyli $\frac{b+c}{2} = 5$ oznacza, że $b = 4$ i $c = 6$.

Zadanie okazało się dla uczniów trudne. Gimnazjaliści nie przeprowadzili dokładnej analizy treści zadania i nie wykorzystali wiadomości z zakresu statystyki. Potrafią wyznaczyć medianę zestawu liczb tylko w typowych sytuacjach wymagających stosowania poznanego algorytmu działań. Sytuacje nietypowe – takie jak w omawianym zadaniu – powodują, że uczniowie nie potrafią rozwiązać zadania mimo posiadanych wiadomości.

Zadanie 12. (0-1)

Liczba x jest dodatnia, a liczba y jest ujemna.

Ile spośród liczb: $x \cdot y$, $x - y$, $\frac{x}{y}$, $(y - x)^2$ jest dodatnich? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. Jedna. **B. Dwie.** C. Trzy. D. Cztery.

Wymagania ogólne

II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.

Wymagania szczegółowe

6. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:

2) oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych.

Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
A.	17,48	15,72	16,24	0,51	0,53	0,52
B.	51,25	53,40	52,68			
C.	20,63	20,73	20,99			
D.	10,56	10,08	9,99			
BO	0,04	0,05	0,07			
WO	0,04	0,02	0,04			
Interpretacja współczynnika łatwości						
Zadanie okazało się dla piszących umiarkowanie trudne.						

Komentarz

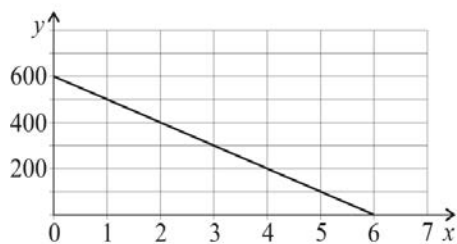
Poprawne rozwiązanie zadania wymagało określenia znaku wskazanych wyrażeń algebraicznych. Uczniowie wykonywali podane działania (mnożenie, dzielenie, odejmowanie, potęgowanie) dla dwóch liczb, z których jedna była dodatnia (x), a druga ujemna (y). Dodatni wynik działań (dwa wyrażenia) poprawnie określił średnio co drugi uczeń. Pozostali nie opanowali umiejętności wykonywania działań związanych z obliczaniem wartości wyrażeń algebraicznych.

Zadanie 13. (0-1)

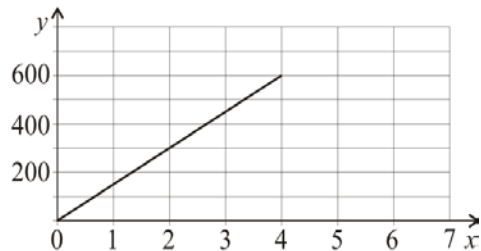
Wzór $y = 600 - 100x$ opisuje zależność objętości y (w litrach) wody w zbiorniku od czasu x (w minutach) upływającego podczas opróżniania tego zbiornika.

Który wykres przedstawia tę zależność? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

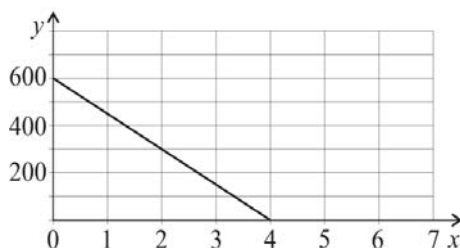
A.



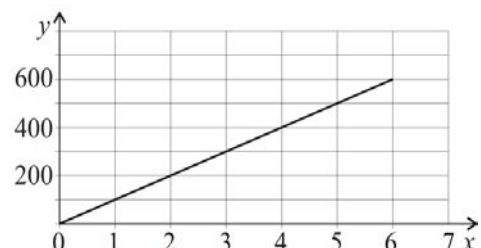
B.



C.



D.



Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
 Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
analiza poziomu opanowania umiejętności

Wymagania ogólne

III. Modelowanie matematyczne.

Wymagania szczegółowe

8. Wykresy funkcji. Uczeń:

5) oblicza wartości funkcji podanych nieskomplikowanym wzorem i zaznacza punkty należące do jej wykresu.

Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
A.	62,22	64,33	61,43	0,62	0,65	0,62
B.	7,41	6,86	8,18			
C.	12,42	11,38	12,11			
D.	17,82	17,29	18,09			
BO	0,13	0,12	0,16			
WO	0,00	0,02	0,03			
				Interpretacja współczynnika łatwości		
				Zadanie okazało się dla piszących umiarkowanie trudne.		

Komentarz

Za pomocą zadania sprawdzano umiejętność interpretowania zależności między wielkościami zapisanej za pomocą wzoru i wskazywania wykresu, który tę zależność przedstawia w formie graficznej. Umiejętność interpretowania związków między wielkościami jest kształtowana również w zakresie przedmiotów przyrodniczych. Dla uczniów, którzy wybierali odpowiedź A lub C oczywistym było, że efektem końcowym jest opróżnienie zbiornika ($y = 0$). 65% uczniów w województwie wielkopolskim i 62% w województwach lubuskim oraz zachodniopomorskim właściwie ustaliła czas opróżniania zbiornika.

Co czwarty uczeń wskazał wykres odpowiadający napełnianiu zbiornika wodą (odpowiedź B lub D).

Zadanie 14. (0-1)

Jeżeli a , b i c są długościami boków trójkąta oraz c jest najdłuższym bokiem, to ten trójkąt jest:

- prostokątny, gdy $a^2 + b^2 = c^2$
- rozwartokątny, gdy $a^2 + b^2 < c^2$
- ostrokątny, gdy $a^2 + b^2 > c^2$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Z odcinków o długościach: $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$

- A. nie można zbudować trójkąta.
- B. można zbudować trójkąt prostokątny.
- C. można zbudować trójkąt rozwartokątny.**
- D. można zbudować trójkąt ostrokątny.

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
 Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
analiza poziomu opanowania umiejętności

Wymagania ogólne

V. Rozumowanie i argumentacja.

Wymagania szczegółowe

4. Pierwiastki. Uczeń:

3) mnoży i dzieli pierwiastki drugiego stopnia.

6. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:

2) oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych.

Umiejętność z zakresu szkoły podstawowej.

9. Wielokąty, koła, okręgi. Uczeń:

2) konstruuje trójkąt o trzech danych bokach; ustala możliwość zbudowania trójkąta.

Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
A.	21,70	21,20	21,21	0,32	0,32	0,30
B.	17,61	17,71	19,05			
C.	31,90	32,89	31,72			
D.	28,65	28,03	27,87			
BO	0,13	0,13	0,15			
WO	0,02	0,05	0,01			
Interpretacja współczynnika łatwości						
Zadanie okazało się dla piszących trudne.						

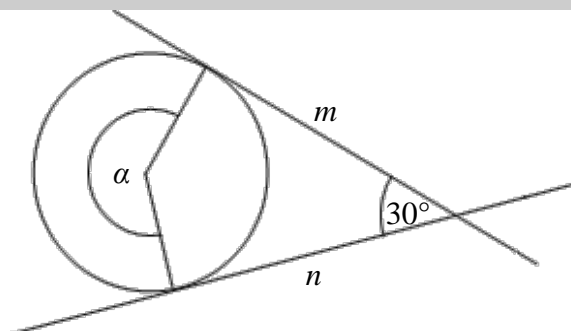
Komentarz

Za pomocą zadania sprawdzano umiejętność analizowania informacji, przeprowadzenia prostego rozumowania i interpretowania wyników. Uczeń musiał sprawdzić, czy podane odcinki mogą być bokami trójkąta, musiał ustalić, który z odcinków jest najdłuższy. Następnie piszący ustalał, jaka jest zależność między sumą kwadratów długości krótszych boków a kwadratem długości najdłuższego boku (zależności te zostały podane w treści zadania).

Na tej podstawie 32% uczniów uznało, że z podanych odcinków można zbudować trójkąt rozwartokątny. Zadanie dla uczniów było trudne. Uczniowie błędnie wskazywali najdłuższy odcinek, niepoprawnie szacowali wartość pierwiastków kwadratowych, a to prowadziło do błędnego wnioskowania o rodzaju trójkąta lub nie potrafili poprawnie zinterpretować wyników obliczeń.

Zadanie 15. (0-1)

Proste m i n są styczne do okręgu i przecinają się pod kątem 30° .



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta α jest równa

A. 210°

B. 230°

C. 240°

D. 270°

Wymagania ogólne

II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.

Wymagania szczegółowe

10. Figury płaskie. Uczeń:

3) korzysta z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności.

Umiejętność z zakresu szkoły podstawowej.

9. Wielokąty, koła, okręgi. Uczeń:

3) stosuje twierdzenie o sumie kątów trójkąta.

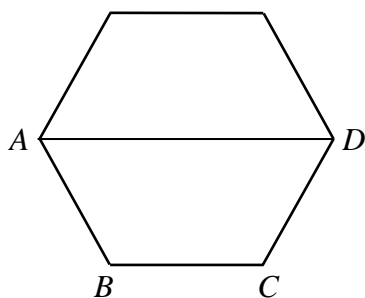
Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
A.	53,01	55,32	53,45	0,53	0,55	0,52
B.	19,20	18,56	18,70			
C.	19,24	18,04	19,50			
D.	8,39	7,88	8,26			
BO	0,13	0,16	0,07			
WO	0,02	0,04	0,03			
Interpretacja współczynnika łatwości						
Zadanie okazało się dla piszących umiarkowanie trudne.						

Komentarz

Do rozwiązania zadania niezbędna była interpretacja sytuacji przedstawionej na rysunku. Aby ustalić miarę kąta α , piszący wykorzystywali wiadomości dotyczące: wzajemnego położenia stycznej do okręgu i promienia okręgu poprowadzonego do punktu styczności, sumy kątów w czworokącie oraz miary kąta pełnego. Zadanie okazało się dla gimnazjalistów umiarkowanie trudne, uczniowie musieli poprawnie zinterpretować rysunek oraz połączyć różne wiadomości (również z zakresu szkoły podstawowej).

Zadanie 16. (0-1)

Na rysunku przedstawiono sześciokąt foremny o boku równym 2 cm. Przekątna AD dzieli go na dwa przystające trapezy równoramienne.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wysokość trapezu $ABCD$ jest równa

- A. $\sqrt{2}$ cm B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm **C. $\sqrt{3}$ cm** D. 2 cm

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
 Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
analiza poziomu opanowania umiejętności

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.

Wymagania szczegółowe

10. Figury płaskie. Uczeń:

22) rozpoznaje wielokąt foremny i korzysta z ich podstawowych własności.

Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
A.	18,51	16,47	18,10	0,46	0,47	0,44
B.	21,47	21,51	22,01			
C.	43,90	45,72	43,68			
D.	15,61	15,94	15,85			
BO	0,48	0,36	0,33			
WO	0,02	0,01	0,03			
				Interpretacja współczynnika łatwości		
				Zadanie okazało się dla piszących trudne.		

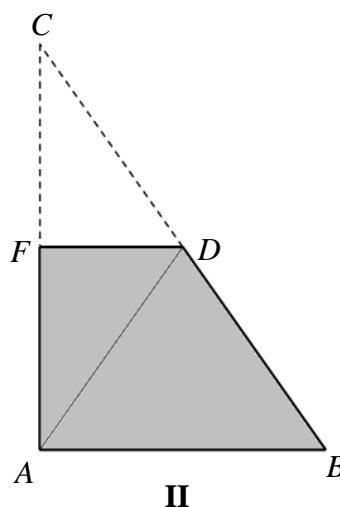
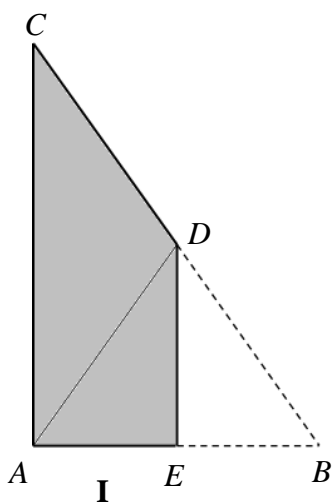
Komentarz

Na podstawie analizy treści zadania i rysunku piszący powinni zauważyć, że sześciokąt foremny składa się z sześciu trójkątów równobocznych o boku równym 2 cm. Po podzieleniu sześciokąta powstały dwa trapezy równoramienne, z których każdy składał się z trzech trójkątów równobocznych. Wysokość trójkąta była jednocześnie wysokością trapezu.

Uczniowie, którzy przeprowadzili taką analizę, skorzystali ze wzoru $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ i wyznaczyli wysokość $h = \sqrt{3}$. Wybór innych odpowiedzi niż C oznacza, że uczniowie nie ugruntowali wiadomości dotyczących własności figur płaskich.

Zadanie 17. (0-1)

Ania wycięła z kartki papieru dwa jednakowe trójkąty prostokątne o bokach długości 12 cm, 16 cm i 20 cm. Pierwszy z nich zagięła wzdłuż symetralnej krótszej przyprostokątnej, a drugi – wzdłuż symetralnej dłuższej przyprostokątnej. W ten sposób otrzymała czworokąty pokazane na rysunkach.



Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
 Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
analiza poziomu opanowania umiejętności

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Pole czworokąta I jest równe polu czworokąta II.	P	F
Obwód czworokąta I jest mniejszy od obwodu czworokąta II.	P	F

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.

Wymagania szczegółowe

10. Figury płaskie. Uczeń:

9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów;

15) korzysta z własności trójkątów prostokątnych podobnych;

18) rozpoznaje symetralną odcinka i dwusieczną kąta.

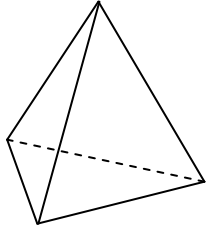
Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
PP	8,54	8,65	8,53	0,58	0,59	0,58
PF	58,66	60,04	59,37			
FP	13,14	12,47	13,71			
FF	19,52	18,75	18,17			
BO	0,10	0,07	0,12			
WO	0,04	0,02	0,11			
Interpretacja współczynnika łatwości						
Zadanie okazało się dla piszących umiarkowanie trudne.						

Komentarz

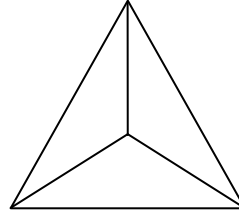
Rozwiązanie zadania wymagało ustalenia wymiarów otrzymanych w wyniku składania czworokątów (długości boków potrzebne do wyznaczenia obwodów figur) oraz ustalenia pól powierzchni „zaginanych” części trójkątów. Piszący wykorzystywali własności symetralnej odcinka – prowadziło to do ustalenia długości boków „małych” trójkątów EBD i FDC. Ponieważ długości boków ww. trójkątów są takie same, to trójkąty mają jednakowe pola, co oznacza, że czworokąty też mają jednakowe pola (powstały po „odjęciu” pól „małych” trójkątów). Taki tok rozumowania był podstawą oceny pierwszego zdania, dotyczącego równości pól czworokątów. Porównanie długości boków czworokątów prowadziło do wniosku, że obwód czworokąta I jest większy od obwodu czworokąta II i pozwalało ocenić drugie zdanie jako fałszywe. Około 60% gimnazjalistów poprawnie przeprowadziło rozumowanie i oceniło zdania (PF). Co trzeci piszący nie potrafił poprawnie porównać pól czworokątów (oceniając zdanie jako fałszywe). Co piąty popełnił błędy, porównując obwody. Umiejętności związane z wykorzystaniem własności trójkątów czy symetralnych odcinków (kluczowe w rozwiązaniu zadania) nie zostały utrwalone.

Zadanie 18. (0-1)

Rysunki przedstawiają bryłę, której wszystkie cztery ściany są trójkątami równobocznymi.

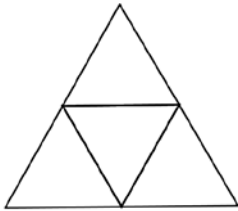


widok bryły z boku

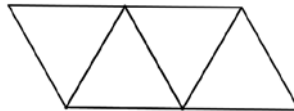


widok bryły z góry

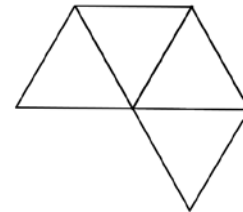
Które wielokąty – I, II, III – przedstawiają siatki bryły takiej, jaką pokazano na powyższych rysunkach? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.



I



II



III

A. I, II i III

B. tylko I i III

C. tylko II i III

D. tylko I i II

Wymagania ogólne

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

Wymagania szczegółowe

Umiejętność z zakresu szkoły podstawowej.

10. Bryły. Uczeń:

3) rozpoznaje siatki graniastosłupów prostych i ostrosłupów.

Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
A.	17,02	18,04	16,12	0,46	0,46	0,45
B.	31,10	31,82	32,91			
C.	4,74	4,41	5,07			
D.	47,07	45,63	45,82			
BO	0,04	0,05	0,04			
WO	0,02	0,05	0,03			
Interpretacja współczynnika łatwości						
Zadanie okazało się dla piszących trudne.						

Komentarz

Za pomocą zadania sprawdzano, czy uczeń potrafi wskazać siatkę bryły opisanej zadaniu i przedstawionej na rysunku. Siatki przedstawiono na trzech rysunkach. Na pierwszym z nich przedstawiono typową, znaną uczniom, siatkę. Uczniowie musieli więc ocenić, czy pozostałe rysunki również przedstawiają siatki wskazanej bryły. Poprawnie zadanie rozwiązało około 46% uczniów w Okręgu.

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
 Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
analiza poziomu opanowania umiejętności

Zadanie 19. (0-1)

Szklane naczynie w kształcie prostopadłościanu o wymiarach 6 cm, 15 cm i 18 cm napelniono częściowo wodą i szczelnie zamknięto. Następnie naczynie postawiono na jego ścianie o największej powierzchni i wtedy woda sięgała do wysokości 4 cm.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Kiedy naczynie postawiono na ścianie o najmniejszej powierzchni, to woda sięgała do wysokości

- A. 8 cm B. 10 cm **C. 12 cm** D. 16 cm

Wymagania ogólne

IV. Użycie i tworzenie strategii.

Wymagania szczegółowe

Umiejętność z zakresu szkoły podstawowej.

11. Obliczenia w geometrii. Uczeń:

4) oblicza objętość i pole powierzchni prostopadłościanu przy danych długościach krawędzi.

Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
A.	20,31	19,45	20,56	0,56	0,56	0,54
B.	11,42	11,63	11,94			
C.	56,18	56,40	54,77			
D.	11,94	12,32	12,41			
BO	0,10	0,18	0,31			
WO	0,04	0,01	0,01			
				Interpretacja współczynnika łatwości		
				Zadanie okazało się dla piszących umiarkowanie trudne.		

Komentarz

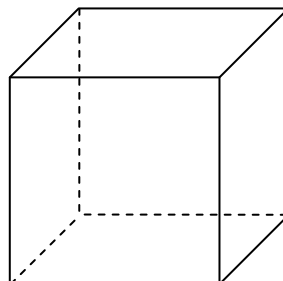
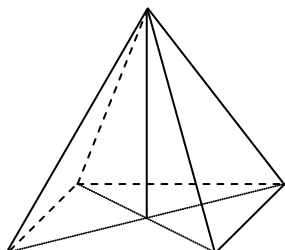
Do rozwiązania zadania niezbędna była umiejętność obliczania objętości prostopadłościanu. Aby rozwiązać zadanie, piszący musieli:

- a) wskazać ścianę graniastosłupa o największym polu powierzchni,*
- b) obliczyć objętość wody w naczyniu postawionym na ścianie o największym polu powierzchni ($P_p = 15 \text{ cm} \cdot 18 \text{ cm}$, $h = 4 \text{ cm}$, $V = 1080 \text{ cm}^3$),*
- c) wykorzystując wyznaczoną objętość, obliczyć wysokość, do jakiej będzie sięgał poziom wody w naczyniu postawionym na ścianie o najmniejszym polu powierzchni ($P_p = 6 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm}$, $V = 1080 \text{ cm}^3$).*

Poprawne wykonanie działań prowadziło do wskazania poprawnej odpowiedzi $h = 12 \text{ cm}$. Około 56% gimnazjalistów w Okręgu poprawnie rozwiązało zadanie. Pozostali popełniali błędy, które są konsekwencją rozwiązywania zbyt małej liczby zadań osadzonych w kontekstach praktycznych i nietypowych (zmiana położenia prostopadłościanu – czyli zmiana podstawy bryły).

Zadanie 20. (0-1)

Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy czworokątny i sześcian. Bryły mają jednakowe podstawy i równe wysokości, a suma objętości tych brył jest równa 36 cm^3 .



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli zdanie jest fałszywe.

Objętość sześcianu jest trzy razy większa od objętości ostrosłupa.	P	F
Krawędź sześcianu ma długość 3 cm.	P	F

Wymagania ogólne

III. Modelowanie matematyczne.

Wymagania szczegółowe

11. Bryły. Uczeń:

2) oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego [...] (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).

Wybieralność odpowiedzi (wersja X)				Współczynnik łatwości (wersja X i Y)		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
PP	31,40	33,40	31,86	0,31	0,32	0,30
PF	25,62	24,67	24,80			
FP	23,97	23,24	24,98			
FF	18,89	18,60	18,17			
BO	0,06	0,07	0,08			
WO	0,06	0,02	0,11			
Interpretacja współczynnika łatwości						
Zadanie okazało się dla piszących trudne.						

Komentarz

Do rozwiązania zadania niezbędna była dokładna analiza treści zadania i znajomość wzorów potrzebnych do wyznaczenia objętości brył. Ostrosłup prawidłowy czworokątny i sześcian mają jednakowe pola podstawy i równe wysokości, to oznacza, że objętość sześcianu jest trzy razy większa niż objętość ostrosłupa. Znając sumę objętości brył (36 cm^3) oraz wiedząc, że objętości brył pozostają w stosunku 1:3, uczniowie powinni ustalić objętość sześcianu (27 cm^3), a następnie wyznaczyć długość krawędzi sześcianu ($a = 3 \text{ cm}$). Zadanie okazało się dla uczniów trudne – średnio co trzeci piszący poprawnie ocenił obydwa zdania. Uczniowie nie mają utrwalonych wiadomości dotyczących własności brył i wyznaczania ich objętości.

3b. Analiza rozwiązań zadań otwartych wraz z przykładami

Za rozwiązanie wszystkich zadań otwartych uczeń mógł otrzymać maksymalnie 9 punktów. W tabeli zebrano dane określające, jaki procent wszystkich piszących w danym województwie uzyskał za rozwiązanie zadań otwartych maksymalną liczbę punktów, a jaki zero punktów. Zero punktów otrzymywali uczniowie, którzy źle rozwiązali zadanie oraz ci, którzy nie podjęli próby rozwiązania zadania.

województwo	Odsetek piszących, którzy za rozwiązanie zadań otwartych otrzymali	
	maksymalną punktację (9 pkt)	0 pkt
lubuskie	6,8%	23,4%
wielkopolskie	7,0%	22,3%
zachodniopomorskie	6,5%	25,6%

Za rozwiązanie wszystkich zadań otwartych w województwie wielkopolskim zero punktów otrzymywało trzy razy piszących w porównaniu z tymi, którzy uzyskali maksymalną liczbę punktów. W województwie zachodniopomorskim zero punktów uzyskano prawie czterokrotnie częściej niż wynik maksymalny.

Zadanie 21. (0-3)

Maja, Ola i Jagna kupowały zeszyty. Maja za 3 grube zeszyty i 8 cienkich zapłaciła 10 zł. Ola kupiła 4 grube oraz 4 cienkie zeszyty i również zapłaciła 10 zł. Czy Jagnie wystarczy 10 złotych na zakup 5 grubych zeszytów i 1 cienkiego? Zapisz obliczenia i odpowiedź.

Wymagania ogólne

III. Modelowanie matematyczne.

Wymagania szczegółowe

7. Równania. Uczeń:

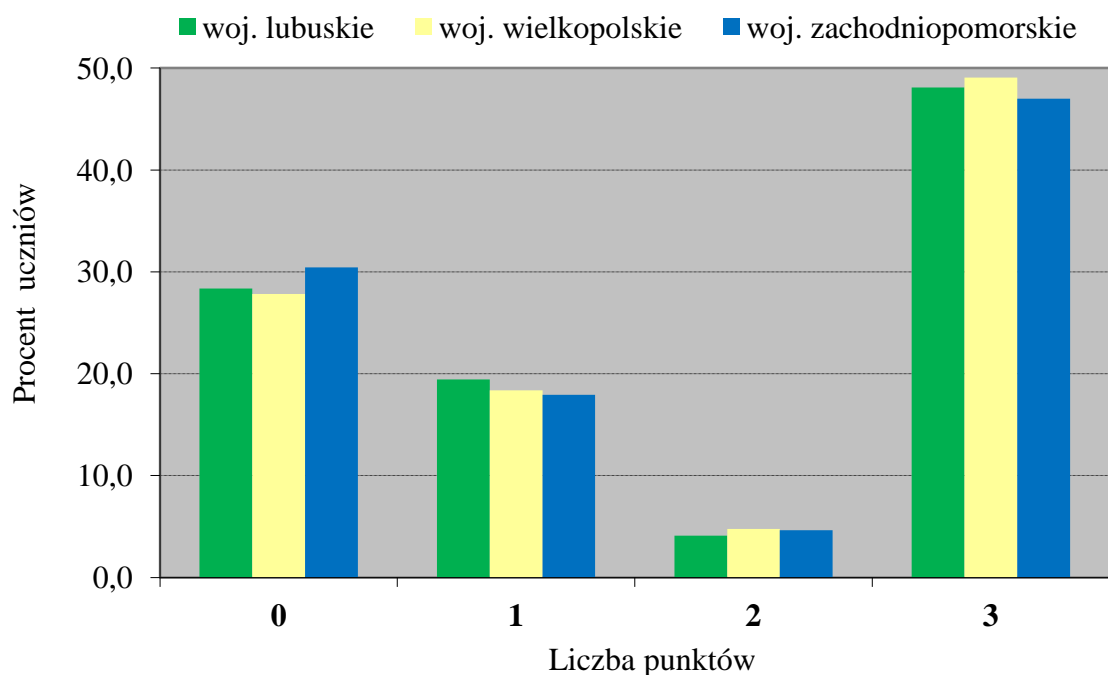
7) za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.

Poziom wykonania zadania 21.

Maksymalną liczbę punktów (3 pkt) uzyskało 48,4% populacji w Okręgu.

Zero punktów otrzymało 28,6% trzecioklasistów w Okręgu, z czego 7,6% nie podjęło próby rozwiązania zadania.

Zadanie 21.	L	W	Z
Średnia liczba punktów (max – 3 pkt)	1,72 pkt	1,75 pkt	1,68 pkt
Współczynnik łatwości	0,57	0,58	0,56
BO (w %)	7,79	6,81	9,42
Interpretacja współczynnika łatwości	Zadanie okazało się dla piszących umiarkowanie trudne.		



Wykres 11. Rozkład liczby punktów uzyskanych przez piszących za rozwiązanie zadania 21.

Komentarz

Za pomocą zadania sprawdzano, czy uczeń potrafi zbudować model matematyczny prowadzący do rozwiązania zadania osadzonego w kontekście praktycznym.

W tym celu piszący:

- a) ustalali zależności między wielkościami,
- b) planowali i wykonali czynności prowadzące do rozwiązania problemu,
- c) interpretowali otrzymane wyniki.

Zadanie wymagało przede wszystkim zrozumienia treści przedstawionej słownie i zapisanie jej za pomocą układu równań (lub równania), który w poprawny sposób opisywał związki między wielkościami. Rozwiązanie układu równań (równania) prowadziło do ustalenia cen zeszytów – cienkiego i grubego. Następnie należało sprawdzić, czy kwota 10 zł wystarczy na zakup określonej w zadaniu liczby zeszytów. Taki sposób rozwiązania był najczęściej stosowany przez uczniów.

Rozwiązania uczniowskie

Odpowiedzi poprawne

Przykład 1.

Najczęściej stosowana przez uczniów metoda rozwiązania zadania polegała na ułożeniu układu równań, opisującego zależności między wielkościami opisanymi w zadaniu oraz obliczeniu ceny zeszytu grubego (2 zł) oraz cienkiego (0,50 zł). Po ustaleniu cen zeszytów piszący sprawdzali, czy kwota 10 zł wystarczy na zakup 5 grubych i 1 cienkiego zeszytu i formułowali poprawny wniosek.

x - ilość grubych zeszytów
 y - ilość cienkich zeszytów

$$\begin{cases} 4x + 4y = 10 \\ 3x + 8y = 10 \end{cases}$$

Jagoda:

$$5 \cdot 2 + 1 \cdot 0,5 = 10 + 0,5 = 10,5 \text{ zł}$$
$$10,5 > 10$$
$$\begin{cases} x = \frac{10-4y}{4} \\ 3 \cdot \frac{10-4y}{4} + 8y = 10 \quad | \cdot 4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = \frac{10-4y}{4} \\ 3(10-4y) + 32y = 40 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = \frac{10-4y}{4} \\ 30 - 12y + 32y = 40 \end{cases}$$

Odp. Jagoda nie starczy 10 zł.

$$\begin{cases} x = \frac{10-4y}{4} \\ 20y = 10 \end{cases}$$
$$x = \frac{10-4y}{4}$$
$$y = 0,5$$
$$\begin{cases} x = \frac{10-4 \cdot 0,5}{4} = 2 \\ y = 0,5 \end{cases}$$

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
analiza poziomu opanowania umiejętności

Przykład 2.

Inny sposób rozwiązywania zadania polegał na zapisaniu zależności między wielkościami i ustaleniu, że jeden gruby zeszyt kosztuje tyle samo, co cztery cienkie zeszyty ($x = 4y$). Następnie uczeń przeprowadził analizę treści zadania i doprowadził do otrzymania zależności $21y > 20y$, na podstawie którego sformułował poprawny wniosek.

x - grube zeszyty
 y - cienkie zeszyty

I. $3x + 8y = 10$	I. $3x + 8y = 4x + 4y$
II. $4x + 4y = 10$	$-x = -4y$
III. $5x + y = 10$	$x = 4y$

III. $5(4y) + y = 10$	II. $4(4y) + 4y = 10$
$20y + y = 10$	$16y + 4y = 10$
$21y = 10$	$20y = 10$

I. $3(4y) + 8y = 10$	I. $21y > 20y$
$12y + 8y = 10$	$21y \neq 10$
$20y = 10$	

odp. Jaśnie nie wytarczy 10zł na zakup 5 grubych i 1 cienkiego.

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
 Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
 analiza poziomu opanowania umiejętności

Przykład 3.

W prezentowanym rozwiązaniu piszący wykazał zależność między kosztem zakupu czterech cienkich zeszytów a kosztem zakupu jednego grubego zeszytu. Stosując tę zależność, uczeń „zamienił” liczbę grubych zeszytów na odpowiadającą jej liczbę cienkich zeszytów: zakupy Mai to 20 cienkich zeszytów, zakupy Oli – 20 cienkich zeszytów, zakupy Jagny – 21 cienkich zeszytów. Na podstawie tak przeprowadzonej analizy piszący podał poprawną odpowiedź.

$$\text{Maja} - 3 \text{ grube i } 8 \text{ cienkich} = 10z$$

$$\text{Ola} - 4 \text{ grube i } 4 \text{ cienkie} = 10z$$

$$\text{Jagna} - 5 \text{ grube i } 1 \text{ cienki} = xz$$

$$4 \text{ cienkie} = 1 \text{ gruby} \quad \begin{array}{l} 4 - 3 = 1 \\ 8 - 4 = 4 \end{array}$$

$$5 \text{ grubych} = 20 \text{ cienkich}$$

$$\text{Maja} - 3 \cdot 4 + 8 = 20$$

$$\text{Ola} - 4 \cdot 4 + 4 = 20$$

$$\text{Jagno} - 5 \cdot 4 + 1 = 21$$

Odp.: Nie starczy jej pieniędzy na zakup zeszytów. Zabraknie jej pieniędzy na jeden cienki.

Przykład 4.

Podobnie jak w przykładzie 3., uczeń ustalił zależność między ceną grubego i cienkiego zeszytu. Następnie piszący ułożył proporcję i wyznaczył koszt zakupu zeszytów przez Jagnę.

$$\begin{array}{l} x - \text{grube zeszyty} \\ y - \text{cienkie zeszyty} \end{array}$$

$$4x + 4y = 3x + 8y$$

$$x = 4y$$

$$20y = 10z$$

$$\begin{array}{l} \text{Maja} \rightarrow 3 \cdot 4y + 8y = 20y \\ \text{Ola} \rightarrow 4 \cdot 4y + 4y = 20y \\ \text{Jagna} \rightarrow 5 \cdot 4y + 1y = 21y \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 20y - 10z \\ 21y - xz \end{array}$$

$$x = \frac{21y - 10z}{20y} = \frac{21}{2}z = 10,5z$$

Jagnie nie wystarczy ^{10z} na kupno 5 grubych zeszytów i jednego cienkiego.

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
 Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
 analiza poziomu opanowania umiejętności

Przykład 5.

Uczniowie często w różny sposób zapisywali przeprowadzaną analizę zadania, która była podstawą formułowania poprawnego wniosku. W tym rozwiązaniu piszący ustalał zależność między liczbą kupowanych przez dziewczynki zeszytów – wykazał, że ostatnia z nich może kupić tylko zeszyty grube (przy tych samych kosztach zakupu malała liczba kupowanych zeszytów cienkich – o 4, zwiększała się liczba kupionych zeszytów grubych – o 1).

Maja - 3grube, 8cienkich zapłaciła 10zł
 Ola - 4grube, 4cienkie zapłaciła 10zł
 Jagna - ?

Maja	+	3grube	8cienkich) - 10
Ola	+	4grube	4cienkie) - 10
Jagna	+	5grube	0cienkich) - 10

Op: Jagnie nie będzie starczyło na kupno 5grubych zeszytów i 1cienkiego.

Przykład 6.

Uczniowie wykazywali się również zaawansowanymi umiejętnościami matematycznymi – rozwiązywali układ równań stosując metodę wyznaczników.

$$\begin{cases} 3x + 8y = 10 \\ 4x + 4y = 10 \end{cases}$$

x - grube zeszyty
y - cienkie zeszyty

$$W = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 8 = 12 - 32 = -20$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = 10 \cdot 4 - 10 \cdot 8 = 40 - 80 = -40$$

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{-40}{-20} = 2$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot 10 - 4 \cdot 10 = 30 - 40 = -10$$

$$y = \frac{W_y}{W} = \frac{-10}{-20} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$5 \cdot 2 + 1 \cdot 0,5 = 10,5$$

Opowiedz: Jagnie nie starczy pieniędzy.

Przykład 7.

Często spotykanym rozwiązaniem był zapis słowny przeprowadzonej analizy, zawierający w pełni poprawny i logiczny tok rozumowania (ten sam tok rozumowania zaprezentowano w przykładach 2. i 3., w których gimnazjaliści posługiwali się formalnym językiem matematycznym – zapisywali zależności między wielkościami za pomocą równań).

Maja kupiła 3 grube zeszyty i 8 cienkich,
a Ola 4 grube i 4 cienkie. Oba zapłaciły
tyle samo. Maja kupiła o 1 zeszyt gruby
mniej niż Ola i o 4 zeszyty grube
więcej niż Ola. Taki więc jeden zeszyt
gruby kosztuje tyle samo co cztery
cienkie. Tak więc Maja kupiła
tak jakby 20 ($4 \cdot 3 + 8 = 20$) zeszytów cienkich; Ola
również kupiła tak jakby 20 ($4 \cdot 4 + 4 = 20$)
zeszytów cienkich. Yagna chce kupić 5 zeszytów
grubych i 1 cienki czyli razem tak jakby 21
($5 \cdot 4 + 1 = 20$). Włók nie starczy jej 10 zł
Odp.: Nie, nie starczy jej ~~20~~ 10 zł.

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
 Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
 analiza poziomu opanowania umiejętności

Przykład 8.

W prezentowanym przykładzie rozwiązania zadania uczeń wykorzystał zależność, że koszt zakupu 4 cienkich zeszytów stanowił 20% całej kwoty wydanej na zakupy przez Olę. Kolejne działania prowadziły do wyznaczenia ceny grubego zeszytu i podania poprawnej odpowiedzi.

$$\text{Maja} - 3g + 8c = 10zł$$

$$\text{Ola} - 4g + 4c = 10zł$$

$$\text{Jagna} - 5g + 1c = xzł$$

$$4g - 3g + 8c - 4c = 1g + 4c$$

$$4c = 20\%$$

$$\text{Maja} - 3g + 8c = 10zł$$

$$10zł - 100\%$$

$$xzł - 40\%$$

$$\frac{10 = 40}{100} = \frac{40 - 4}{10}$$

$$4zł - 8c$$

$$10zł - 4zł = 3g$$

$$6zł = 3g$$

$$6 : 3 = 2zł = 1g$$

Odpowiedź Jagna za grube zeszyty zapłaciła 10 zł i jeszcze do liczyć trzebać cienkie zeszyty do przekroczenia jej limitu budżetowy.

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
Egzamin gimnazjalny 2015 - MATEMATYKA
analiza poziomu opanowania umiejętności

Przykład 9.

Innym sposobem rozwiązania zadania było graficzne przedstawienie zależności między wielkościami opisanymi w treści zadania. Na podstawie analizy schematu piszący ustalili ceny zeszytów i formułowali poprawny wniosek.

Maja 3 grube i 8 cienkich = 10 zł

Ola 4 grube i 4 cienkie = 10 zł

Maja ma 10 zł

$\square = 4 \text{ cienkie}$
 $\square = 4 \text{ cienkie}$
 $\square = 1 \text{ cienki}$

$\square \square \square \square \square = 20 \text{ cienkich}$ } - ca dwio jako ma 10 zł
 $\square = 1 \text{ cienki}$

Maja ma

$\square \square \square = 12 \text{ cienkich}$
 $+ \square \square \square \square \square \square = 8 \text{ cienkich}$ } 20 cienkich = 10 zł

Ola

$\square \square \square \square = 16 \text{ cienkich}$
 $+ \square \square \square = 4 \text{ cienkie}$ } 20 cienkich = 10 zł

Odp: Nie kupi
 5 grubej i 3a 1 cien-
 -kiego poniewaz ma
 za malo pieniedzy.

Odpowiedzi częściowo poprawne

Przykład 10.

Uczniowie bardzo często zapisywali poprawny układ równań, popełniali jednak błędy rachunkowe, co może świadczyć o tym, że nie mają nawyku sprawdzania poprawności obliczeń.

x - zeszyt gruby
y - zeszyt cienki

$$\begin{cases} 3x + 8y = 10 \\ 4x + 4y = 10 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 8y = 10 - 3x \quad | : 8 \\ 4x + 4y = 10 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 1,25 - 0,375x \\ 4x + 4(1,25 - 0,375x) = 10 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 1,25 - 0,375x \\ 4x + 5 - 1,5x = 10 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 1,25 - 0,375x \\ 4x - 1,5x = 10 - 5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 1,25 - 0,375x \\ 2,5x = 5 \quad | : 2,5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 1,25 - 0,375x \\ x = 2 \end{cases}$$

→ koszt grubego zeszytu (zł)

$$\begin{cases} y = 1,25 - 0,375 \cdot 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1,25 - 0,75 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \rightarrow \text{koszt cienkiego zeszytu (zł)}$$

$$5 \cdot 2 \text{ zł} + 1 \cdot 1 \text{ zł} = 11 \text{ zł}$$

Odpowiedź: Jagnie nie wystarczy 10 zł na zakup 5 grubych zeszytów i 1 cienkiego.

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
 Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
 analiza poziomu opanowania umiejętności

Przykład 11.

Uczniowie stosowali poprawne metody rozwiązania zadania, popełniali jednak błędy podczas przekształcania wyrażeń algebraicznych.

x - grube zeszyty
 y - cienkie zeszyty

$$\begin{cases} 3x + 8y = 10 \text{ zł} \\ 4x + 4y = 10 \text{ zł} \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8x - 8y = -20 \text{ zł} \\ 4x + 4y = 10 \text{ zł} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -4x = -10 \text{ zł} \cdot (-4) \\ x = 2,5 \text{ zł} \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x + 8y = 10 \text{ zł} \cdot 4 \\ 4x + 4y = 10 \text{ zł} \cdot (-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 32y = 40 \text{ zł} \\ -12x - 12y = -30 \text{ zł} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 20y = 10 \text{ zł} \cdot \cancel{4} \cdot 20 \\ y = 0,5 \text{ zł} \end{array}$$

$$5x + 1y = 10 \text{ zł}$$

$$\begin{array}{l} 5 \cdot 2,5 \text{ zł} + 1 \text{ zł} = 10 \text{ zł} \\ 12,5 \text{ zł} + 1 \text{ zł} = 10 \text{ zł} \\ 13 \text{ zł} \neq 10 \text{ zł} \end{array}$$

Odp: Jaqmie nie wystarczy

10 zł ma zakup 5 grubych zeszytów i jednego grubego.

Przykład 12.

Uczniowie poprawnie zapisywali związki między wielkościami, jednak nie potrafi w pełni zrealizować zaplanowanych czynności – rozwiązać układ równań (wyznaczyć ceny zeszytów) i sformułować wniosek.

Maja

$$\begin{cases} 3x + 8y = 10 \\ 4x + 4y = 10 \cdot (-2) \end{cases} \quad \text{y. 1}$$

$$\begin{cases} 3x + 8y = 10 \\ -4x + 8y = -20 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -x = -10 \quad | \cdot (-1) \\ x = 10 \end{array} \quad \text{1 gruby zeszyt} = 10 \text{ zł}$$

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
Egzamin gimnazjalny 2015 - MATEMATYKA
analiza poziomu opanowania umiejętności

Kolejna kategoria popełnianych błędów związana była z formułowaniem wniosków lub z nieuprawnionym wnioskowaniem – brak obliczeń będących podstawą interpretacji wyniku.

Przykład 13.

Uczeń prawidłowo ułożył układ równań, obliczył ceny zeszytów, jednak popełnił błąd przy wyznaczeniu kosztów zakupu zeszytów przez Jagnę, co doprowadziło do błędnego wniosku.

y - cena grubego zeszytu
x - cena cienkiego zeszytu

$$\begin{cases} 3y + 8x = 10 \\ 4y + 4x = 10 \quad / \cdot (-2) \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3y + 8x = 10 \\ + (-8y - 8x = -20) \\ \hline -5y = 10 \quad / \cdot (-5) \\ y = 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3y + 8x = 10 \\ 3 \cdot 2 + 8x = 10 \\ 6 + 8x = 10 \quad / - 6 \\ 8x = 4 \quad / : 8 \\ x = 0,5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 0,5 \\ y = 2 \end{cases}$$
$$\text{Jagna} = 5 \cdot 0,5 + 1 \cdot 2 = 2,5 + 2 = 4,5$$

Oko.: Jagnie udało się na 5 sztuk grubych zeszytów oraz 1 cienkiego.

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
 Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
 analiza poziomu opanowania umiejętności

Przykład 14.

Piszący poprawnie zapisał równania, ustalił zależność między ceną grubego i cienkiego zeszytu. Nie wykonał żadnych działań, które byłyby podstawą do sformułowania wniosku.

Maja	$3a + 8b = 10 \text{ zł}$	
Ola	$4a + 4b = 10 \text{ zł}$	$4a - 3a = a$
Jagna	$5a + b$	$8b - 4b = 4b$
Odp. Nie wystarczy, bo jeden gruby zeszyt kosztuje tyle co 4 cienkie.		

Odpowiedzi błędne

W wielu rozwiązaniach uczniowie nie potrafili zapisać zależności występujących między wielkościami lub błędnie interpretowali zawarte w tekście informacje. Zapisane działania nie prowadziły do rozwiązania problemu, wskazują na brak umiejętności analizy danych.

Przykład 15.

Uczeń wypisał informacje dotyczące kupowanych zakupów. Nie przeprowadził żadnej analizy prowadzącej do wykazania związków między wielkościami (liczbą i rodzajem zakupionych przez dziewczynki zeszytów). Sformułował błędny wniosek.

Maja: $3g$ i $8c = 10 \text{ zł}$
Ola: $4g$ i $4c = 10 \text{ zł}$
Jagna: $5g$ i $1c = 10 \text{ zł} ?$
Odp: Tak, ponieważ Jagna kupowała o 1 grubego zeszytu więcej od Oli i o 3 drobne zeszyty mniej od Oli dlatego a prawdopodobnie wystarczy jej 10 zł ponieważ teoretycznie Ola kupowała więcej zeszytów (niektóre większe ilości papieru) niż Jagna a wystawnyła jej 10 zł.

Przykład 17.

Piszący „dobrał” ceny zeszytów i sprawdził, czy przy tych cenach jedna z dziewczynek – Maja – mogła zrealizować zakup 8 cienkich i 3 grubych zeszytów. Następnie uczeń obliczył koszt zakupów zeszytów Jagny. Sformułował odpowiedź, która jest adekwatna do błędnej, niepełnej analizy. (W odpowiedzi podano błędne imię.)

Maja \rightarrow 3 grube zeszyty + 8 cienkich zeszytów = 10 zł

1 cienki zeszyt = 65 gr $65 \text{ gr} \cdot 8 = 5,20 \text{ zł}$

1 gruby zeszyt = 1,60 zł $1,60 \text{ zł} \cdot 3 = 4,80 \text{ zł}$

$5,20 \text{ zł} + 4,80 \text{ zł} = 10 \text{ zł} \leftarrow$ zakupy Mai

Jagna \rightarrow 5 grubych zeszytów + 1 cienki zeszyt

1 gruby zeszyt = 1,60 zł

1 cienki zeszyt = 65 gr

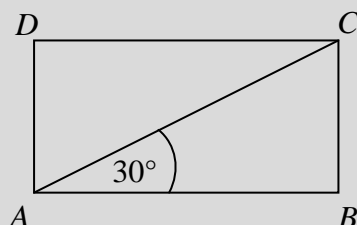
$1,60 \text{ zł} \cdot 5 = 6,40 \text{ zł}$ $65 \text{ gr} \cdot 1 = 65 \text{ gr}$

$6,40 \text{ zł} + 65 \text{ gr} = 7,05 \text{ zł}$

Odp: Mai wystarczy na zakup 5 grubych zeszytów i jednego cienkiego.

Zadanie 22. (0-2)

Przekątna prostokąta $ABCD$ nachylona jest do jednego z jego boków pod kątem 30° . Uzasadnij, że pole prostokąta $ABCD$ jest równe polu trójkąta równobocznego o boku równym przekątnej tego prostokąta.



Wymagania ogólne (z podstawy programowej)

V. Rozumowanie i argumentacja.

Wymagania szczegółowe (z podstawy programowej)

10. Figury płaskie. Uczeń:

8) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach [...],

14) stosuje cechy przystawania trójkątów,

9) oblicza pola [...] trójkątów i czworokątów;

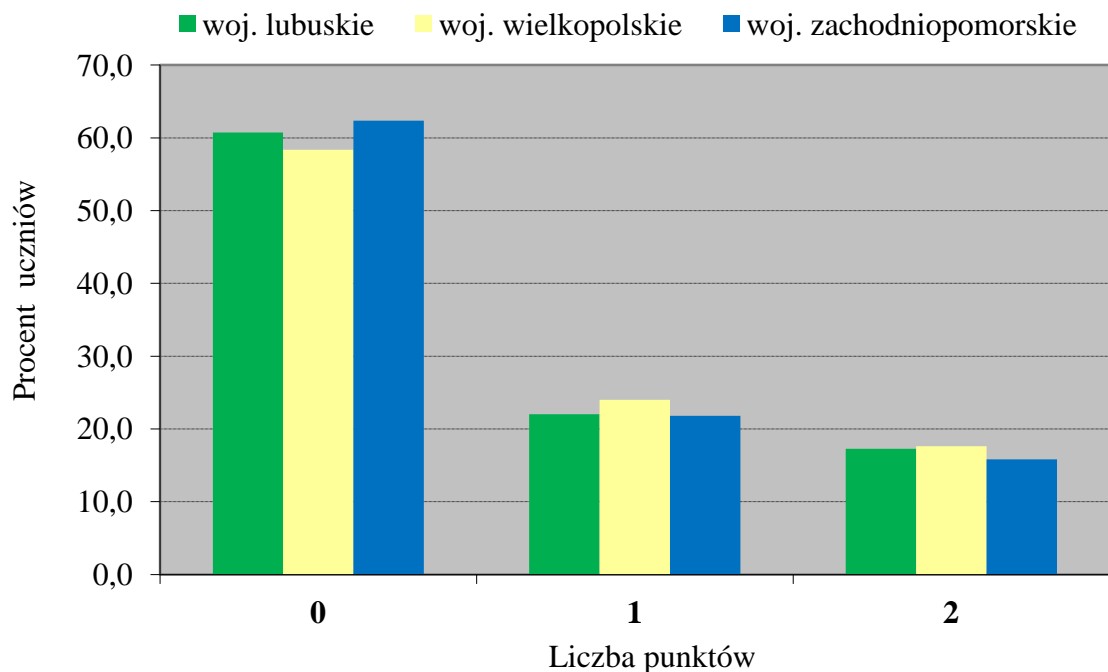
22) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności.

Poziom wykonania zadania 22.

Maksymalną liczbę punktów (2 pkt) uzyskało 17,1% populacji w Okręgu.

Zero punktów otrzymało 59,8% trzecioklasistów, 23,4% piszących w Okręgu nie podjęło próby rozwiązania zadania.

Zadanie 22.	L	W	Z
Średnia liczba punktów (max – 2 pkt)	0,57 pkt	0,59 pkt	0,53 pkt
Współczynnik łatwości	0,28	0,30	0,27
BO (w %)	23,50	21,94	26,91
Interpretacja współczynnika łatwości	Zadanie okazało się dla piszących trudne.		



Wykres 12. Rozkład liczby punktów uzyskanych przez piszących za rozwiązanie zadania 22.

Komentarz

Za pomocą zadania sprawdzano, czy uczeń potrafi utworzyć ciąg argumentów i uzasadnić jego poprawność twierdzeniami, które nie występowały w zadaniu. Do rozwiązania zadania niezbędne były:

- znajomość własności kątów i przekątnych w prostokątach,
- znajomość i wykorzystanie cech przystawania trójkątów,
- rozpoznawanie wielokątów foremnych i korzystanie z ich własności,
- umiejętność obliczania pól trójkąt i czworokąta.

Trudne dla gimnazjaliści okazało się formułowanie argumentów, wniosków oraz zapisywanie toku swojego rozumowania. Analiza rozwiązań wykazała znaczne problemy w stosowaniu właściwego języka matematycznego. Zadanie można było rozwiązać różnymi metodami, jednak każda z nich wymagała stosowania własności figur płaskich i umiejętności argumentowania.

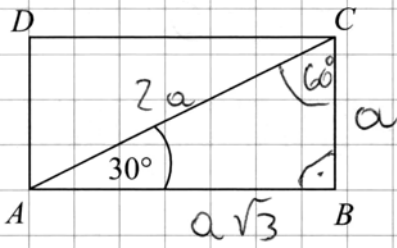
Przedstawione rozwiązania uczniowskie pokazują słabe i mocne strony rozumowania gimnazjalistów. Część uczniów rozwiązywało zadanie algebraicznie (obliczając pola). Inni wykorzystywali metodę graficzną, prowadzącą do wykazania równości pól prostokąta i trójkąta równobocznego o boku równym długości przekątnej tego prostokąta.

Rozwiązania uczniowskie

Odpowiedzi poprawne

Przykład 1.

Rozwiązanie bezbłędne, z dokładnie opisanym rozumowaniem. Uczeń czytelnie zapisał wszystkie etapy rozwiązania zadania: oznaczył miary kątów w trójkącie ABC , podał długości boków tego trójkąta, wyznaczył pola powierzchni prostokąta i trójkąta równobocznego o długości boku $2a$. Następnie porównał wyznaczone pola.



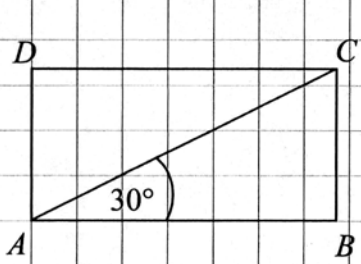
$P_{\square} = a \cdot b$
 $b = a\sqrt{3}$
 $P_{\square} = a \cdot a\sqrt{3}$

$P_{\Delta} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$
 $a_2 = 2a$

$P_{\square} = P_{\Delta}$
 $a \cdot a\sqrt{3} = \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4}$
 $a^2 \sqrt{3} = \frac{4a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$
 $a^2 \sqrt{3} = a^2 \sqrt{3}$
 $a^2 = a^2$
 $0 = 0$

Przykład 2.

Uczeń zastosował również metodę algebraiczną, prowadzącą do wyznaczenia i porównania pól właściwych figur. Wyznaczył pole trójkąta ABC , następnie wyznaczył pole prostokąta $ABCD$ i wykazał, że pole prostokąta $ABCD$ jest dwa razy większe od pola trójkąta ABC .



$\sphericalangle ABC = 90^\circ$
 $\sphericalangle ACB = 60^\circ$
 $2|CB| = |CA|$

$$P_{\square} = |AD| \cdot |AB|$$

$$|CB| = |AD|$$

$$P_{\Delta} = a \cdot h \cdot \frac{1}{2}$$

$$a = |AD|$$

$$h = \frac{2|AD|\sqrt{3}}{2} = |AD|\sqrt{3}$$

$$h = |AB| = |AD|\sqrt{3}$$

$$P_{\Delta} = |AD| \cdot |AD|\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$P_{\Delta} = |AD|^2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$P_{\square} = |AD| \cdot |AB|$$

$$|AB| = |AD|\sqrt{3}$$

$$P_{\square} = |AD| \cdot |AD|\sqrt{3} = |AD|^2 \sqrt{3}$$

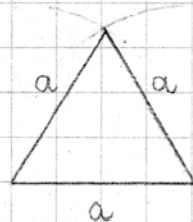
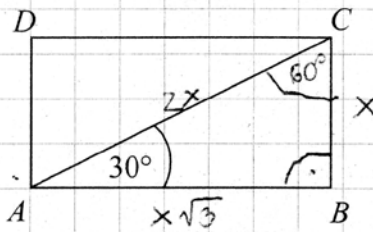
$$P_{\square} : P_{\Delta} = \frac{|AD|^2 \sqrt{3}}{|AD|^2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}} = 1 : \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{2}{1} = \boxed{2}$$

TAK

Odp. Pole tego prostokąta jest równe polu takiego trójkąta równobocznego.

Przykład 3.

Uczeń zauważył, że przekątna podzieliła prostokąt na trójkąty o kątach 30° , 60° , 90° , poprawnie zapisał zależności między długościami boków w trójkącie. Następnie wyznaczył pola obu figur, wszystkie przekształcenia wykonał poprawnie. Rozwiązanie uzupełnił opisem słownym.



$$a = 2x$$

$$P_{\square} = x\sqrt{3} \cdot x$$

$$P_{\square} = x^2\sqrt{3} [j^2]$$

$$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_{\Delta} = \frac{(2x)^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_{\Delta} = \frac{4x^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_{\Delta} = x^2\sqrt{3} [j^2]$$

$$x^2\sqrt{3} [j^2] = x^2\sqrt{3} [j^2]$$

Na podstawie własności długości w trójkącie prostokątnym o kątach 30° , 60° , 90° , można określić długości boków w takim trójkącie.

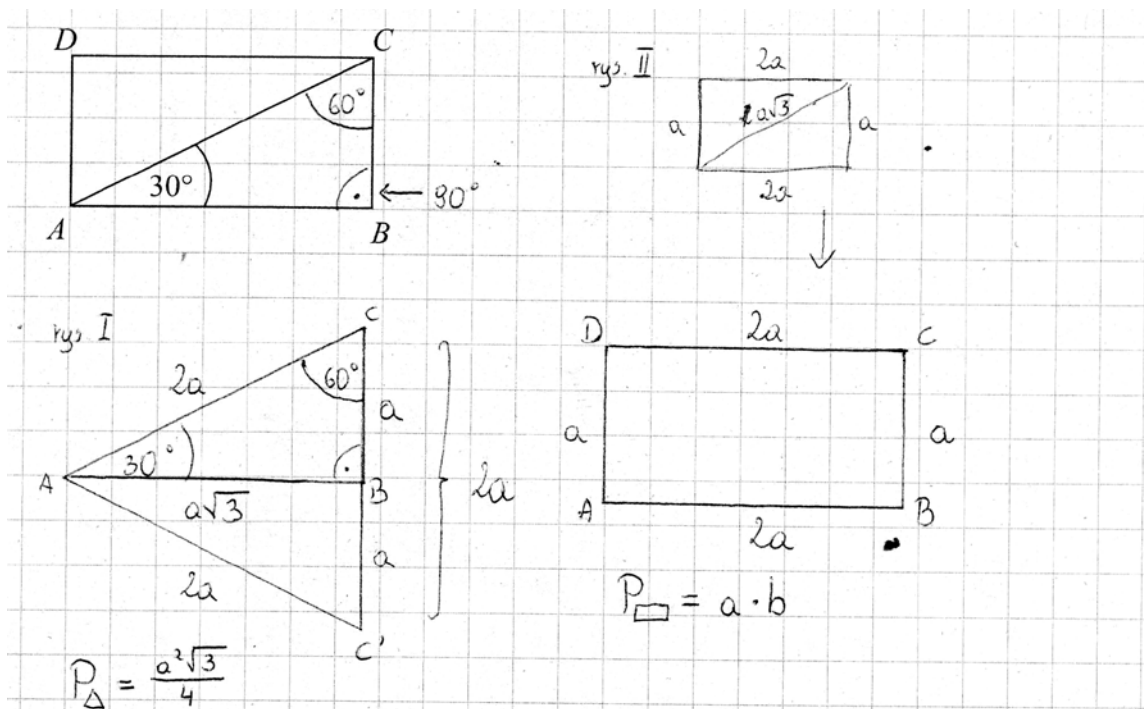
Przekątna prostokąta wynosi $2x$, czyli długość boku w trójkącie równobocznym też jest równa $2x$.

Ze wzoru na pole trójkąta równobocznego wiadomo, że jest ono równe $x^2\sqrt{3} [j^2]$, a prostokąt, ze wzoru $a \cdot b$ jest równe $x^2\sqrt{3} [j^2]$. Pola figur są równe.

Przykład 5.

Zgodnie z warunkami zadania uczeń dorysował do trójkąta ABC trójkąt ABC' i wykazał jego równobocznosc.

Następnie wykazał równosc pól prostokąta $ABCD$ i trójkąta równobocznego ACC' . Tok rozumowania uporządkowany, zilustrowany rysunkami pomocniczymi i komentarzem.

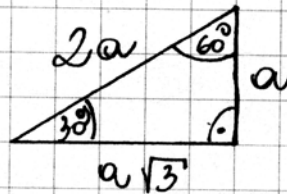
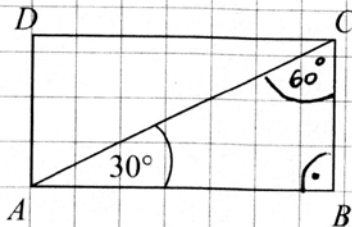


Pole prostokąta $ABCD$ jest równe polu trójkąta równobocznego ACC' , ponieważ wysokość trójkąta dzieli go na dwa równe trójkąty (rys I). Jedną połowę tego trójkąta ABC' można przemieścić na przeciwną stronę i obrócić (rys II). Powstanie wtedy ~~z~~ prostokąt $ABCC'$ o takich samych wymiarach co prostokąt $ABCD$.

Przykład 6.

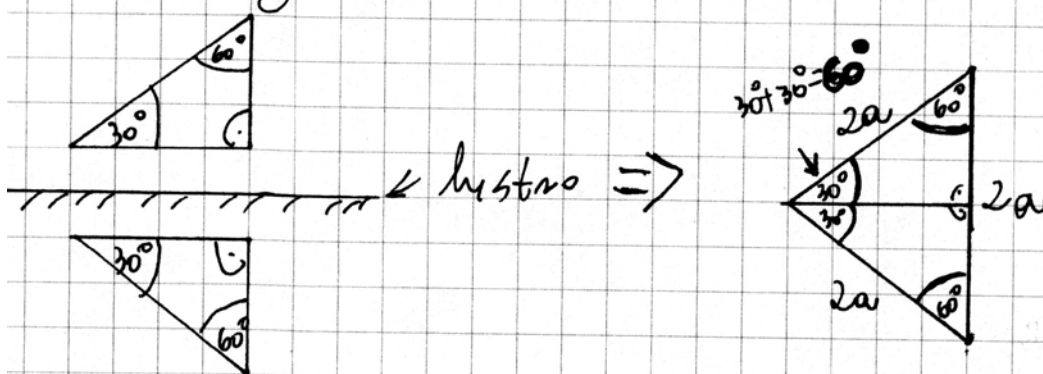
Uczniowie w różny sposób zapisywali tok myślenia – nie zawsze stosowali formalny język matematyczny, ale prezentowane rozwiązania były poprawne.

W przedstawionym rozwiązaniu uczeń właściwie określił miary kątów w trójkątach, podał poprawne długości boków w trójkącie. Następnie za pomocą rysunków przeprowadził dowód równości pól.



Pole prostokąta ABCD jest równe polu trójkąta równobocznego o boku równym przekątnej tego prostokąta, bo:

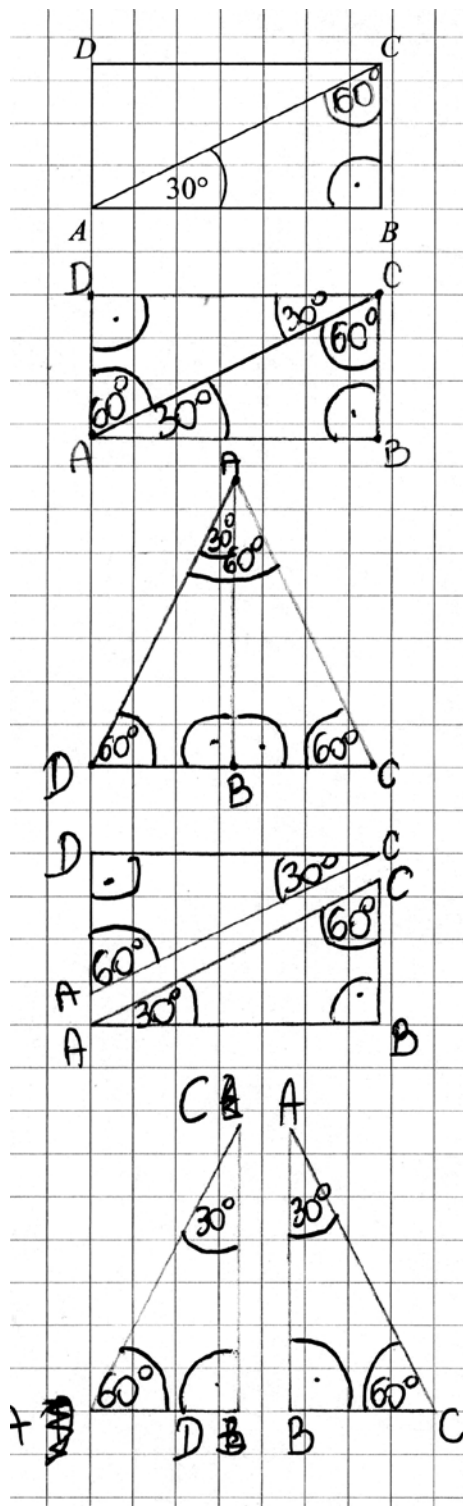
* wynika to z trójkąta charakterystycznego. Skoro przekątna ma być bokiem trójk. równobocznego, to należy „dokończyć” odbicie lustrzane:



Powstaje trójkąt równoboczny o bokach długości $2a$ oraz kątami wewnętrznymi 60° każdy.

Przykład 7.

Jeden ze sposobów rozwiązania polegał na pokazaniu, że trójkąty ABC i ACD , na które przekątna AC podzieliła prostokąt $ABCD$, są przystające a trójkąt, który powstanie po złożeniu tych części prostokąta (trójkątów ABC i ACD), będzie trójkątem równobocznym o boku równym długości przekątnej prostokąta. Taki sposób rozwiązania często występował w pracach uczniów. Część z uczniów dodatkowo dopisywała komentarz do wykonanych rysunków tak, jak w prezentowanym rozwiązaniu.

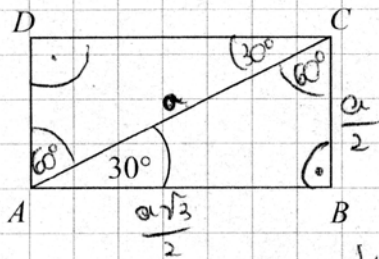


Na rysunkach dook jest ładnie przedstawione dla czego prostokąt ABCD ma takie samo pole jak trójkąt równoboczny o boku równym przekątnej tego prostokąta. Przekątna prostokąta dzieli nam ten prostokąt na dwa trójkąty proste o kątach 30° , 60° i 90° . Gdy połączymy te dwa trójkąty proste, otrzymamy trójkąt równoboczny. Kształt figury się zmieni, ale jego pole pozostanie takie samo.

Przykład 8.

Uczeń nie potrafił swojego toku rozumowania opisać poprawnym językiem matematycznym. Zauważył zależności między długościami boków w trójkącie prostokątnym o kącie ostrym 30° i posłużył się opisem słownym, udowadniając równość pól.

W rozwiązaniu brak przekształceń wzorów, nie ma rysunków pomocniczych, występują uchybienia w opisie („półtrójkąt”).



Trójkąt ABC jest to półtrójkąt, czyli ~~smiadowska~~ jego kąty mają 30° , 60° i 90° . Oznacza to że przeciwprostokątna tego trójkąta ma bok długości a , krótsza przyprostokątna ma $\frac{a}{2}$, natomiast dłuższa przyprostokątna ma długość $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Pole ~~tego~~ W takim razie pole tego prostokąta wynosi:

$$P_{\square ABCD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \text{ Wzorem tym obliczamy}$$

pole powierzchni trójkąta równobocznego, czyli

$$P_{\square ABCD} = P_{\Delta \text{równobocznego}}. \text{ Dwa półtrójkąty tworzą}$$

razem trójkąt równoboczny, a prostokąt ABCD podzielony jest przekątną na dwa półtrójkąty.

Co oznacza że $P_{\square ABCD} = P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ACD}$ dlatego

~~Wzorem~~ pole prostokąta ABCD równe ~~jest~~

jest polu trójkąta równobocznego o boku równym przekątnej tego prostokąta.

$$\begin{aligned} \text{bo } P_{\Delta \text{równobocznego}} &= \\ &= P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ACD} \end{aligned}$$

Odpowiedzi częściowo poprawne

Przykład 9.

Uczeń dorysował trójkąt zgodnie z warunkami zadania, opisał go w sposób wskazujący na to, że jest on równoboczny: podał miary kątów w trójkątach: ABC , ACD i ABC' . Na tym zakończył rozwiązanie zadania – nie wykazał równości pól.

Trójkąt równoboczny będzie większy od prostokąta
 świądeży o tym powyższy rysunek.

Przykład 10.

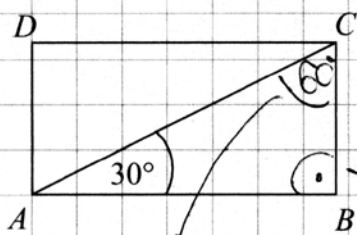
Uczeń podał miary kątów w trójkątach, które powstały po podzieleniu prostokąta przekątną AC. Nie potrafił doprowadzić do końcowego uzasadnienia.

Kąty w trójkątach są
 takie same, zatem kąty
 w prostokącie też, a kąty
 w prostokącie muszą
 wynieść 90° .
 Zatem pola są takie
 same.

Odpowiedzi błędne

Przykład 11.

Uczeń podjął próbę rozwiązania zadania. Zaproponowana metoda była niepoprawna, a zapisane działania nie doprowadziły do wykazania równości pól prostokąta i trójkąta równobocznego o boku równym długości przekątnej prostokąta.



Zal: rysunek

Teza: Pole prostokąta jest równe
 polu trójkąta równobocznego
 o boku przekątnej prostokąta.

2 własności prostokąta kąt 90°
 2 własności trójkąta prostokątnego $180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$

$$P_{\square} = |AB| \cdot |AD|$$

podstawa trójkąta równobocznego równa przekątnej

$$P_{\Delta} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{lub } P = \frac{|CB| \cdot |AB|}{2}$$

$$P_{\Delta} = \frac{|AC|^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{|AC|^2 \sqrt{3}}{4} = |AB| \cdot |AD|$$

$$P_{\square} = P_{\Delta}$$

$$|AB| \cdot |AD| = |CB| \cdot |AB|$$

$$|AB| \cdot |AD| = |CB| \cdot |AB| \quad | : |AB|$$

$$|AD| = |CB|$$

$$|AD| = |CB|$$

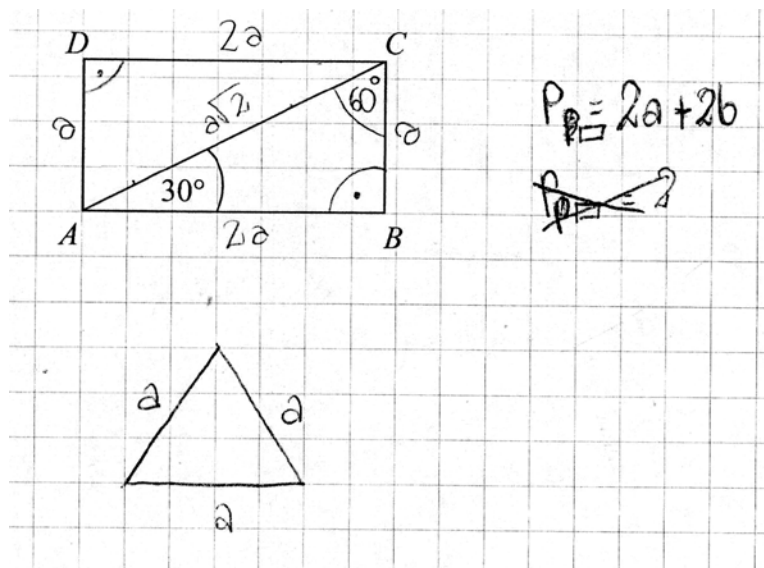
$$|AD| = |CB|$$

c. n. d.

Przykład 12.

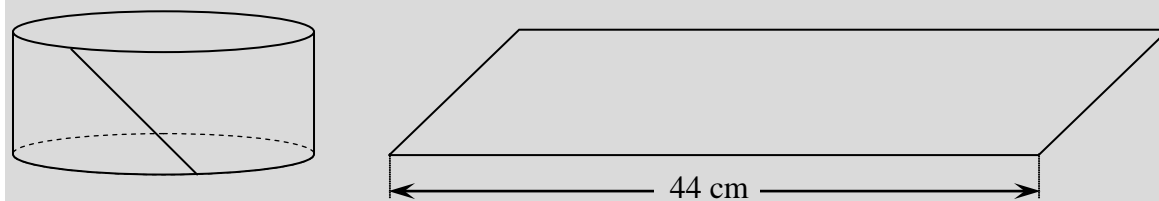
Uczeń nie potrafił wykorzystać własności trójkąta o miarach kątów 30° , 60° i 90° : błędnie określił długości boków w trójkącie ABC .

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
Egzamin gimnazjalny 2015 - MATEMATYKA
analiza poziomu opanowania umiejętności



Zadanie 23. (0-4)

Po rozklejeniu ściany bocznej pudełka mającego kształt walca otrzymano równoległobok. Jeden z boków tej figury ma długość 44 cm, a jej pole jest równe 220 cm^2 . Oblicz objętość tego pudełka. Przyjmij przybliżenie π równe $\frac{22}{7}$. Zapisz obliczenia.



Wymagania ogólne (z podstawy programowej)

IV. Użycie i tworzenie strategii.

Wymagania szczegółowe (z podstawy programowej)

10. Figury płaskie. Uczeń:

5) oblicza długość okręgu i łuku okręgu;

9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.

11. Bryły. Uczeń:

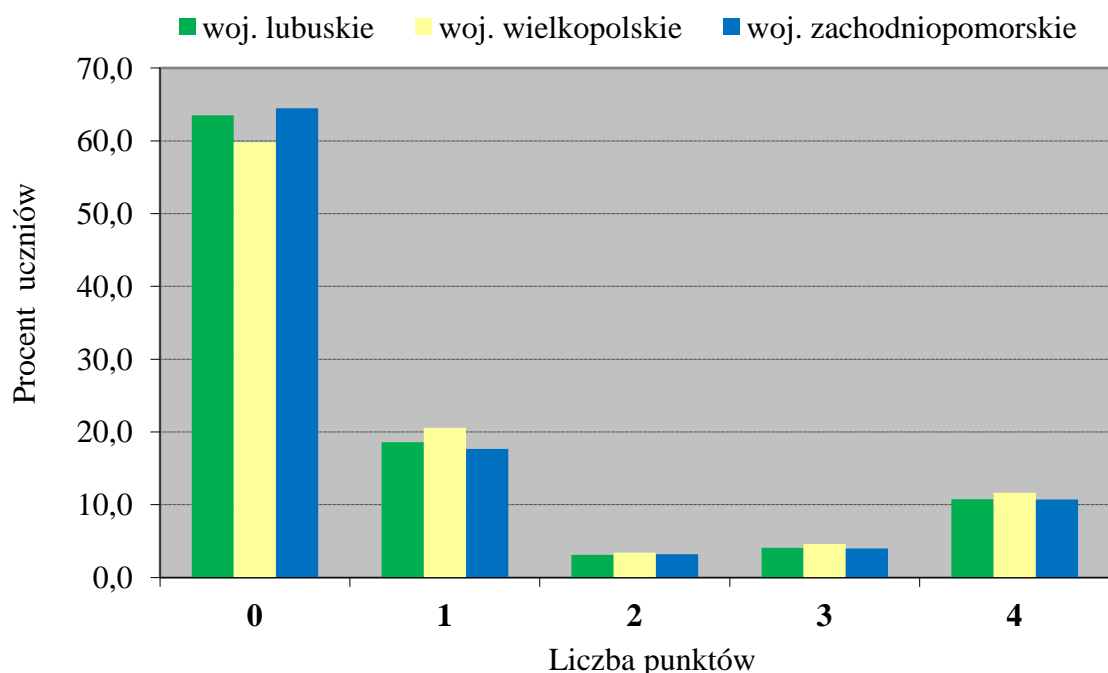
2) oblicza pole powierzchni i objętość walca (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym).

Poziom wykonania zadania 23.

Maksymalną liczbę punktów (4 pkt) uzyskało 11,2% gimnazjalistów w Okręgu.

Zero punktów otrzymało 61,6% trzecioklasistów w Okręgu, 25,60% piszących nie podjęło próby rozwiązania zadania.

Zadanie 23.	L	W	Z
Średnia liczba punktów (max – 4 pkt)	0,80 pkt	0,88 pkt	0,79 pkt
Współczynnik łatwości	0,20	0,22	0,20
BO (w %)	26,18	23,84	29,34
Interpretacja współczynnika łatwości	Zadanie okazało się dla piszących trudne.		



Wykres 13. Rozkład liczby punktów uzyskanych przez piszących za rozwiązanie zadania 23.

Komentarz

Za pomocą zadania sprawdzano, czy uczeń potrafi zaplanować czynności prowadzące do rozwiązania zadania, a następnie je wykonać. Rozwiązanie zadania polegało na obliczeniu objętości pudełka w kształcie walca. Ściana boczna walca po rozcięciu miała kształt równoległoboku – a nie jak zazwyczaj – prostokąta.

Aby poprawnie rozwiązać zadanie, należało ustalić długość wysokości równoległoboku, która jednocześnie jest wysokością pudełka. Znając obwód koła, które jest podstawą pudełka, należało wyznaczyć długość jego promienia. Kolejny krok to obliczenie objętości walca.

Do rozwiązania zadania niezbędne były:

- stosowanie pojęcia pola powierzchni bocznej, obwodu koła,
- obliczanie pola powierzchni koła,
- obliczanie objętości walca.

Poprawne rozwiązanie tego zadania wymagało wykonania trzech kroków (zastosowania trzech poprawnych metod): wyznaczenia wysokości walca, obliczenia promienia podstawy oraz obliczenia objętości walca. Rozwiązania mogły się różnić jedynie kolejnością obliczenia dwóch wielkości (wysokości i promienia) oraz sposobami zapisów.

Dokładna analiza treści zadania, przeprowadzenie prostego rozumowania matematycznego oraz przyjęcie właściwej strategii prowadzącej do rozwiązania zadania, było dla tegorocznych trzecioklasistów trudne.

Rozwiązania uczniowskie

Odpowiedzi poprawne

Przykład 1.

Uczeń przedstawił rozwiązanie zadania z przejrzystymi zapisami, odzwierciedlającymi tok rozumowania i kolejne etapy rozwiązania zadania: wyznaczenie wysokości i promienia oraz objętości walca. Wyznaczone wielkości podał z poprawnymi jednostkami.

$P = a \cdot h$
 $h = \frac{P}{a}$
 $h = \frac{220}{44}$
 $h = 5 \text{ [cm]}$
 $h = H$
 $a = L$

$V = \pi r^2 \cdot H$
 $V = \frac{22}{7} \cdot 7^2 \cdot 5$
 $V = \frac{22}{\cancel{7}_1} \cdot \cancel{7}_1 \cdot 7 \cdot 5$
 $V = 22 \cdot 35$
 $V = 770 \text{ [cm}^3\text{]}$

$L = 2\pi r$
 $44 = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot r \quad | :2$
 $22 = \frac{22}{7} \cdot r \quad | : \frac{22}{7}$
 $r = \frac{22}{\cancel{22}_1} \cdot \frac{7}{\cancel{22}_1}$
 $r = 7 \text{ [cm]}$

L - obwód pola podstawy walca

$\begin{array}{r} 22 \\ \cdot 35 \\ \hline 110 \\ + 66 \\ \hline 770 \end{array}$

Przykład 2.

Uczeń przedstawił rozwiązanie zadania z przejrzystymi zapisami, odzwierciedlającymi tok rozumowania. W całym rozwiązaniu konsekwentnie pomijał jednostki.

$P = 220$
 $P = a \cdot h$
 $\pi = \frac{22}{7}$

$V = \pi r^2 \cdot H$
 $V = \frac{22}{7} \cdot 7^2 \cdot 5$
 $V = \frac{22}{7} \cdot 49 \cdot 5$
 $V = 22 \cdot 7 \cdot 5$
 $V = 110 \cdot 7$
 $V = 440$

$220 = 44 \cdot h \quad | :44$
 $h = 5$
 $H = 5$
 $l = 44$
 $l = 2\pi r$
 $44 = 2\pi r \quad | :2$
 $22 = \pi r$
 $22 = \frac{22}{7} \cdot r \quad | : \frac{22}{7}$
 $22 \cdot \frac{7}{22} = r$
 $r = 7$

$\begin{array}{r} 22 \\ \cdot 5 \\ \hline 110 \end{array}$

Odp: Objętość tego pudełka wynosi 440.

Przykład 3.

Uczeń napisał rozwiązanie w krótkiej, ale w pełni poprawnej formie.

$H = 220 : 44 = 5 \text{ (cm)}$
 $2\pi r = 44$
 $2 \cdot \frac{22}{7} r = 44 / : 4$
 $hhv = 44 \cdot 7 / : 44$
 $r = 7$
 $V = \pi r^2 \cdot H = \frac{22}{7} \cdot 49 \cdot 5 = 22 \cdot 35 = 440 \text{ (cm}^3\text{)}$

Odpowiedzi częściowo poprawne

Uczniowie, rozwiązując zadanie 23., najczęściej stosowali błędne metody wyznaczenia szukanych wielkości, popełniali błędy rachunkowe lub nie kończyli podjętych działań. W zależności od stopnia zaawansowania rozwiązania, uzyskiwali od 1 do 3 punktów.

Przykład 4.

Uczeń czytelnie zapisał działania, wykonał rysunki pomocnicze. Posługiwał się poprawnymi jednostkami, ale w etapie końcowym popełnił błąd rachunkowy ($22 \cdot 35 = 770$, a nie 875).

Rys. pomoc.

$P = 220 \text{ cm}^2$

$44 \text{ cm} \cdot h = 220 \text{ cm}^2$

$h = 5 \text{ cm}$

$220 \text{ cm}^2 : 44 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$

Rys. pomoc.

Obwód = 44 cm

$2 \pi r = 44 \text{ cm}$

$2 \cdot \frac{22}{7} \cdot r = 44 \text{ cm}$

$\frac{44}{7} r = 44 \text{ cm}$

$r = \frac{44 \text{ cm}}{7} = \frac{44}{7}$

$r = \frac{44 \text{ cm}}{7} \cdot \frac{7}{7}$

$r = 7 \text{ cm}$

Rys. pomoc.

$r = 7 \text{ cm}$

$H = 5 \text{ cm}$

$\pi r^2 \cdot H =$

$= \frac{22}{7} \cdot 7^2 \cdot 5 = \frac{22}{7} \cdot 49 \cdot 5 =$

$= 22 \cdot 35 = 875$

$875 \text{ cm}^3 = V$

[Rj]

$[\text{cm}]^2 \cdot [\text{cm}] =$

$= [\text{cm}^3]$

oalp. Objętość pudełka wynosi 875 cm^3 .

Przykład 5.

Gimnazjalista zastosował poprawne metody prowadzące do wyznaczenia szukanych wielkości. W wyniku końcowym pozostawił Π , zamiast – zgodnie z poleceniem – podstawić wartość $\frac{22}{7}$.

$$\begin{array}{l}
 P = a \cdot b \\
 220 \text{ cm}^2 = 44 \text{ cm} \cdot x \quad /: 44 \text{ cm} \\
 x = 5 \text{ cm} \\
 \\
 h \text{ walca} = 5 \text{ cm} \\
 r \text{ walca} = 7 \text{ cm} \\
 \\
 P_p = \pi r^2 \quad P_p = \pi \cdot 7^2 \quad P_p = 49\pi \\
 V = P_p \cdot h \quad V = 49\pi \cdot 5 \quad V = 245\pi \text{ cm}^3 \\
 \\
 L = 2\pi r \\
 44 \text{ cm} = 2\pi r \quad /: 2 \\
 22 \text{ cm} = \pi r \quad /: \pi \\
 r = \frac{22}{\pi} \\
 r = \frac{22}{\frac{22}{7}} \\
 r = 7 \text{ cm} \\
 \\
 V = 22 \cdot \frac{22}{7} \\
 V = 7 \text{ cm}
 \end{array}$$

Przykład 6.

W prezentowanym rozwiązaniu zadania trzecioklasista pokonał zasadnicze trudności zadania – obliczył wysokość równoległoboku i promień podstawy. W dalszej części rozwiązania uczeń popełnił błąd – nie zastosował wzoru na obliczenie objętości walca.

$$\begin{array}{l}
 V = 2\pi r^2 + 2\pi r H \\
 2\pi r H = 220 \text{ cm}^2 \\
 2\pi r = 44 \text{ cm} \\
 220 \text{ cm}^2 : 44 \text{ cm} = 5 \text{ cm} \\
 H = 5 \text{ cm} \\
 \\
 2\pi r = 44 \text{ cm} \quad /: 2 \\
 \pi r = 22 \quad /: \frac{22}{7} \\
 r = 7 \text{ cm} \\
 \\
 V = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 49 + 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 7 \cdot 5 = 44 \text{ cm}^2 + 55 \text{ cm}^2 = 132 \text{ cm}^3 \\
 \\
 \text{Odp. Objętość pudełka wynosi } 132 \text{ cm}^3
 \end{array}$$

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
 Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
 analiza poziomu opanowania umiejętności

Przykład 7.

W rozwiązaniu uczeń poprawnie wyznaczył wysokość równoległoboku (wykonał rysunki pomocnicze). Również poprawnie wyznaczył długość promienia koła, które było podstawą pudełka. Zamiast wykorzystać wyznaczone wartości i obliczyć objętość, uczeń zapisał zależność $22 = 2\pi r$, którą następnie błędnie wykorzystał, obliczając pole koła.

$H = 5$
 $P = a \cdot h$
 $P = 44 \cdot h$
 $220 = 44 \cdot h \quad /:44$
 $\frac{220}{44} = h$
 $h = 5$
 Śc. okręgu - 44 cm
 $Ob = 2\pi r$
 $44 = 2\pi r \quad /:2$
 $\frac{44}{2} = \pi r$
 $22 = \pi r \quad /:\pi$
 $\frac{22}{\pi} = r$
 $\frac{22}{3,14} = r$
 $r \approx 7$
 $22 = \pi r$
 $V = \pi r^2 \cdot H$
 $V = 22^2 \cdot 5$
 $V = 484 \cdot 5$
 $V = 2420$
 $V \approx 2420$

Przykład 8.

Trzecioklasista zastosował poprawną metodę wyznaczenia promienia. Pozostałe działania były niepoprawne.

$220 : 44 = 5$

$Obk = 44 \text{ cm}$
 $2\pi r = 44 \text{ cm} \quad | :2$
 $\pi r = 22 \text{ cm} \quad | :\pi$
 $r = \frac{22}{\pi}$
 $22 \cdot \frac{1}{\pi} = 7$
 $r = 7$
 $2,5\sqrt{2}$
 5 cm
 $P_k = \pi r^2$
 $P_k = \frac{22}{\pi} \cdot \pi = 44 \text{ cm}^2$
 $V = 2,5\sqrt{2} \cdot 44 = 110 \text{ cm}^3$
 Odp. Objętość pudełka wynosi 110 cm^3 .

Przykład 9.

Uczeń w prawidłowy sposób wyznaczył wysokość walca. Pozostałe działania nie prowadziły do rozwiązania zadania.

Przemiokąt = $a \cdot b$

$\cdot 220 = 44 \cdot 5 \quad | : 44$

$\frac{220}{44} = \frac{55}{11} \quad h =$

$\frac{22}{2} = \frac{55}{11} \quad h =$

$h = 5$

$V_w = 2\sqrt{r^2} + 2\sqrt{r^2} \cdot H$

$V_w = 2\sqrt{22^2} + 2\sqrt{22} \cdot 5$

$V_w = 2\sqrt{484} + 220\sqrt{1}$

$V_w = 968\sqrt{1} + 220\sqrt{1}$

$V_w = 1188\sqrt{1} \text{ cm}^3$

$V_w = 1188 \cdot \frac{22}{1}$

$V_w = \frac{37136}{1}$

$V_w = 5351142$

$22 \cdot 22 = 440 + 2 \cdot 22$
 $440 + 44$

$\frac{484}{2}$

968

1188

· 22

3376

3376

37136

535112

37136 : 7

- 35

21

- 21

= 0

- 36

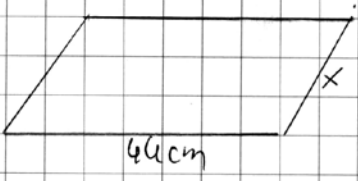
- 35

- 1

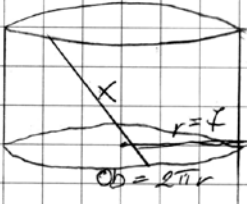
Przykład 10.

Piszący poprawnie wyznaczył promień podstawy. Popenił błąd przy wyznaczaniu wysokości – obliczył długość krótszego boku równoległoboku, a następnie próbował obliczyć wysokość, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$P_{\text{równoległoboku}} = 220 \text{ cm}^2$
 $a = 44 \text{ cm}$ (równoległoboku)

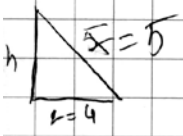


$V_{\text{wielka}} = ?$
 $V = \pi r^2 \cdot H$



$P_{\text{równoległoboku}} = a \cdot h \cdot x$
 $220 = 44 \cdot x$
 $x = \frac{220}{44} = 5$

$Ob = 2\pi r$
 $44 = 2\pi r$
 $22 = \pi r$
 $r = \frac{22}{\pi}$



$a^2 + h^2 = 5^2$
 $16 + h^2 = 25$
 $h^2 = 9$
 $h = 3$

$V = \pi \cdot 49 \cdot 3$
 $V = \frac{147}{\pi} \cdot \frac{22}{\pi} = 21 \cdot 22 = 462 \text{ cm}^3$

1

Odp: Objętość tego pudełka wynosi 462 cm^3

Przykład 11.

Uczeń poprawnie wyznaczył wysokość walca. Podjął próbę obliczenia objętości – nie znał jednak wartości promienia podstawy walca (koła) – nie doprowadził obliczeń do końca.

$h = ?$ $P = 220 \text{ cm}^2$

$b = 44 \text{ cm}$

$$220 \text{ cm}^2 = h \cdot 44$$

$$h = \frac{220}{44} = \frac{55}{11} = 5$$

$V = \pi r^2 \cdot h$

$h = 5 \text{ cm}$

$$V = \frac{22}{7} r^2 \cdot 5$$

$$V = \frac{110}{7} r^2$$

$$V = 15 \frac{1}{7} r^2 \text{ cm}^3$$

Handwritten calculations on the right side of the grid show several attempts at finding the radius r and volume V using the area of the base $P = 44r$ and the volume formula $V = \pi r^2 h$. The student incorrectly uses $P = 44r$ instead of $P = \pi r^2$.

Odpowiedzi błędne

Przykład 12.

W błędnie rozwiązywanych pracach uczniowie nie dokonywali żadnego postępu – nie umieli wyznaczyć żadnej z wielkości. Zapisywali przypadkowe działania.

~~$22 \text{ cm} \cdot 44 \text{ cm} = 968 \text{ cm}^2$~~

$\pi \approx \frac{22}{7}$ ~~$R = \frac{22}{7}$~~ $Ob = P \cdot H$ ~~$\frac{22}{7}$~~ ~~$\frac{22}{7}$~~

~~$Ob = 44 \text{ cm} + 44 \text{ cm} + 22 \text{ cm} + 22 \text{ cm} = 132 \text{ cm}^2 + 132 \text{ cm}^2 = 264 \cdot \frac{22}{7} = 220 \text{ cm}^3$~~

The student's work shows several errors: using the perimeter of the base instead of the area, and incorrectly calculating the volume by summing the lengths of the edges.

Aneks

Średnie wyniki uczniów rozwiązujących zadania w zestawach dostosowanych

1. Wyniki uczniów z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera

Arkusze dla uczniów z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera z zakresu przedmiotów przyrodniczych (GM-M2-152) został dostosowany na podstawie arkusza GM-M1-152 zgodnie z zaleceniami specjalistów. Uczniowie otrzymali arkusz, w którym została wyróżniona informacja o numerze każdego zadania i liczbie punktów możliwych do uzyskania za jego rozwiązanie. W tekstach do zadań i między odpowiedziami zwiększono interlinię oraz zastosowano pionowy układ odpowiedzi. Uczniowie wybrane odpowiedzi zaznaczali w arkuszu, poprzez otoczenie ich kółkiem. Za poprawne rozwiązanie zadań gimnazjalista mógł otrzymać 29 pkt (100%).

Tabela 3. Średnie wyniki procentowe uzyskane przez uczniów za rozwiązanie zadań z zakresu matematyki (arkusz GM-M2-152)

kraj	Okręg	Województwo		
		lubuskie	wielkopolskie	zachodniopomorskie
43%	40,81%	38,00%	38,92%	45,62%

2. Wyniki uczniów słabowidzących i uczniów niewidomych

Arkusze dla uczniów słabowidzących i uczniów niewidomych z zakresu przedmiotów przyrodniczych (GM-M4-152, GM-M5-152, GM-M6-152) zostały przygotowane na podstawie arkusza standardowego. Uczniowie słabowidzący otrzymali arkusze, w których dostosowano wielkość czcionki – odpowiednio Arial 16 pkt i Arial 24 pkt. Dla uczniów niewidomych przygotowano arkusze w brajlu. Za poprawne rozwiązanie zadań gimnazjalista mógł otrzymać 29 pkt (100%).

Tabela 4. Średnie wyniki procentowe uzyskane przez uczniów za rozwiązanie zadań z zakresu matematyki (arkusze GM-M4,5,6-152)

kraj	Okręg			Województwo								
				lubuskie			wielkopolskie			zachodniopomorskie		
	G4	G5	G6	G4	G5	G6	G4	G5	G6	G4	G5	G6
39%	38,44	31,18	31,00	37,71	-	-	41,43	29,30	31,00	33,42	33,86	31,00

3. Wyniki uczniów słabosłyszących i uczniów niesłyszących

Uczniowie słabosłyszący i uczniowie niesłyszący rozwiązywali zadania zawarte w arkuszu GM-M7-152, który został przygotowany na podstawie arkusza standardowego. Arkusz egzaminacyjny składał się z 23 zadań. Polecenia uproszczono, ograniczając je do niezbędnych informacji oraz dostosowano słownictwo. W miarę możliwości przereklamowano treści zadań, wykorzystując znany uczniowi kontekst praktyczny lub ilustrując treść rysunkami. Za poprawne rozwiązanie zadań gimnazjalista mógł otrzymać 29 pkt (100%).

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu
Egzamin gimnazjalny 2015 - **MATEMATYKA**
analiza poziomu opanowania umiejętności

Tabela 5. Średnie wyniki procentowe uzyskane przez uczniów za rozwiązanie zadań z zakresu matematyki (arkusze GM-M7-152)

kraj	Okręg	Województwo		
		lubuskie	wielkopolskie	zachodniopomorskie
46%	44,24%	43,66%	44,78%	43,60%

4. Wyniki uczniów z upośledzeniem umysłowym w stopniu lekkim

Uczniowie z upośledzeniem umysłowym w stopniu lekkim rozwiązywali zadania zawarte w arkuszu GM-M8-152. Arkusz egzaminacyjny zawierał 20 zadań. Treści wielu zadań odnosiły się do sytuacji życiowych bliskich uczniowi. W zadaniach wykorzystano wykres i rysunki, które ułatwiały udzielenie poprawnych odpowiedzi. Za poprawne rozwiązanie zadań gimnazjalista mógł otrzymać 29 pkt (100%).

Tabela 6. Średnie wyniki procentowe uzyskane przez uczniów za rozwiązanie zadań z zakresu matematyki (arkusze GM-M8-152)

kraj	Okręg	Województwo		
		lubuskie	wielkopolskie	zachodniopomorskie
42	40,92%	41,85%	40,37%	41,43%