CZĘŚĆ MATEMATYCZNO - PRZYRODNICZA
MATEMATYKA

Tegoroczny egzamin gimnazjalny przeprowadzony był według nowej formuły. Polegała ona na tym, że w ramach każdej z trzech części egzaminu gimnazjaliści rozwiązywali odrębne zestawy zadań:

- w części humanistycznej z języka polskiego oraz historii i wiedzy o społeczeństwie,
- w części matematyczno-przyrodniczej z matematyki oraz przedmiotów przyrodniczych: biologii, chemii, fizyki i geografii,
- w części językowej z wybranego języka obcego nowożytnego, albo tylko na poziomie podstawowym, albo na poziomie podstawowym i rozszerzonym.

W niniejszej publikacji przedstawiono osiągnięcia uczniów rozwiązujących zadania **w arkuszu standardowym z matematyki**, którzy ukończyli gimnazjum w roku 2012, w szkołach na terenie działania Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej w Poznaniu, tj. w gimnazjach z województw: lubuskiego, wielkopolskiego i zachodniopomorskiego.

Arkusz standardowy zawierał 23 zadania, w tym 20 zadań zamkniętych i 3 zadania otwarte. Wśród zadań zamkniętych dominowały zadania wyboru wielokrotnego, w których uczeń wybierał jedną, z co najmniej czterech podanych odpowiedzi. Cztery zadania miały inną formę: w trzech (zad.: 5., 10. i 16) uczeń musiał ocenić prawdziwość podanych stwierdzeń, a w jednym (zad. 17.) – wybrać z dwóch podanych odpowiedzi poprawną, aby następnie wskazać odpowiedni argument ją uzasadniający. Zadania otwarte (21., 22. i 23.) wymagały od gimnazjalisty samodzielnego sformułowania rozwiązania.

Za rozwiązanie wszystkich zadań w arkuszu standardowym z matematyki uczeń mógł uzyskać maksymalnie 30 punktów; w tym za każde zadanie zamknięte po jednym punkcie (razem 20 punktów), a za trzy zadania otwarte 10 punktów (zad. 21. – 4 pkt, zad. 21. – 2 pkt, zad. 21. – 4 pkt). W zestawie wykorzystano diagram słupkowy, wykres liniowy, dwa rysunki figur w układzie współrzędnych, cztery rysunki figur płaskich i trzy rysunki brył.

Wszystkie zadania w zestawie sprawdzały, w jakim stopniu gimnazjaliści opanowali wymagania ogólne i szczegółowe określone w zakresie matematyki w podstawie programowej kształcenia ogólnego dla III etapu edukacyjnego oraz – w myśl zasady kumulatywności przyjętej w podstawie – odnosiły się również do wymagań przypisanych wcześniejszym etapom edukacyjnym (I i II).

W tym roku, po raz pierwszy, na zaświadczeniu o szczegółowych wynikach egzaminu został podany wynik procentowy oraz wynik centylowy (obydwa wyniki zaokrąglono do liczby całkowitej), dla każdego z zakresów egzaminu gimnazjalnego.

<u>Wynik procentowy</u> określa odsetek punktów, które zdający uzyskał za rozwiązanie zadań z danego zakresu.

<u>Wynik centylowy</u> informuje, jaki odsetek liczby gimnazjalistów uzyskał z danego zakresu wynik taki sam lub niższy niż zdający.

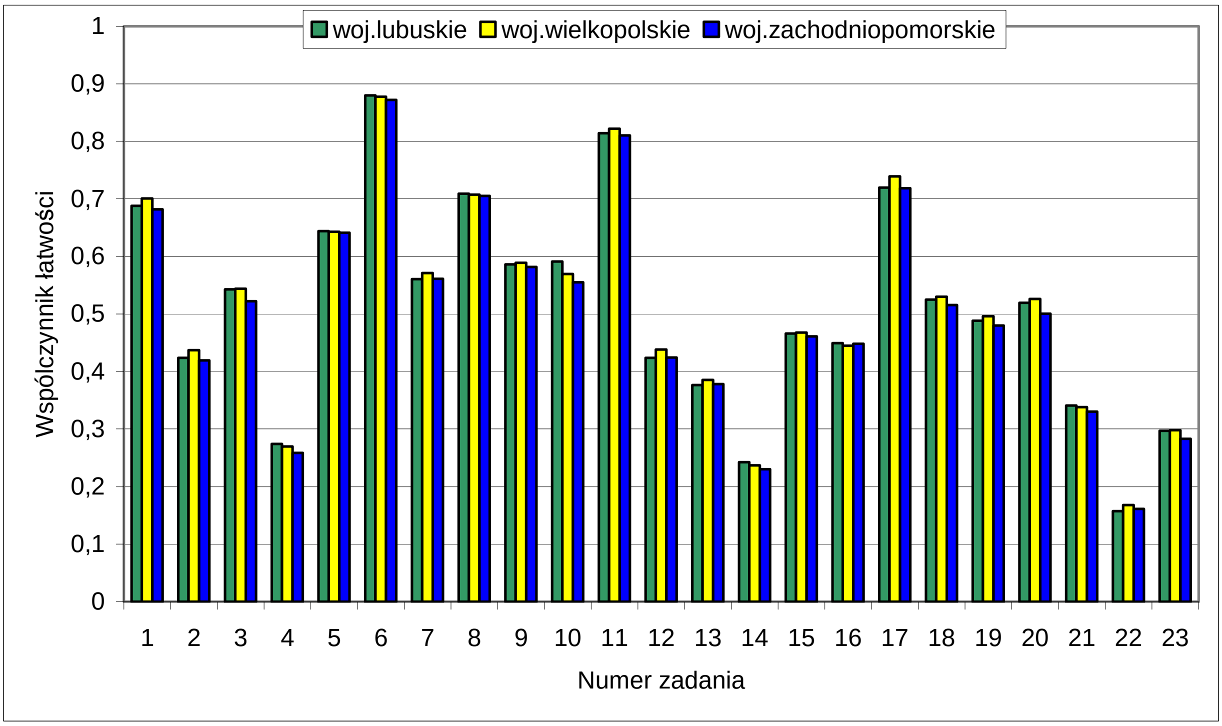
Ogólnie za rozwiązanie zadań w arkuszu standardowym z zakresu matematyki gimnazjaliści uzyskali średnio: w kraju 47% punktów, w Okręgu – 45,91% pkt, w województwie lubuskim – 45,96% pkt, w województwie wielkopolskim – 46,25% pkt, w województwie zachodniopomorskim – 45,14% pkt.

Na kolejnych stronach zaprezentowano analizę wyników uzyskanych za rozwiązanie poszczególnych zadań, która dostarcza szczegółowych informacji dotyczących mocnych i słabych stron wykształcenia matematycznego gimnazjalistów.

Współczynniki łatwości zadań i umiejętności

Analizę jakościową wyników egzaminu gimnazjalnego z zakresu matematyki przeprowadzono w oparciu o interpretację współczynników łatwości poszczególnych zadań.

Wykres 1. przedstawia porównanie współczynników łatwości zadań występujących w obu wersjach arkusza egzaminacyjnego z matematyki, a obliczonych na podstawie wyników uczniów całego Okręgu.



Wykres 1. *Współczynniki łatwości zadań sprawdzających wiadomości i umiejętności z zakresu matematyki.*

Najbardziej ogólnym wnioskiem, który nasuwa analiza współczynników łatwości zadań jest stwierdzenie, że różnice w poziomie osiągnięć uczniów z województw leżących na terenie działania poznańskiej OKE są nieznaczne. Chociaż porównując współczynniki łatwości poszczególnych zadań, obliczone dla województw, można zauważyć, że gimnazjaliści z Wielkopolski - w większości zadań - osiągnęli wyższe współczynniki łatwości niż uczniowie z województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego.

Przedstawione współczynniki łatwości zadań świadczą o tym, że poziom opanowania umiejętności matematycznych przez uczniów w Okręgu jest bardzo zróżnicowany. Interpretując wykres można wskazać zadania, które zdający rozwiązali na poziomie zadowalającym (są to zadania: 6., 8., 11. i 17.), jak również te zadania, które okazały się dla trzecioklasistów bardzo trudne (zadanie 22.). Treść wszystkich zadań wraz z komentarzem dotyczącym wyników przedstawiono na następnych stronach.

W analogiczny sposób przedstawiliśmy wykresy przedstawiające współczynniki łatwości, wyznaczone dla poszczególnych wymagań egzaminacyjnych.

W gimnazjum w tym roku nastąpiło ujednolicenie wymagań egzaminacyjnych z celami kształcenia, opisanymi w podstawie programowej z matematyki jako wymagania ogólne dla III etapu edukacyjnego. Wymagania ogólne określają wymagania egzaminacyjne i są to:

Wymaganie ogólne **I.** – **Wykorzystywanie i tworzenie informacji.**

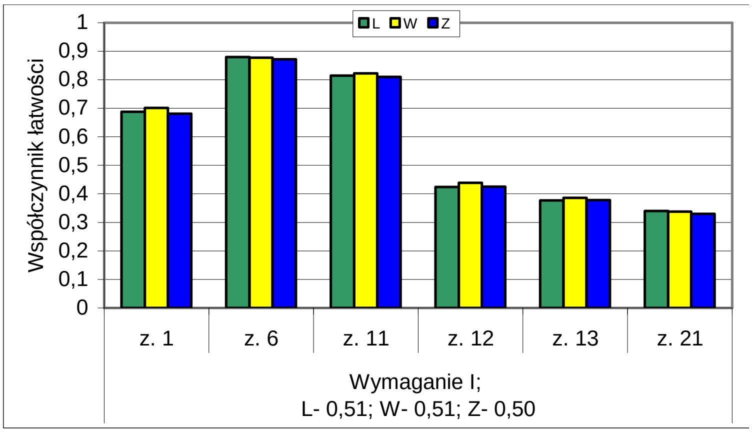
Wymaganie ogólne **II.** – **Wykorzystywanie i tworzenie reprezentacji.**

Wymaganie ogólne **III.** – **Modelowanie matematyczne.**

Wymaganie ogólne **IV.** – **Użycie i tworzenie strategii.**

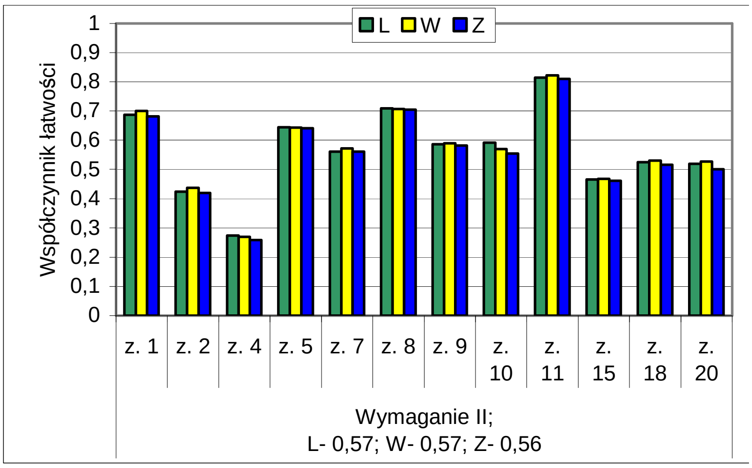
Wymaganie ogólne **V.** – **Rozumowanie i argumentacja.**

Poprzez zestaw zadań egzaminacyjnych z matematyki sprawdzano, w jakim stopniu gimnazjaliści opanowali określone w podstawie programowej umiejętności złożone. Analizując poniższe wykresy można stwierdzić, że żadne z ogólnych wymagań egzaminacyjnych nie zostało opanowane na poziomie zadowalającym. Ogólnie, najtrudniejsze dla gimnazjalistów okazało się tworzenie strategii rozwiązania problemu oraz uzasadnienie prostego rozumowania. Najmniej kłopotów sprawiło im stosowanie algorytmów, tzn. operowanie znanymi obiektami matematycznymi.



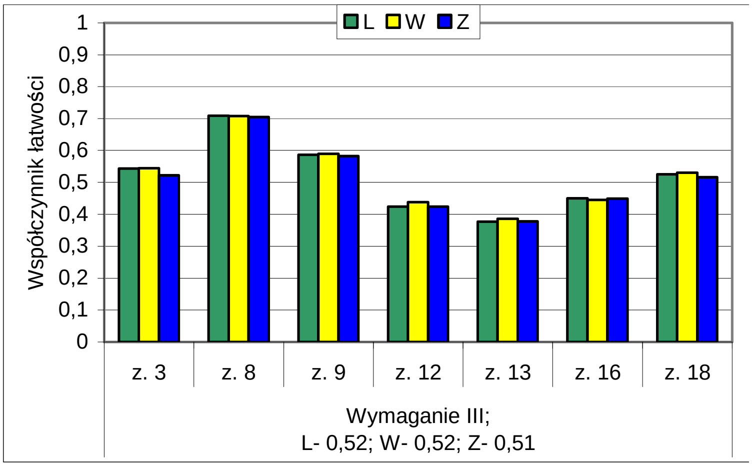
Wykres 2. *Współczynniki łatwości zadań sprawdzających wiadomości i umiejętności w ramach* ***I. wymagania ogólnego (wykorzystywanie i tworzenie informacji).***

Interpretowanie i tworzenie tekstów matematycznych oraz używanie języka matematycznego do opisu rozumowania to umiejętności złożone, które okazały się umiarkowanie trudne dla zdających. W tym zakresie gimnazjaliści w zadowalającym stopniu opanowali odczytywanie informacji z wykresu. Natomiast interpretacja tekstu o charakterze matematycznym, w tym używanie języka matematycznego do opisu rozumowania, stosowanie podanego przepisu postępowania, wykonywanie rutynowych procedur sprawiło im znaczną trudność.



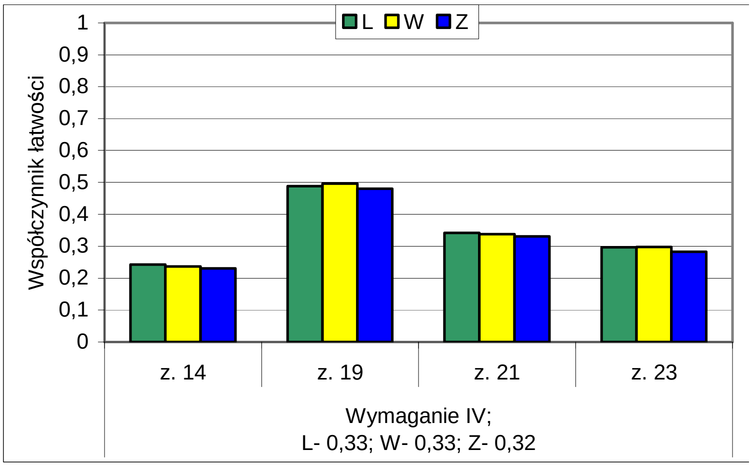
Wykres 3. *Współczynniki łatwości zadań sprawdzających wiadomości i umiejętności w ramach* ***II. wymagania ogólnego (wykorzystywanie i tworzenie reprezentacji)***

Umiarkowanie trudne były dla uczniów umiejętności złożone związane z używaniem prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych i operowaniem nimi. Uczniowie wciąż mają kłopoty z poprawnym wykonywaniem obliczeń na liczbach wymiernych oraz stosowaniem definicji i twierdzeń w typowych kontekstach. Natomiast odczytanie współrzędnych punktu z wykresu oraz przedstawienie części pewnej wielkości w postaci procentu zdający opanowali na poziomie zadowalającym.



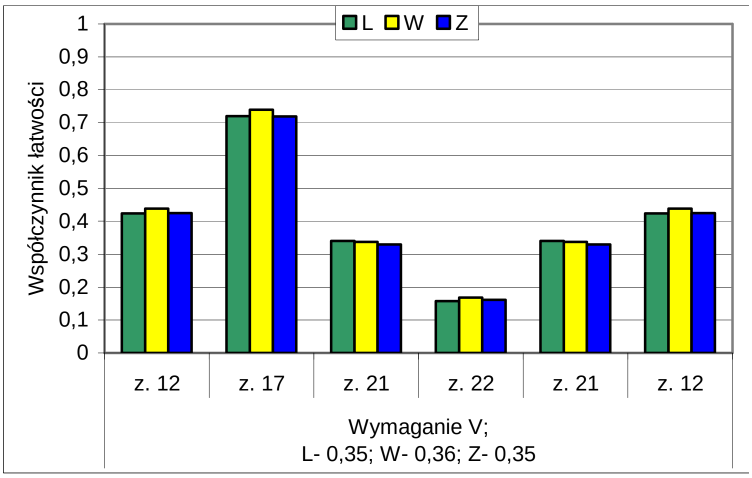
Wykres 4. *Współczynniki łatwości zadań sprawdzających wiadomości i umiejętności w ramach* ***III. wymagania ogólnego (modelowanie matematyczne)***

Dobieranie bądź budowanie modelu matematycznego do opisanej sytuacji, szczególnie praktycznej okazało się dla gimnazjalistów umiarkowanie trudne. Najwięcej problemów mieli uczniowie z wskazaniem wyrażenia algebraicznego opisującego daną sytuację oraz z interpretacją geometryczną sytuacji praktycznej.



Wykres 5. *Współczynniki łatwości zadań sprawdzających wiadomości i umiejętności w ramach* ***IV. wymagania ogólnego (używanie i tworzenie strategii).***

Najbardziej wyrównany, przeciętnie niski, był poziom opanowania umiejętności szczegółowych w zakresie używania i stosowania strategii. Dużym problemem było dla gimnazjalistów ustalenie zależności między podanymi informacjami, zaplanowanie i wykonanie ciągu czynności prowadzących do rozwiązania problemu oraz krytyczna ocena otrzymanych wyników.



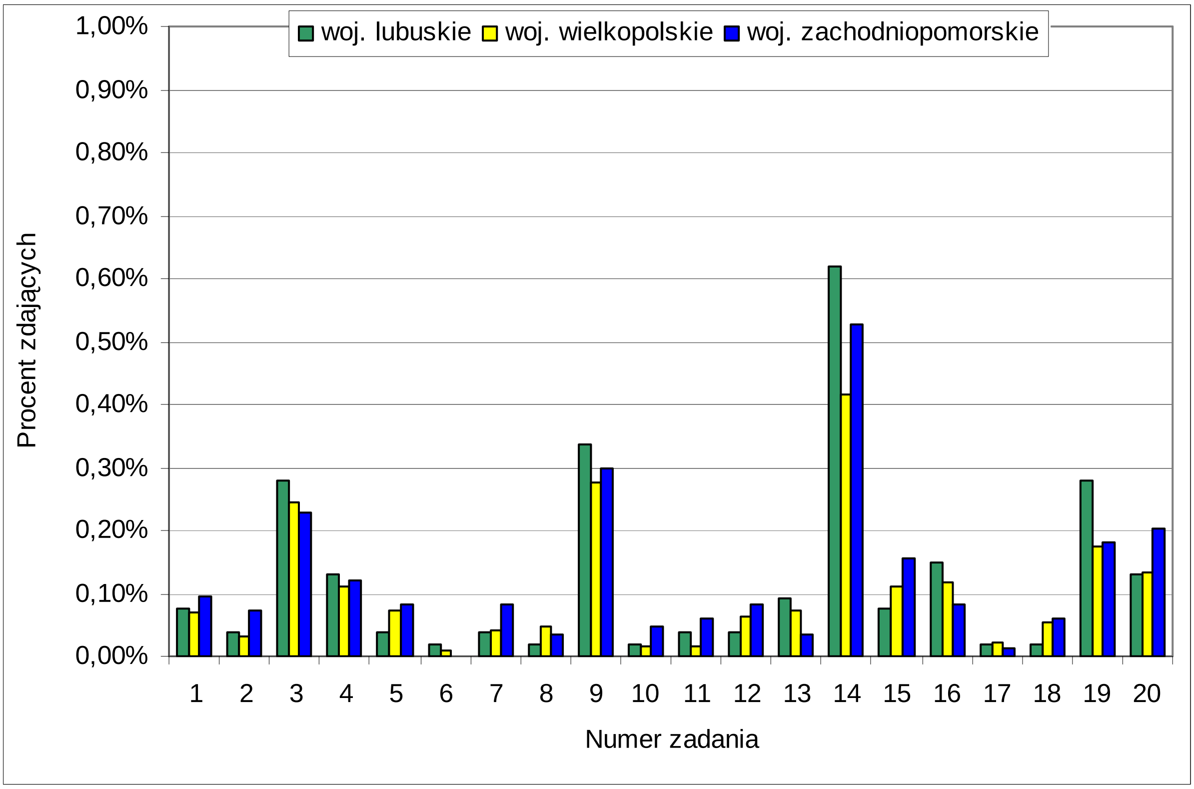
Wykres 6. *Współczynniki łatwości zadań sprawdzających wiadomości i umiejętności w ramach* ***V. wymagania ogólnego (rozumowanie i argumentacja)***

Bardzo różny jest stopień opanowania umiejętności szczegółowych związanych z rozumowaniem i argumentacją. Gimnazjaliści w zadowalającym stopniu wykazali się umiejętnością rozpoznania trójkątów podobnych oraz dobrania właściwego argumentu uzasadniającego podobieństwo tych trójkątów. Bardzo trudne okazało się przeprowadzenie prostego rozumowania i uzasadnienie jego poprawności.

Analiza stopnia opanowania umiejętności sprawdzanych poprzez zadania zamknięte

Analizę osiągnięć gimnazjalistów rozpoczniemy od przedstawienia jaki procent uczniów nie zaznaczył odpowiedzi do zadań zamkniętych, a jaki procent zakreślił kilka odpowiedzi. W obu przypadkach skutkowało to otrzymaniem zera punktów za dane zadanie co oznacza, że uczniowie ci mają pewien wpływ na uzyskane średnie wyniki.

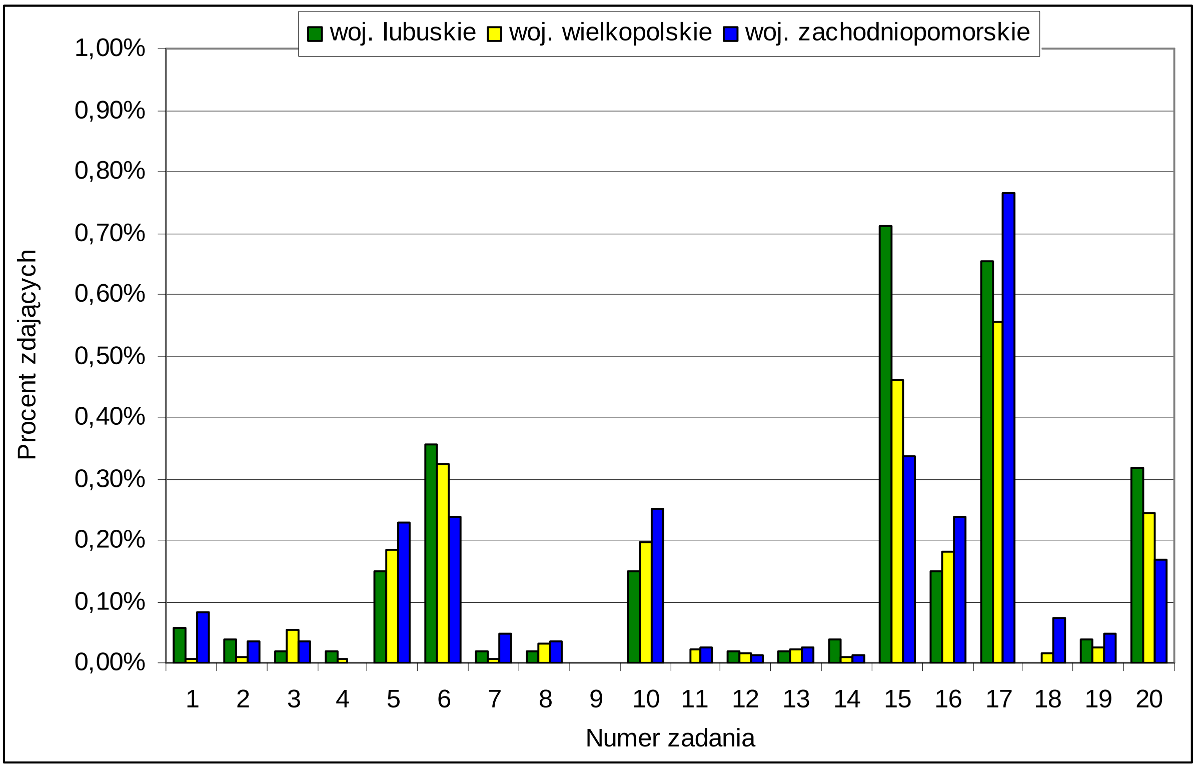
Jak liczne były to grupy trzecioklasistów w każdym województwie, pokazano na kolejnych dwóch wykresach.



Wykres 7. *Procent zdających, którzy <u>nie zaznaczyli odpowiedzi</u> do zadań zamkniętych z matematyki.*

Warto zauważyć, że w każdym województwie frakcja opuszczeń dotyczy wszystkich zadań w arkuszu, choć analizując ją na przestrzeni lat zauważamy, że jest coraz mniejsza.

Podczas tegorocznego egzaminu z matematyki frakcja opuszczeń w zadaniach zamkniętych była niewielka, nie przekroczyła 0,3% populacji w każdym z województw, poza zadaniem 14. Aby w zadaniu 14., będącym typowym zadaniem wielokrotnego wyboru, wskazać poprawną odpowiedź, należało zastosować obliczenia w kontekście praktycznym, dotyczące zamiany jednostek prędkości.



Wykres 8. *Procent zdających, którzy <u>zaznaczyli kilka odpowiedzi</u> do zadań zamkniętych z matematyki.*

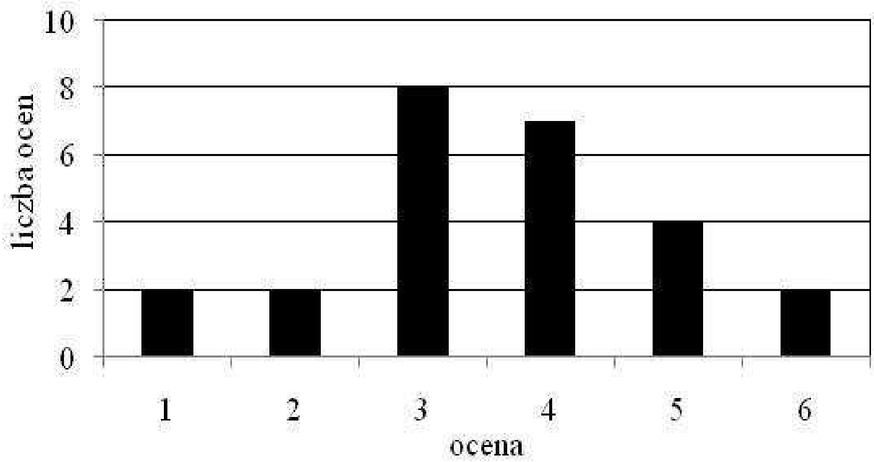
Wielokrotne zaznaczenia odpowiedzi, w każdym województwie, najczęściej wystąpiły w zadaniach 17. i 15. O ile może nie dziwić zaznaczania kilku odpowiedzi w zadaniu 17., gdyż było to zadanie w nowej formie, to zadziwia fakt zaznaczenia kilku odpowiedzi do zadania 15., które było typowym zadaniem wielokrotnego wyboru.

Na kolejnych stronach podano treść zadań, badane umiejętności, wybieralność odpowiedzi oraz współczynniki łatwości i krótki komentarz. Aby ułatwić analizę odpowiedzi, jakich udzielali uczniowie, rozwiązując zadania zamknięte w arkuszu egzaminacyjnym z zakresu matematyki treść zadań i wybieralność odpowiedzi podano w wersji A, natomiast współczynniki łatwości obliczono sumarycznie dla wersji A i B.

Wyjaśnienie skrótów zastosowanych w opracowaniu:

BO	–	brak odpowiedzi	–	oznacza, że uczeń nie podjął próby rozwiązania zadania,
WO	–	wielokrotna odpowiedź	–	oznacza, że uczeń zaznaczył w karcie kilka odpowiedzi do jednego zadania,
T	–	tak	–	oznacza, że podane uzasadnienie, wniosek czy stwierdzenie jest trafne (uzasadnione),
N	–	nie	–	oznacza, że podane uzasadnienie, wniosek czy stwierdzenie jest nietrafne (nieuzasadnione),
P	–	prawda	–	oznacza, że uczeń dokonał oceny zdania (wniosku, stwierdzenia) i uznał je za prawdziwe,
F	–	fałsz	–	oznacza, że uczeń dokonał oceny zdania (wniosku, stwierdzenia) i uznał je za fałszywe,

Zadanie 1. (0-1)
Na diagramie przedstawiono wyniki pracy klasowej z matematyki w pewnej klasie.



Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Z informacji podanych na diagramie wynika, że

A. pracę klasową pisało 30 uczniów.
B. najczęściej powtarzającą się oceną jest 4.
C. mediana wyników z pracy klasowej wynosi 2.
D. średnia wyników z pracy klasowej jest równa 3,6*.

Wybieralność odpowiedzi					Współczynnik łatwości		
Odp.	L	W	Z		L	W	Z
A.	6,29%	6,84%	6,42%		**0,69**	**0,70**	**0,68**
B.	3,80%	2,79%	3,20%				
C.	20,82%	20,11%	21,80%		**Interpretacja współczynnika łatwości**		
D.*	**68,96%**	**70,18%**	**68,40%**		**Zadanie okazało się dla zdających**		
BO	0,07%	0,07%	0,10%		**umiarkowanie trudne.**	**łatwe.**	**umiarkowanie trudne.**
WO	0,06%	0,01%	0,08%				

Wymagania ogólne:
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymaganie szczegółowe
9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa.

**pogrubienia w ramkach i tabelach oznaczają poprawną odpowiedź*

Komentarz

Aby poprawnie wykonać zdanie, najpierw należało zinterpretować informację podaną w postaci diagramu słupkowego (po odczytaniu zsumować liczby uczniów piszących pracę klasową), a następnie wyznaczyć średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych. Jak wynika z wybieranych przez trzecioklasistów odpowiedzi, ponad 20% uczniów nie znało pojęcia „mediana", więc tym samym nie potrafili oni właściwie zinterpretować diagramu – określić, jaką ocenę otrzymał trzynasty uczeń. Zadziwiać musi fakt, że około 3% zdających widziało, że słupek diagramu przy ocenie 4 jest najwyższy, bo przecież trudno wytłumaczyć, dlaczego szesnastolatek nie rozumie słów „najczęściej powtarzająca się ocena".

Zadanie 2. (0-1)
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Odległość na osi liczbowej między największą i najmniejszą spośród liczb: 0, $\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{2}$, –2 jest równa

A. $1\frac{3}{4}$ **B. $3\frac{1}{4}$** C. $2\frac{3}{4}$ D. $1\frac{1}{4}$

Wybieralność odpowiedzi					Współczynnik łatwości		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**		**L**	**W**	**Z**
A.	17,54%	16,65	17,69%		**0,42**	**0,44**	**0,42**
B.	**42,66%**	**43,74%**	**42,66%**				
C.	27,79%	27,07%	27,34%		**Interpretacja współczynnika łatwości**		
D.	11,93%	12,50%	12,20%		**Zadanie okazało się dla rozwiązujących trudne.**		
BO	0,04%	0,03%	0,07%				
WO	0,04%	0,01%	0,04%				

Wymaganie ogólne:
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymaganie szczegółowe
2. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie).

Komentarz

Zadanie wymagało zinterpretowania położenia liczb wymiernych na osi liczbowej oraz obliczenia odległości między liczbami.
Uczniowie, którzy wskazali odpowiedź A, prawidłowo wyznaczyli liczbę największą i najmniejszą, ale nie umieli obliczyć odległości między nimi. Natomiast gimnazjaliści, którzy zaznaczyli odpowiedź C potrafili obliczyć odległość między liczbami na osi liczbowej, ale niestety źle określili liczbę najmniejszą (jako - 2). Około 12% zdających nie poradziło sobie z operowaniem obiektami matematycznymi (źle określili liczbę najmniejszą i największą, oraz nie potrafili wykonać działania na liczbach wymiernych).

Zadanie 3. (0-1)
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Połowa uczestników wycieczki urodziła się w Polsce, co trzeci urodził się w Niemczech, a pięciu pozostałych we Francji. W wycieczce brało udział

A. 26 osób. **B. 30 osób.** C. 46 osób. D. 60 osób.

Wybieralność odpowiedzi				Współczynnik łatwości		
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**	**L**	**W**	**Z**
A.	12,83%	12,34%	13,30%	**0,54**	**0,54**	**0,52**
B.	**53,50%**	**54,30%**	**52,23%**			
C.	26,59%	25,92%	26,68%	**Interpretacja współczynnika łatwości**		
D.	6,78%	7,15%	7,52%	**Zadanie okazało się dla piszących umiarkowanie trudne.**		
BO	0,28%	0,24%	0,23%			
WO	0,02%	0,05%	0,04%			

Wymaganie ogólne:
III. Modelowanie matematyczne.
Wymagania szczegółowe
1. Liczby wymierne dodatnie.
7. Równania.

Komentarz

W tym zadaniu uczniowie musieli wykazać się umiejętnością zbudowania modelu matematycznego do sytuacji osadzonej w kontekście praktycznym, czyli należało ułożyć proste równanie i je rozwiązać.

Można też było zadanie rozwiązać innym sposobem, opartym na rozumieniu języka matematycznego oraz zastosowaniu prostych obliczeń na liczbach wymiernych. Wystarczyło sprawdzić, która z podanych liczb spełnia warunki zadania, po uwzględnieniu ograniczeń wynikających z treści. W tym celu należało dokonać następującej interpretacji tekstu:

1^0. „połowa uczestników” oznacza, że liczba uczestników jest podzielna przez 2; ten warunek spełniają wszystkie podane liczby;

2^0. „co trzeci” oznacza, że liczba uczestników jest podzielna przez 3; warunek ten spełniają tylko liczby 30 i 60;

3^0. obliczamy dla 30 uczestników:
połowa to 15;
co trzeci to 10;
30 – (15+10) = 5 pozostało 5 uczestników i są to osoby pochodzące z Francji

4^0. sprawdzając dla 60 osób otrzymamy
60 – (30+20) = 10, więc liczba 60 nie spełnia warunków zadania.

Analizując wskazane przez rozwiązujących odpowiedzi można zauważyć, że ponad połowa uczniów podała właściwą liczbę uczestników, ale dlaczego co czwarty zaznaczał odpowiedź C, czyli wskazał jako poprawną liczbę 46 osób?

Zadanie 4. (0-1)

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Liczba $\frac{3^2+3^2+3^2}{3^3}$ jest równa

A. 3^0 B. 3^1 C. 3^2 D. 3^3

Wybieralność odpowiedzi			
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**
A.	**28,24%**	**27,20%**	**26,28%**
B.	16,66%	16,39%	16,54%
C.	23,68%	24,50%	25,09%
D.	31,27%	31,79%	31,97%
BO	0,13%	0,11%	0,12%
WO	0,02%	0,01%	0,00%

Współczynnik łatwości		
L	**W**	**Z**
0,27	**0,27**	**0,26**

Interpretacja współczynnika łatwości

Zadanie okazało się dla uczniów trudne.

Wymaganie ogólne:
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymaganie szczegółowe
3. Potęgi.

Komentarz

Zadaniem tym sprawdzano, czy uczeń potrafi obliczyć potęgi liczby naturalnej i przedstawić w postaci jednej potęgi iloraz potęg o takich samych podstawach. Obliczanie kwadratów i sześcianów liczb naturalnych to jedno z wymagań szczegółowych z zakresu szkoły podstawowej, a w gimnazjum kształci się umiejętność wykonywania działań na potęgach. Są to umiejętności praktyczne, wykorzystywane do obliczania pól i objętości figur, a także rozwiązywania zagadnień związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką. Wybór odpowiedzi przez uczniów wyraźnie ukazuje, że umiejętności te nie zostały przez gimnazjalistów opanowane. Jest to sygnał, że w szkołach ponadgimnazjalnych nie wystarczy przypomnieć działań na potęgach, ale należy taką umiejętność wykształcić.

Zadanie 5. (0-1)

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F - jeśli jest fałszywe.

Liczba 1725 jest liczbą podzielną przez 15.	**P**	F
Liczba 1725 jest wielokrotnością 125.	P	**F**

Wybieralność odpowiedzi			
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**
PP.	17,24%	17,28%	16,18%
PF.	**64,73%**	**64,73%**	**65,13%**
FP.	10,78%	10,99%	11,68%
FF.	7,06%	6,75%	6,71%
BO	0,04%	0,07%	0,08%
WO	0,15%	0,18%	0,23%

Współczynnik łatwości		
L	**W**	**Z**
0,64	**0,64**	**0,64**

Interpretacja współczynnika łatwości

Zadanie okazało się dla gimnazjalistów umiarkowanie trudne.

Wymaganie ogólne:
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymaganie szczegółowe
2. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie).

Komentarz

Zadaniem tym sprawdzano, czy uczeń potrafi zastosować znane pojęcia (kształcone były w szkole podstawowej) podzielności i wielokrotności w typowym kontekście. Okazało się, że ponad 35% populacji trzecioklasistów nie poradziło sobie z dzieleniem liczb wymiernych, co jest podstawową umiejętnością przy znajdywaniu dzielników i wielokrotności liczb.

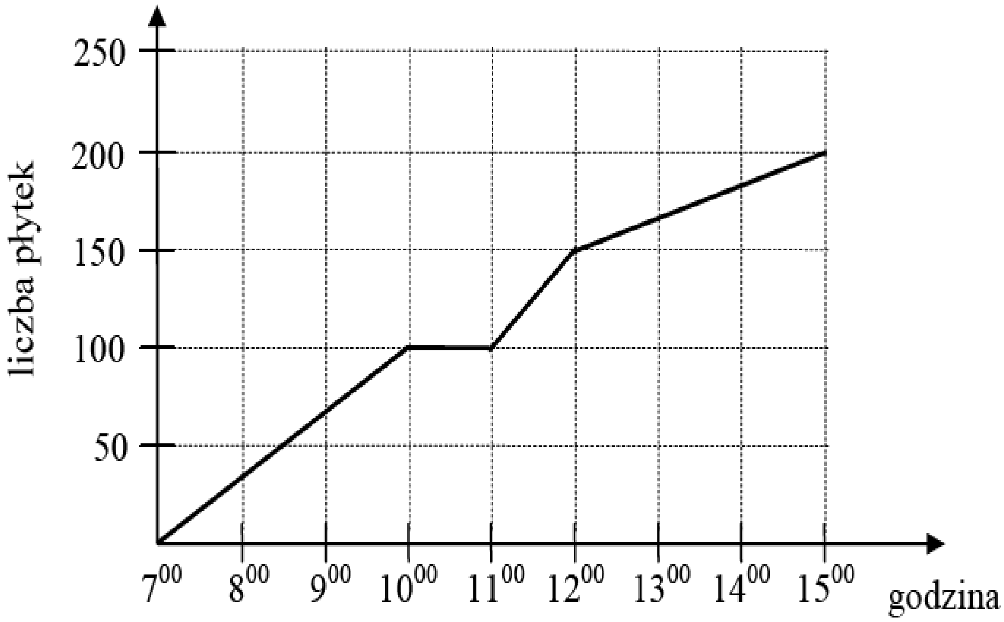
Gdyby przyjrzeć się wyborowi odpowiedzi uczniowskich, to można stwierdzić, że:

- *pierwsze zdanie poprawnie oceniło ponad 80% zdających w każdym województwie (**P**P+**P**F),*
- *drugie zdanie poprawnie oceniło ponad 70% populacji we wszystkich województwach, (P**F**+F**F**).*

Oznacza to, że uczniowie lepiej rozumieją pojęcie podzielności aniżeli wielokrotności. Zrozumienie tych pojęć i stosowanie ich w praktyce to umiejętności, które nauczyciel powinien kształtować u uczniów na lekcjach matematyki, ponieważ jest to umiejętność niezwykle pomocna przy szacowaniu wyników.

Zadanie 6. (0-1)

Glazurnik układał płytki. Wykres przedstawia liczbę ułożonych płytek w zależności od czasu w trakcie ośmiogodzinnego dnia pracy.



Na podstawie wykresu wybierz zdanie fałszywe.

A. O godzinie 10^{00} glazurnik rozpoczął godzinną przerwę.
B. Od 7^{00} do 8^{00} glazurnik ułożył mniej płytek niż od 11^{00} do 12^{00}.
C. **W ciągu każdej godziny glazurnik układał taką samą liczbę płytek.**
D. Przez ostatnie trzy godziny pracy glazurnik ułożył 50 płytek.

Wybieralność odpowiedzi			
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**
A.	1,25%	1,37%	1,41%
B.	3,09%	3,27%	3,87%
C.	**89,33%**	**88,82%**	**88,38%**
D.	5,95%	6,21%	6,10%
BO	0,02%	0,01%	0,00%
WO	0,36%	0,32%	0,24%

Współczynnik łatwości		
L	**W**	**Z**
0,88	**0,88**	**0,87**

Interpretacja współczynnika łatwości

Zadanie okazało się dla zdających łatwe.

Wymaganie ogólne:
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
Wymaganie szczegółowe
8. Wykresy funkcji.

Komentarz

Zadanie sprawdzało, czy uczeń potrafi odczytać i dokonać interpretacji wykresu opisującego tempo pracy glazurnika (zjawisko występujące w życiu codziennym). Aby poprawnie wykonać zadanie, uczeń musiał znaleźć wśród podanych stwierdzeń takie zdanie które nie znajduje potwierdzenia na wykresie (jest zdaniem fałszywym). Uzyskany przez zdających wynik (zadanie najłatwiejsze w całym arkuszu, to bardzo dobry rezultat świadczący o tym, że umiejętność interpretacji wykresów liniowych została opanowana przez znaczną większość gimnazjalistów na poziomie zadowalającym.

Zadanie 7. (0-1)
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Cena płyty kompaktowej po 30% obniżce wynosi 49 zł. Cena tej płyty przed obniżką była równa

A. 14,70 zł. B. 34,30 zł. C. 63,70 zł. **D. 70,00 zł.**

Wybieralność odpowiedzi			
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**
A.	4,31%	4,88%	5,04%
B.	3,35%	3,17%	3,27%
C.	37,03%	35,18%	36,40%
D.	**55,25%**	**56,72%**	**55,16%**
BO	0,04%	0,04%	0,08%
WO	0,02%	0,01%	0,05%

Współczynnik łatwości		
L	**W**	**Z**
0,56	**0,57**	**0,56**

Interpretacja współczynnika łatwości

Zadanie okazało się dla rozwiązujących umiarkowanie trudne.

Wymaganie ogólne:
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymaganie szczegółowe
5. Procenty.

Komentarz

Umiejętność obliczeń procentowych jest jedną z ważniejszych umiejętności w życiu człowieka. Niestety tegoroczni absolwenci gimnazjów nie opanowali tej umiejętności w stopniu zadowalającym. Nie potrafią zastosować właściwego algorytmu w obliczeniach procentowych, mylą obliczanie procentu liczby z obliczaniem liczby na podstawie jej procentu. Wybór odpowiedzi C przez ponad 35% rozwiązujących to zadanie świadczy o tym, że uczniowie wciąż mają kłopoty ze zrozumieniem treści zadania matematycznego, a przede wszystkim brakuje im umiejętności krytycznej oceny otrzymanego wyniku. Dla dużego odsetka zdających cena przed obniżką była niższa od ceny po obniżce

Informacje do zadań 8. i 9.
W turnieju szachowym wzięło udział 48 uczniów pewnego gimnazjum. Liczby uczestników turnieju z klas pierwszych, drugich i trzecich są do siebie w proporcji 3 : 8 : 5.

Zadanie 8.
Jaki procent uczestników turnieju stanowili drugoklasiści? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. 17% B. 24% C. 33% **D. 50%**

Wybieralność odpowiedzi				Współczynnik łatwości		
Odpowiedź	L	W	Z	L	W	Z
A.	7,64%	7,88%	7,57%	**0,71**	**0,71**	**0,70**
B.	11,18%	11,58%	12,12%			
C.	10,41%	10,03%	10,63%	Interpretacja współczynnika łatwości		
D.	**70,74%**	**70,43%**	**69,61%**	**Zadanie okazało się dla piszących łatwe.**		
BO	0,02%	0,05%	0,04%			
WO	0,02%	0,03%	0,04%			

Wymagania ogólne:
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
III. Modelowanie matematyczne.
Wymaganie szczegółowe
5. Procenty.

Komentarz

Rozumienie i interpretacja wielkości proporcjonalnych to umiejętność przydatna w praktyce życia codziennego człowieka. W zadaniu sprawdzano, czy uczeń potrafi poprawnie zinterpretować zapisaną proporcję. Wykorzystując podstawową wiedzę matematyczną, wystarczyło dodać wykonać dodawanie 3+8+5= 16 i zauważyć, że liczba 8 to połowa liczby 16. Gimnazjaliści na zadowalającym poziomie opanowali umiejętność przedstawienia części pewnej wielkości jako procent.

Zadanie 9. (0-1)
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Liczba uczniów klas pierwszych, którzy wzięli udział w turnieju, jest równa

A. 8 **B. 9** C. 10 D. 11

Wybieralność odpowiedzi			
Odpowiedź	L	W	Z
A.	23,35%	22,60%	23,53%
B.	**58,96%**	**59,43%**	**58,18%**
C.	10,09%	10,40%	10,67%
D.	7,26%	7,30%	7,32%
BO	0,34%	0,27%	0,30%
WO	—	—	—

Współczynnik łatwości		
L	W	Z
0,59	**0,59**	**0,58**

Interpretacja współczynnika łatwości

Zadanie okazało się dla uczniów umiarkowanie trudne.

Wymagania ogólne:
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
III. Modelowanie matematyczne.
Wymaganie szczegółowe
1. Liczby wymierne dodatnie.

Komentarz

Zadanie sprawdzało, czy uczeń potrafi stosować obliczenia na liczbach wymiernych do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym. Aby wskazać właściwą odpowiedź, wystarczyło zrozumieć i przetworzyć treść podanej informacji. Niespełna 60% gimnazjalistów potrafiło obliczyć ułamek danej liczby naturalnej, a jest to umiejętność kształcona w szkole podstawowej, którą gimnazjaliści powinni umieć stosować w każdej sytuacji.

Zadanie 10. (0-1)
Organizatorzy konkursu matematycznego przygotowali zestaw, w którym było 10 pytań z algebry i 8 pytań z geometrii. Uczestnicy konkursu losowali kolejno po jednym pytaniu, które po wylosowaniu było usuwane z zestawu. Pierwszy uczestnik wylosował pytanie z algebry.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F - jeśli jest fałszywe.

Prawdopodobieństwo wyciagnięcia przez druga osobę pytania z algebry jest równe $\frac{9}{17}$.	**P**	F
Prawdopodobieństwo wyciagnięcia przez druga osobę pytania z geometrii się nie zmieniło.	P	**F**

Wybieralność odpowiedzi			
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**
PP.	13,82%	15,45%	15,34%
PF.	**60,48%**	**57,15%**	**55,42%**
FP.	15,30%	16,96%	18,00%
FF.	10,24%	10,22%	10,94%
BO	0,02%	0,02%	0,05%
WO	0,15%	0,20%	0,25%

Współczynnik łatwości		
L	**W**	**Z**
0,59	**0,57**	**0,55**

Interpretacja współczynnika łatwości
Zadanie okazało się dla gimnazjalistów umiarkowanie trudne.

Wymaganie ogólne:
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymaganie szczegółowe
9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa.

Komentarz

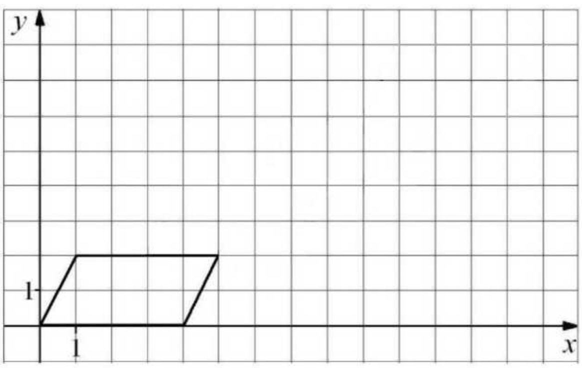
Analiza opisanych doświadczeń losowych i poprawne określenie prawdopodobieństwa dwóch prostych zdarzeń losowych okazało się dla uczniów umiejętnością umiarkowanie trudną. Gdyby przyjrzeć się wyborowi odpowiedzi uczniowskich, to można stwierdzić, że:

- *pierwsze zdanie poprawnie oceniło ponad 70% populacji we wszystkich województwach (**P**P+**P**F),*
- *drugie zdanie poprawnie oceniło ponad 70% zdających w województwie lubuskim, natomiast w województwie wielkopolskim ok. 67%, a w zachodniopomorskim ok. 66% trzecioklasistów (P**F**+F**F**).*

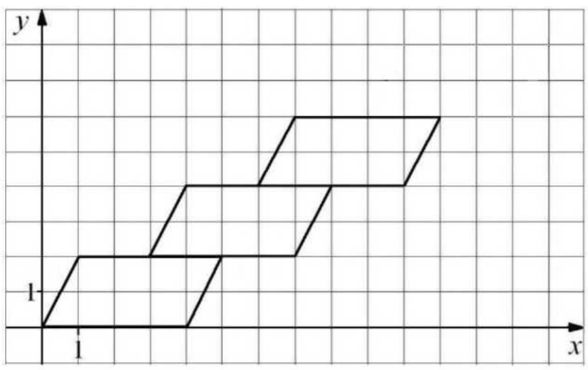
Jest to sygnał, że określanie prawdopodobieństwa prostych zdarzeń losowych nie jest przez gimnazjalistów wystarczająco opanowane.

Informacje do zadań 11.-13.

Małgosia narysowała równoległobok położony w układzie współrzędnych tak jak na pierwszym rysunku. Kolejne przystające do niego równoległoboki rysowała w taki sposób, że dolny lewy wierzchołek rysowanego równoległoboku był środkiem górnego boku poprzedniego równoległoboku (rysunek 2.).



Rysunek 1.



Rysunek 2.

Zadanie 11. (0-1)
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Małgosia narysowała w opisany sposób czwarty równoległobok. Współrzędna *y* prawego górnego wierzchołka tego równoległoboku jest równa

A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

Wybieralność odpowiedzi			
Odpowiedź	L	W	Z
A.	**81,60%**	**82,49%**	**81,42%**
B.	5,75%	5,28%	5,82%
C.	4,76%	4,27%	4,35%
D.	7,86%	7,92%	8,33%
BO	0,04%	0,02%	0,06%
WO	0,00%	0,02%	0,02%

Współczynnik łatwości		
L	W	Z
0,81	**0,82**	**0,81**

Interpretacja współczynnika łatwości

Zadanie okazało się dla zdających łatwe.

Wymagania ogólne:
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymaganie szczegółowe
8. Wykresy funkcji.

Komentarz

Zadaniem tym sprawdzano, czy uczeń potrafi podany sposób postępowania zastosować w praktyce. Postępowanie według ustalonych procedur to umiejętność bardzo ważna w codziennym życiu każdego człowieka. Cieszy więc fakt, że ponad 80% gimnazjalistów poprawnie wykonało zadanie odczytując współrzędne punktu wyznaczonego zgodnie z opisaną procedurą, czyli poradzili sobie z procedurą działając na konkretach.

Zadanie 12. (0-1)
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Agnieszka narysowała w taki sam sposób *n* równoległoboków. Współrzędna *y* prawego górnego wierzchołka ostatniego równoległoboku jest równa

A $n + 2$ **B. $2n$** C. $2n + 2$ D. $4n$

Wybieralność odpowiedzi			
Odpowiedź	L	W	Z
A.	29,55%	28,08%	28,54%
B.	**41,70%**	**43,68%**	**43,05%**
C.	17,19%	16,85%	16,42%
D.	11,51%	11,32%	11,90%
BO	0,04%	0,06%	0,08%
WO	0,02%	0,02%	0,01%

Współczynnik łatwości		
L	W	Z
0,42	**0,44**	**0,42**

Interpretacja współczynnika łatwości

Zadanie okazało się dla rozwiązujących trudne.

Wymagania ogólne:
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
III. Modelowanie matematyczne.
V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymaganie szczegółowe
6.Wyrażenia algebraiczne.

Komentarz

W zadaniu tym wymagano, aby uczeń uogólnił podany sposób postępowania i ustalił wzór na rzędną prawego górnego wierzchołka n-tego równoległoboku. Okazało się, że zaledwie połowa z tych zdających, którzy prawidłowo określili współrzędne liczbowe czwartego równoległoboku, potrafiła wskazać wyrażenie algebraiczne odpowiadające współrzędnej y ostatniego równoległoboku. Oznacza to, że wciąż znaczną trudność sprawia uczniom opisanie za pomocą wyrażeń algebraicznych związków między różnymi wielkościami. Jednocześnie wybór odpowiedzi A. przez prawie 30% zdających informuje, że gimnazjaliści ci nie rozróżniają porównywanie ilorazowego od różnicowego.

Zadanie 13. (0-1)

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Współrzędne prawego górnego wierzchołka ostatniego narysowanego równoległoboku są równe (a,b). Współrzędne takiego wierzchołka w następnym równoległoboku będą równe

A. $(a + 4, b + 2)$ B. $(a + 2, b + 3)$ **C. $(a + 3, b + 2)$** D. $(a + 3, b + 1)$

Wybieralność odpowiedzi			
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**
A.	32,50%	32,16%	31,98%
B.	23,55%	23,57%	23,59%
C.	**37,56%**	**38,42%**	**37,91%**
D.	6,27%	5,76%	6,45%
BO	0,09%	0,07%	0,04%
WO	0,02%	0,02%	0,02%

Współczynnik łatwości		
L	**W**	**Z**
0,38	**0,39**	**0,38**

Interpretacja współczynnika łatwości

Zadanie okazało się dla piszących trudne.

Wymagania ogólne:
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
III. Modelowanie matematyczne.
Wymaganie szczegółowe
6. Wyrażenia algebraiczne.
8. Wykresy funkcji.

Komentarz

Poprawne wykonanie tego zadania wymagało powiązania informacji na temat przedstawionej sytuacji, a następnie wskazania wyrażenia algebraicznego będącego jej modelem matematycznym.

Około 38% gimnazjalistów wskazało poprawną odpowiedź, ale co trzeci uczeń wybrał błędną odpowiedź A, a co czwarty dopowiedź B. Jest to tylko potwierdzeniem faktu, że uczniowie nie potrafią opisywać związków między różnymi wielkościami za pomocą wyrażeń algebraicznych ani interpretować informacji przedstawionych w układzie współrzędnych. Mimo, że wiązka tych trzech zadań prowadziła uczniów od konkretu do uogólnienia, gimnazjaliści nie sprostali temu zadaniu.

Zadanie 14. (0-1)

Piechur porusza się z prędkością $4\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Każdy jego krok ma długość 0,8 m.

Ile kroków wykona piechur w czasie 12 minut? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. 1000 kroków B. 800 kroków C. 640 kroków D. 100 kroków

Wybieralność odpowiedzi			
Odpowiedź	L	W	Z
A.	**25,07%**	**24,68%**	**24,54%**
B.	22,95%	23,86%	24,64%
C.	41,25%	40,79%	41,14%
D.	10,07%	10,24%	9,14%
BO	0,62%	0,42%	0,53%
WO	0,04%	0,01%	0,01%

Współczynnik łatwości		
L	W	Z
0,24	**0,24**	**0,23**

Interpretacja współczynnika łatwości

Zadanie okazało się dla uczniów trudne.

Wymaganie ogólne:
IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe
1. Liczby wymierne dodatnie.
7. Równania.

Komentarz

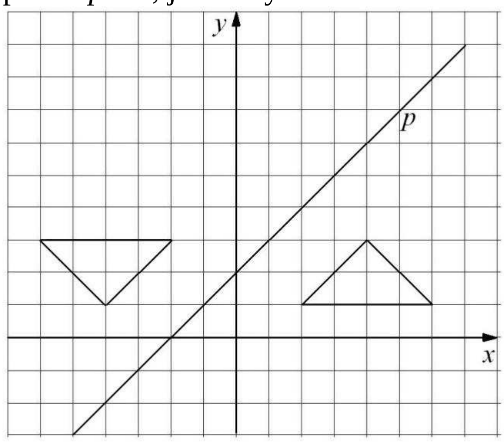
W zadaniu tym miał uczeń wykazać się umiejętnością rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym. Zadanie sprawdzało, czy absolwent gimnazjum potrafi zaplanować i wykonać ciąg czynności, wprost wynikających z treści zadania, lecz nie mieszczących się w ramach rutynowego algorytmu. Rozwiązanie zadania wymagało zarówno ustalenia zależności między podanymi informacjami, jak również poprawnej zamiany jednostek oraz poprawnego wykonania obliczeń na liczbach wymiernych. Aby wybrać poprawną odpowiedź, uczeń musiał zaplanować obliczenie drogi pokonanej w czasie 12 minut (v·t) oraz liczby kroków na tej drodze (s : długość kroku) i uzgodnić jednostki. W każdym województwie zaledwie co czwarty uczeń wskazał poprawną odpowiedź. Analizując wybór odpowiedzi uczniowskich można stwierdzić, że:

- *dla około 10 % gimnazjalistów problemem była zamiana jednostek, gdyż zamienili 1 kilometr na 100 metrów (odpowiedź D.);*
- *pozostałym gimnazjalistom nie sprawiła kłopotu zamiana jednostek, lecz rachunek na nich, który mógł być elementem krytycznej oceny otrzymanego wyniku. Bowiem wskazujący odpowiedź C. (ponad 40% populacji) zamiast podzielić długość drogi przez długość kroku, wykonali mnożenie i otrzymali (w swoim rozumowaniu) liczbę kroków, niestety w metrach kwadratowych. Natomiast wybierający odpowiedź B. „zapomnieli" długość drogi podzielić przez długość kroku i otrzymali liczbę kroków w metrach.*

Rozkład wyboru odpowiedzi pokazuje, że uczniowie nie znają rachunku jednostek. W edukacji matematycznej należy pokazać uczniom, że rachunek jednostek może być ważną wskazówką przy ustalaniu sposobu rozwiązania zadania i istotnym elementem samooceny.

Zadanie 15. (0-1)

W prostokątnym układzie współrzędnych umieszczone są dwa przystające trójkąty oraz prosta *p* tak, jak na rysunku.



Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Jeden trójkąt jest symetryczny do drugiego względem
A. osi y.
B. prostej *p*.
C. punktu (1,3).
D. **punktu przecięcia prostej *p* i osi *y*.**
E. początku układu współrzędnych.

Wybieralność odpowiedzi			
Odpowiedź	L	W	Z
A.	14,06%	14,26%	14,35%
B.	25,74%	26,15%	25,17%
C.	7,32%	6,69%	7,36%
D.	**47,73%**	**47,93%**	**47,79%**
E.	4,36%	4,40%	4,84%
BO	0,07%	0,11%	0,16%
WO	0,71%	0,46%	0,34%

Współczynnik łatwości		
L	W	Z
0,47	**0,47**	**0,46**

Interpretacja współczynnika łatwości

Zadanie okazało się dla gimnazjalistów trudne.

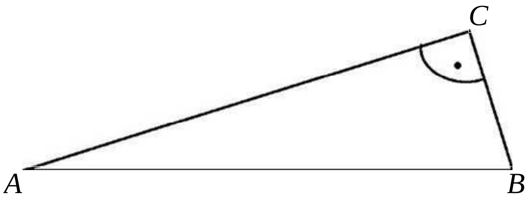
Wymaganie ogólne:
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymaganie szczegółowe
10. Figury płaskie.

Komentarz

Zadanie sprawdzało, czy uczeń rozpoznaje pary figur symetrycznych względem prostej bądź względem punktu. Słaby wynik zdających wskazuje, że uczniowie nie posiedli tej umiejętności, bowiem nie potrafili zastosować definicji w typowym kontekście. Wybór odpowiedzi B przez jedną czwartą gimnazjalistów świadczy o tym, że nie znają oni własności figur symetrycznych względem prostej.

Zadanie 16. (0-1)

Trzy kutry rybackie *A*, *B* i *C* są jednakowo oddalone od platformy wiertniczej. Wzajemne położenie kutrów przedstawiono na rysunku. Platforma wiertnicza znajduje się w punkcie *O* (niezaznaczonym na rysunku).



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, lub F - jeśli jest fałszywe.

Punkt *O* jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta ABC.	P	**F**
Punkt *O* jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.	**P**	F

Wybieralność odpowiedzi			
Odpowiedź	L	W	Z
PP.	13,63%	14,63%	14,32%
PF.	28,50%	27,88%	28,40%
FP.	**45,33%**	**44,80%**	**44,55%**
FF.	12,24%	12,39%	12,41%
BO	0,15%	0,12%	0,08%
WO	0,15%	0,18%	0,24%

Współczynnik łatwości		
L	W	Z
0,45	**0,44**	**0,45**

Interpretacja współczynnika łatwości

Zadanie okazało się dla zdających trudne.

Wymaganie ogólne:
III. Modelowanie matematyczne.
Wymaganie szczegółowe
10. Figury płaskie.

Komentarz

W zadaniu należało dokonać interpretacji geometrycznej opisanej sytuacji praktycznej. Aby poprawnie ocenić podane zdania, uczniowie powinni wykorzystać wiedzę dotyczącą środka okręgu opisanego na trójkącie oraz środka okręgu wpisanego w trójkąt. Jest to wiedza, którą uczniowie zgodnie z podstawą programową powinni posiąść na lekcjach matematyki poprzez samodzielne konstruowanie okręgów wpisanych i opisanych na trójkącie oraz opowiadanie o ich własnościach. Uzyskany wynik ukazuje, że wiedzy tej nie posiadł nawet co drugi zdający.

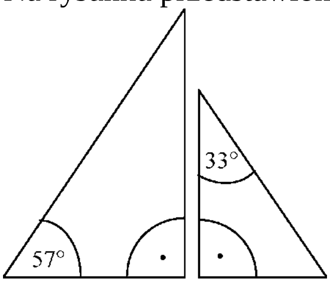
Gdyby przyjrzeć się wyborowi odpowiedzi uczniowskich, to można stwierdzić, że:

- *pierwsze zdanie poprawnie oceniło około 58% zdających w województwie lubuskim, natomiast w województwach: wielkopolskim i zachodniopomorskim ok. 57% trzecioklasistów (**F**P+**F**F),*
- *drugie zdanie poprawnie oceniło 59% populacji we wszystkich województwach, (F**P**+P**P**).*

Oznacza to, że uczniowie nie mieli ugruntowanej wiedzy i umiejętności konstrukcyjnych dotyczących okręgów wpisanych i opisanych na trójkątach .

Zadanie 17. (0-1)

Na rysunku przedstawiono dwa trójkąty prostokątne.



Czy te trójkąty są trójkątami podobnymi? Wybierz odpowiedź T (tak) albo N (nie) i jej uzasadnienie spośród zdań oznaczonych literami A-C.

T	ponieważ	A.	każde dwa trójkąty prostokątne są podobne.
		B.	miary kątów ostrych jednego trójkąta są różne od miar kątów ostrych drugiego trójkąta.
N		**C.**	miary kątów ostrych jednego trójkąta są takie same jak miary kątów ostrych drugiego trójkąta.

Wybieralność odpowiedzi			
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**
TA.	12,39%	11,28%	12,29%
TB.	2,92%	3,03%	2,75%
TC.	**71,37%**	**73,64%**	**71,74%**
NA.	0,47%	0,32%	0,30%
NB.	11,25%	10,40%	11,33%
NC.	0,92%	0,76%	0,81%
BO	0,02%	0,02%	0,01%
WO	0,66%	0,55%	0,77%

Współczynnik łatwości		
L	**W**	**Z**
0,72	**0,74**	**0,72**

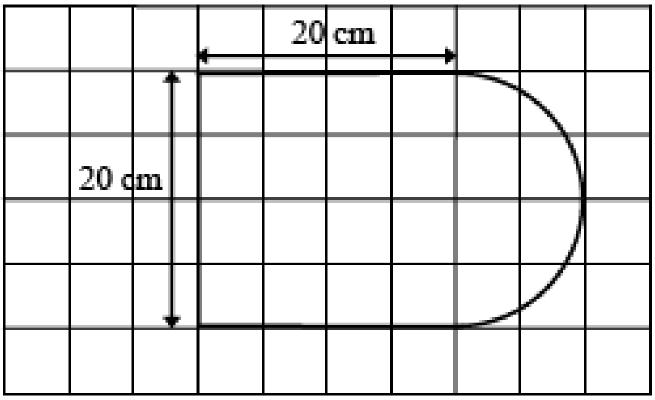
Interpretacja współczynnika łatwości
Zadanie okazało się dla rozwiązujących łatwe.

Wymaganie ogólne:
V. Rozumowanie i argumentacja.
Wymaganie szczegółowe
10. Figury płaskie.

Komentarz

W zadaniu tym uczeń miał wybrać poprawną odpowiedź oraz dobrać odpowiedni argument, uzasadniający tę odpowiedź. Zadanie sprawdzało umiejętność rozpoznania trójkątów podobnych oraz dobrania właściwego argumentu uzasadniającego podobieństwo tych trójkątów. Okazało się, że zdający opanowali tą umiejętności w stopniu zadowalającym. Uczniowie nie tylko potrafili rozpoznać, że przedstawione trójkąty są podobne, ale również wiedzieli, dlaczego są one podobne. Uzyskany wynik jest bardzo dobrym rezultatem i świadczy o tym, że najtrudniejsze z wymagań ogólnych zawartych w nowej podstawie programowej, czyli umiejętność prostego rozumowania i argumentowania została opanowana przez znaczną większość gimnazjalistów.

Zadanie 18. (0-1)
Kształt i wymiary deski do krojenia przedstawiono na rysunku.



Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Powierzchnia tej deski (w cm^2) jest równa

A. 400+50π B. 40+50π C. 400+100π D. 40+100π

Wybieralność odpowiedzi			
Odpowiedź	L	W	Z
A.	**53,45%**	**53,73%**	**51,85%**
B.	14,62%	14,13%	15,79%
C.	24,81%	25,79%	25,29%
D.	7,10%	6,29%	6,93%
BO	0,02%	0,05%	0,06%
WO	0,00%	0,02%	0,07%

Współczynnik łatwości		
L	W	Z
0,52	**0,53**	**0,52**

Interpretacja współczynnika łatwości

Zadanie okazało się dla piszących umiarkowanie trudne.

Wymagania ogólne:
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
III. Modelowanie matematyczne.
Wymaganie szczegółowe
10. Figury płaskie.

Komentarz

Obliczanie pola powierzchni figur o różnych kształtach to umiejętność przydatna w życiu codziennym człowieka. Zadanie sprawdzało, czy uczeń potrafi zbudować model matematyczny sytuacji przedstawionej na rysunku, czyli czy potrafi wskazać wyrażenie arytmetyczne odpowiadające powierzchni narysowanej deski. Ułatwieniem w rozwiązaniu tego zadania była siatka kwadratowa, na podstawie której można było odczytać miary potrzebne do obliczenia pola półkola. Zastanawiający jest fakt, że ponad 20% gimnazjalistów nie potrafiło obliczyć pola kwadratu – to ci zdający, którzy wybrali odpowiedź B. lub D. Natomiast co trzeci uczeń nie zauważył, że kształt deski stanowi półkole, a nie koło (świadczy o tym wybór odpowiedzi C. i D. Rozpoznawanie i nazywanie kształtów figur w nietypowym kontekście to umiejętność, którą uczeń powinien posiąść na lekcjach matematyki.

Zadanie 19. (0-1)

Basen ma kształt prostopadłościanu, którego podstawa (dno basenu) ma wymiary 15 m x 10 m. Do basenu wlano 240 m^3 wody, która wypełniła go do $\frac{4}{5}$ głębokości.

Jaka jest głębokość tego basenu? Wybierz odpowiedź spośród podanych.

A. 1,28 m B. 1,5 m **C. 2 m** D. 3 m

Wybieralność odpowiedzi			
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**
A.	9,36%	9,35%	8,35%
B.	23,35%	22,62%	23,15%
C.	**49,19%**	**49,88%**	**48,20%**
D.	17,79%	17,95%	20,08%
BO	0,28%	0,17%	0,18%
WO	0,04%	0,03%	0,05%

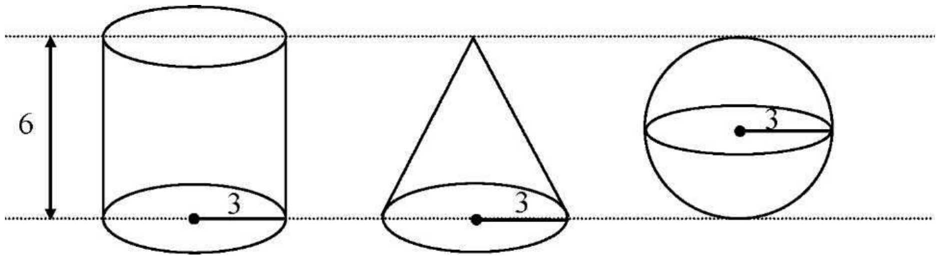
Współczynnik łatwości		
L	**W**	**Z**
0,49	**0,50**	**0,48**
Interpretacja współczynnika łatwości		
Zadanie okazało się dla uczniów		
trudne.	**umiarkowanie trudne.**	**trudne.**

Wymaganie ogólne:
IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymaganie szczegółowe
11. Bryły.

Komentarz

Zadanie sprawdzało, czy uczeń potrafi obliczyć wysokość prostopadłościanu (w opisanej sytuacji była to głębokość basenu), jeśli podano objętość i wymiary podstawy bryły. Jednocześnie wymagano od rozwiązującego uwzględnienia zastrzeżenia - woda sięga do 4/5 głębokości. Uzyskany wynik sugeruje, że umiejętność obliczania objętości brył powinna być ćwiczona na lekcjach matematyki w kontekstach praktycznych.

Zadanie 20. (0-1)
Na rysunku przedstawiono walec, stożek i kulę oraz niektóre ich wymiary.



Na podstawie informacji przedstawionych na rysunku wybierz zdanie prawdziwe.

A. Objętość kuli jest większa od objętości walca.
B. Objętość stożka jest większa od objętości kuli.
C. Objętość walca jest 2 razy większa od objętości kuli.
D. **Objętość stożka jest 3 razy mniejsza od objętości walca.**

Wybieralność odpowiedzi			
Odpowiedź	**L**	**W**	**Z**
A.	10,26%	9,67%	10,15%
B.	13,61%	13,76%	14,93%
C.	23,07%	22,86%	24,51%
D.	**52,61%**	**53,34%**	**50,03%**
BO	0,13%	0,13%	0,20%
WO	0,32%	0,24%	0,17%

Współczynnik łatwości		
L	**W**	**Z**
0,52	**0,53**	**0,50**

Interpretacja współczynnika łatwości
Zadanie okazało się dla gimnazjalistów umiarkowanie trudne.

Wymaganie ogólne:
II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.
Wymaganie szczegółowe
11. Bryły.

Komentarz

Zadanie sprawdzało, czy uczeń potrafi obliczać objętość brył obrotowych oraz czy umie porównywać wartości wyrażeń arytmetycznych. Aby wskazać poprawną odpowiedź, należało ułożyć wyrażenia arytmetyczne pozwalające obliczyć objętości trzech brył obrotowych o wymiarach podanych na rysunku. Następnie analizując podane odpowiedzi, porównywać odpowiednie wyrażenia. Tylko połowa zdających wskazała poprawną odpowiedź.

Analiza odpowiedzi uczniów do zadaniach otwartych wraz z przykładami rozwiązań uczniowskich

Jak już wspomniano, za rozwiązanie wszystkich zadań otwartych zdający mógł otrzymać maksymalnie 10 punktów. W tabeli poniżej przedstawiono, jaki procent wszystkich uczniów danego województwa uzyskał za rozwiązanie wszystkich zadań otwartych maksymalną liczbę punktów, a jaki zero punktów. Dodajmy, że zero punktów otrzymywali zarówno ci uczniowie, którzy źle rozwiązali zadanie, jak i ci, którzy nie podjęli próby rozwiązania zadania.

województwo	**Odsetek uczniów, którzy za rozwiązanie zadań otwartych otrzymali**		
	maksymalną punktację (10 pkt)	**0 pkt**	
		ogółem	**w tym opuszczono wszystkie zadania otwarte**
lubuskie	**5,2%**	**37,1%**	**12,5%**
wielkopolskie	**5,3%**	**37,4%**	**11,1%**
zachodniopomorskie	**6,0%**	**39,4%**	**14,3%**

Zastanawiający jest fakt, wymagający głębszej refleksji w szkołach, że spośród tych uczniów, którzy za wszystkie zadania otwarte otrzymali zero punktów: co ósmy zdający w województwie lubuskim, co dziewiąty w województwie wielkopolskim i co siódmy w województwie zachodniopomorskim nawet nie podjął próby rozwiązania wszystkich trzech zadań otwartych, zostawiając puste miejsca w arkuszu.

Zakłada się, że w każdym rozkładzie normalnym zbliżony procent populacji osiąga wyniki najwyższe, jak i najniższe. Tymczasem za rozwiązanie wszystkich zadań otwartych w każdym z analizowanych województw, zero punktów otrzymywało około siedem razy więcej zdających w porównaniu z tymi, którzy uzyskali maksymalną liczbę punktów.

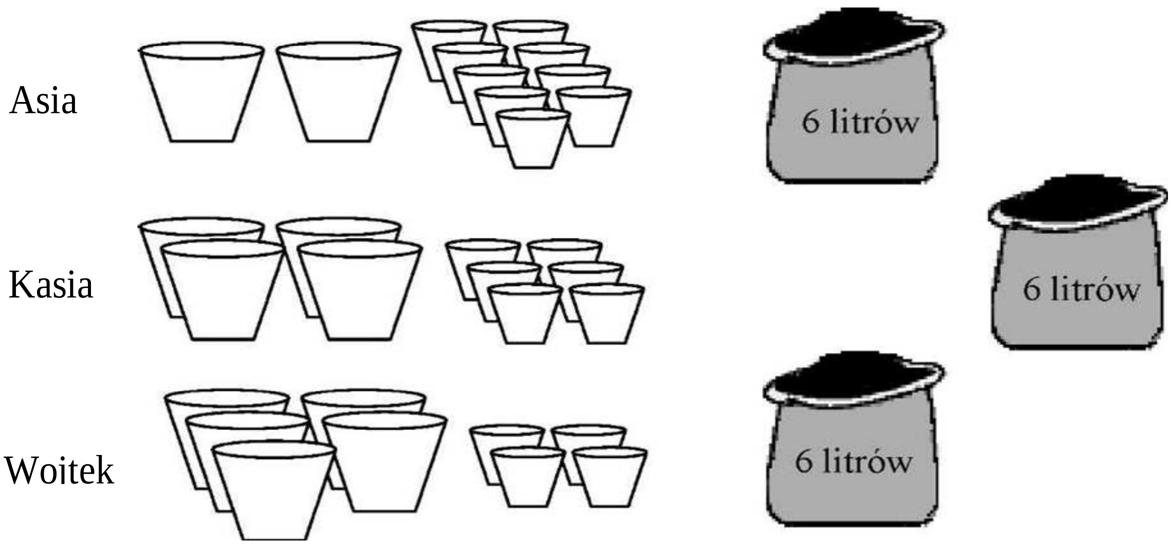
Warto przeanalizować, jaki odsetek uczniów uzyskiwał najniższą i najwyższą liczbę punktów możliwych do uzyskania za rozwiązanie zadań otwartych w kontekście lokalizacji szkoły.

województwo	**Odsetek uczniów, którzy uczęszczali do gimnazjum położonego**							
	na wsi		**w małym mieście (do 20 tys.)**		**w średnim mieście (od 20 – 100 tys.)**		**dużym mieście (powyżej 100 tys)**	
	i uzyskali za rozwiązanie zadań otwartych							
	10 pkt	**0 pkt**	**10 pkt**	**0 pkt**	**10 pkt**	**0 pkt**	**10 pkt**	**0 pkt**
lubuskie	**3,7%**	**39,4%**	**3,6%**	**41,2%**	**5,8%**	**33,6%**	**8,9%**	**30,8%**
wielkopolskie	**4,0%**	**38,7%**	**3,9%**	**40,4%**	**5,7%**	**36,9%**	**9,9%**	**29,3%**
zachodniopomorskie	**7,4%**	**43,9%**	**3,2%**	**41,7%**	**4,1%**	**39,2%**	**12,2%**	**40,4%**

W każdym województwie maksymalną liczbę punktów za rozwiązanie wszystkich zadań otwartych uzyskiwali najczęściej gimnazjaliści uczęszczający do szkół w dużych miastach, a najrzadziej uczęszczający do szkół położonych w małych miastach. Jednocześnie w województwie lubuskim i wielkopolskim najczęściej zero punktów otrzymywali zdający, którzy uczęszczali do szkół w małych miastach, a w województwie zachodniopomorskim uczniowie ze szkół wiejskich.

Zadanie 21. (0-4)

Asia, Kasia i Wojtek przesadzają kwiatki do doniczek. Każde z nich ma 6-litrowy worek ziemi ogrodniczej i doniczki dwóch wielkości. Asia wykorzystała całą ziemię, którą dysponowała, i napełniła 2 duże doniczki i 9 małych. Kasia całą swoją ziemię zużyła do wypełnienia 4 dużych i 6 małych doniczek. Wojtek chciałby wypełnić ziemią 5 dużych i 4 małe doniczki. Czy wystarczy mu ziemi, którą ma w worku? Uzasadnij odpowiedź



Wymagania ogólne (z podstawy programowej)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
IV. Użycie i tworzenie strategii.
V. Rozumowanie i argumentacja.

Wymagania szczegółowe (z podstawy programowej)

7. Równania. Uczeń:
7) za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.

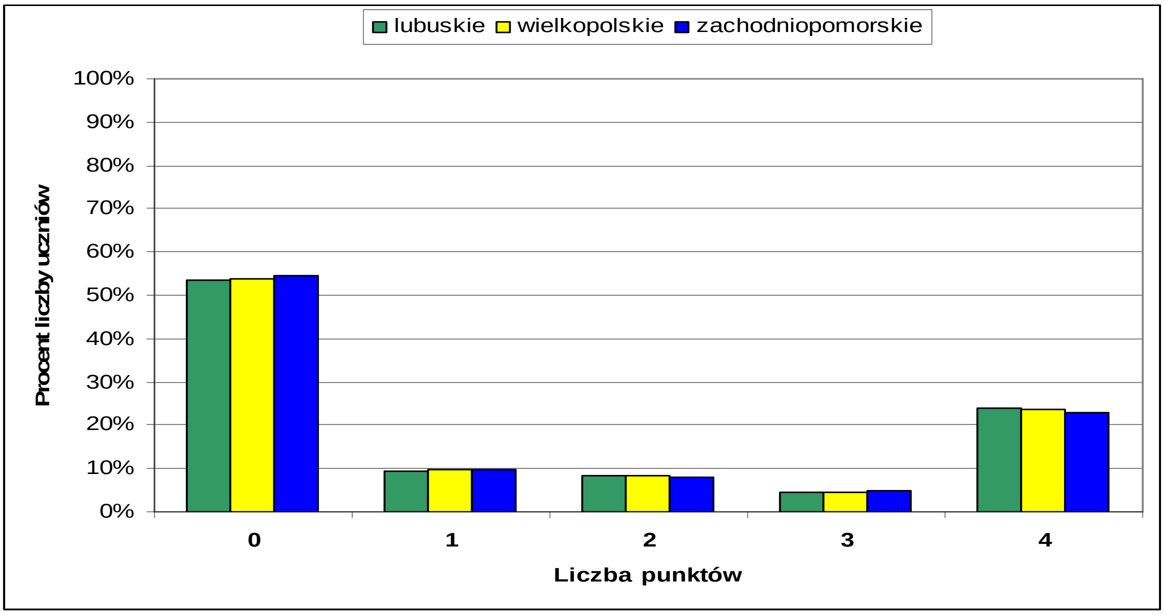
Poziom wykonania zadania 21.

Maksymalną liczbę punktów (4 pkt) uzyskało ok. 23,5% populacji w Okręgu.
Zero punktów otrzymało prawie 54% trzecioklasistów, z czego aż 13,3% nawet nie podjęło próby rozwiązania zadania.

Zadanie 21.	L	W	Z
Średnia liczba punktów (max – 4 pkt)	1,36	1,35	1,32
Średni wynik procentowy	34,10	33,17	33,03
Współczynnik łatwości	0,34	0,34	0,33
Interpretacja współczynnika łatwości	Zadanie okazało się dla gimnazjalistów trudne.		

Zestawienie liczby uczniów , którzy otrzymali 4 lub 3 lub 2 lub 1 lub 0.

Liczba punktów	**Procent liczby uczniów**, którzy uzyskali określoną liczbę punktów w woj.:		
	lubuskim	wielkopolskim	zachodniopomorskim
4	24,06	23,65	22,79
3	4,61	4,68	4,95
2	8,40	8,28	8,14
1	9,50	9,73	9,74
0	53,43	53,66	54,38
w tym FO	12,80	12,50	14,70



Wykres 9. *Rozkład liczby punktów uzyskanych przez uczniów za rozwiązanie zadania 21.*

Komentarz

W zadaniu sprawdzano, czy uczeń potrafi: ustalić zależności między wielkościami, zaplanować i wykonać ciąg czynności prowadzących do rozwiązania problemu, precyzyjnie przedstawić przebieg swojego rozumowania oraz zinterpretować otrzymane wyniki. Zadanie wymagało przede wszystkim zrozumienia treści przedstawionej słownie i na rysunku. Fakt, że znaczna część gimnazjalistów nie zdołała poprawnie rozwiązać tego zadania wskazuje, że w kształceniu matematycznym należy zwracać większą uwagę na interpretację treści zadania i planowanie jego rozwiązania; rozwiązywać więcej zadań dotyczących sytuacji praktycznych, w których uczeń będzie zmuszony zastosować zintegrowaną wiedzę. Na lekcji uczeń powinien mieć możliwość zapoznania się z różnymi sposobami rozwiązywania zadań, warto więc korzystać z zadań dotyczących sytuacji praktycznych, w których uczeń sam będzie szukał strategii rozwiązania zadania.

Rozwiązania uczniowskie

Rozwiązujący to zadanie wykazali się niezwykłą inwencją, zarówno w tworzeniu strategii, jak i doborze argumentów.

<u>Odpowiedzi poprawne</u> (przykłady: 1. – 12.)
Przykład 1.
W swoich pracach gimnazjaliści zaprezentowali rozwiązania wzorcowe z zapisaną analizą i opisem kolejnych etapów rozwiązania (planem rozwiązania).

	Asia	Kasia	Wojtek
ilości małych doniczek	9	6	4
ilość dużych doniczek	2	4	5
ilość ziemi w małych doniczkach	9x	6x	4x
ilość ziemi w dużych doniczkach	2y	4y	5y
ilość ziemi ogółem	6 l	6 l	
ilość ziemi ogółem	9x+2y	6x+4y	4x+5y

1. Obliczam pojemność małej doniczki i dużej doniczki

$$\begin{cases} 9x+2y=6 \\ 6x+4y=6 \end{cases} \rightarrow 2y=6-9x \quad y=\frac{6-9x}{2}$$

$6x+4\cdot\frac{6-9x}{2}=6$

$6x+2(6-9x)=6$

$6x+12-18x=6$

$-12x=6-12$

$-12x=-6 \quad |:(-12)$

$x=\frac{1}{2}\ l$

$y=\frac{6-9\cdot\frac{1}{2}}{2}=\frac{6-4{,}5}{2}=\frac{1{,}5}{2}=0{,}75\ l=\frac{3}{4}\ l$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{4} \end{cases}$$

mała doniczka $=\frac{1}{2}\ l$
duża doniczka $=\frac{3}{4}\ l$.

2. Obliczam ilość ziemi w 4 małych doniczkach i w 5 dużych doniczkach

$4\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{3}{4}=2+\frac{15}{4}=2+3\frac{3}{4}=5\frac{3}{4}$

3. Sprawdzam czy Wojtkowi wystarczy ziemi

$5\frac{3}{4}<6$

Odp.: Aby wypełnić 4 małe i 5 dużych doniczek potrzeba $5\frac{3}{4}$ l ziemi, a więc Wojtkowi wystarczy ilość ziemi, którą ma w worku.

Przykład 2.
Eleganckie rozwiązanie układu równań i odpowiedni komentarz nie pozostawiają wątpliwości, że uczeń zaplanował rozwiązania. Algebraiczny i najczęściej spotykany sposób rozwiązania. Strategia polegała na ułożeniu i rozwiązaniu układu równań w celu obliczenia pojemności dużej i małej doniczki. Następnie należało ustalić, ile ziemi potrzebuje Wojtek do napełnienia swoich doniczek i zapisać poprawny wniosek.

x – ilość litrów ziemi w dużej doniczce (maksymalna)
y – ilość litrów ziemi w małej doniczce (maksymalna)

$$\begin{cases} 2x+9y=6 \quad |\cdot(-2) \\ 4x+6y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x-18y=-12 \\ 4x+6y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12y=-6 \quad |:(-12) \\ 2x+9y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0{,}5 \\ 2x+9\cdot 0{,}5=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0{,}5 \\ 2x+4{,}5=6 \quad |-4{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0{,}5 \\ 2x=1{,}5 \quad |:2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0{,}75 \\ y=0{,}5 \end{cases}$$

$x=0{,}75$ => maksymalna ilość ziemi w dużej doniczce

$y=0{,}5$ => maksymalna ilość ziemi w małej doniczce

Wojtek

$5x+4y=6$

$5\cdot 0{,}75+4\cdot 0{,}5=6$

$3{,}75+2=6$ =>

$5{,}75=6$

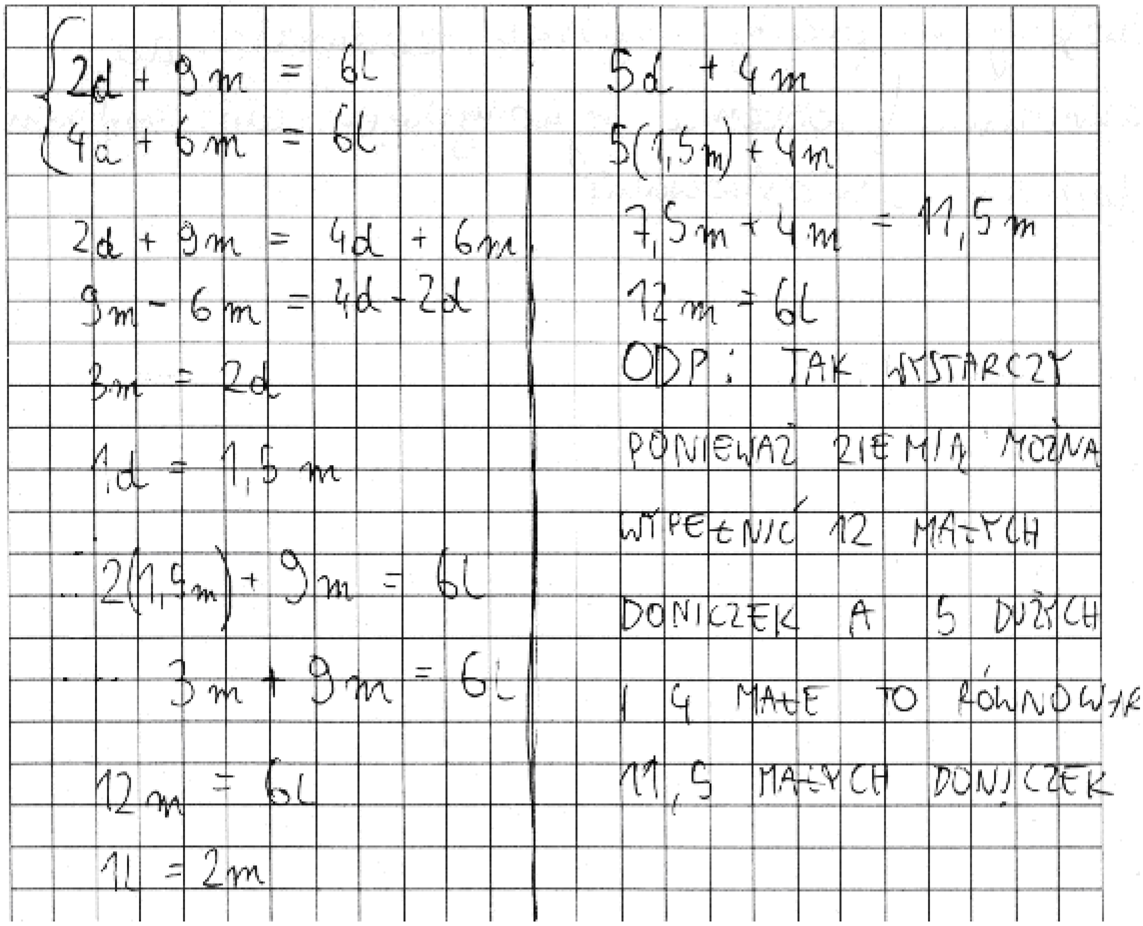
$6>5{,}75$

Uzasadnienie: Wojtkowi wystarczy ziemi, którą ma w worku, ponieważ wypełni się wszystkie doniczki i zostanie mu 0,25 l ziemi.

Odp.: Wojtkowi wystarczy ziemi, którą ma w worku do wypełnienia doniczek.

Przykład 3.

Strategia tego rozwiązania polegała na określeniu związku między pojemnością dużej i małej doniczki, a następnie przeliczeniu 6 litrów ziemi na liczbę małych doniczek i porównaniu jej z liczbą doniczek posiadanych przez Wojtka oraz wyprowadzeniu poprawnego wniosku. Zdający w prosty sposób dochodzi do rozwiązania problemu, wykorzystując układ równań i logicznie wnioskowanie.



$$\begin{cases} 2d + 9m = 6l \\ 4d + 6m = 6l \end{cases}$$

$2d + 9m = 4d + 6m$

$9m - 6m = 4d - 2d$

$3m = 2d$

$1d = 1,5m$

$2(1,5m) + 9m = 6l$

$3m + 9m = 6l$

$12m = 6l$

$1l = 2m$

$5d + 4m$

$5(1,5m) + 4m$

$7,5m + 4m = 11,5m$

$12m = 6l$

ODP: TAK WYSTARCZY PONIEWAŻ ZIEMIĄ MOŻNA WYPEŁNIĆ 12 MAŁYCH DONICZEK A 5 DUŻYCH I 4 MAŁE TO RÓWNOWAR 11,5 MAŁYCH DONICZEK

Przykład 4.

Strategia podobna jak w poprzednim zadaniu, ale przeliczeń dokonano w oparciu o liczbę dużych doniczek. Zadanie opisane wzorcowo, wszystko oznaczone, niebudzące wątpliwości.

x - duże y - małe

$2x + 9y = 4x + 6y$

$2x = 3y \mid : 2$

$x = 1{,}5y$ - jedna duża to 1,5 małej

Asia: 9 małych + 2 duże

$9 : 1{,}5 = 6$

$6 + 2 = 8$ dużych - można napełnić 1 workiem

Kasia: 6 małych + 4 duże

$6 : 1{,}5 = 4$

$4 + 4 = 8$ dużych - można napełnić 1 workiem

Wojtek: 5 dużych + 4 małe

$4 : 1{,}5 = 2\frac{2}{3}$

$5 + 2\frac{2}{3} = 7\frac{2}{3}$ - wykorzystał Wojtek

$8 > 7\frac{2}{3}$

$$\begin{array}{r} 2{,}6 \\ \hline 40 : 15 \\ -30 \\ \hline 100 \\ -90 \\ \hline 10 \end{array}$$

Odp.: Wojtkowi starczy ziemi, ponieważ przeliczając ilość ziemi jaka zmieści się w doniczkach Asi i Kasi otrzymujemy liczbę większą niż po przeliczeniu ilości ziemi zużytej przez Wojtka

Spośród tych, którzy rozwiązali zadanie, znaczna grupa przedstawiła bardzo jasne i logiczne wyjaśnienie. W poniższych rozwiązaniach widać nietuzinkowe myślenie zdających, którzy po dokonaniu analizy mieli gotowy wniosek.

Przykład 5.

Odp.: Tak, Wojtkowi wystarczy 6 litrów ziemi na wypełnienie 5 dużych i 4 małych doniczek. Wynika z tego, że:

2 duże + 9 małych = 6 litrów
4 duże + 6 małych = 6 litrów

wyciągnięty wniosek, to spostrzeżenie, że:

3 małe = 2 duże.

Asia użyła 2 dużych i 9 małych, a Kasia doniczek 4 duże i 6 małych. Wynika z tego, że 2 duże, o które swój zbiór powiększyła Kasia, muszą w pojemności odpowiadać 3 małym doniczkom, o które swój drugi zbiór pomniejszyła dziewczynka.
Z kolei Wojtek chce użyć 5 dużych i 4 małych doniczek. Gdyby chciał użyć 6 dużych i 3 małych, wtedy nie byłoby wątpliwości, że zużyje cały worek (6 litrów ziemi). Jednak nasz bohater ma inne pragnienie i chce użyć tylko 1 dużą doniczkę więcej niż Kasia i 2 małe mniej. W takim razie nie dość, że wystarczy mu ziemi, to jeszcze mu jej trochę zostanie.

Przykład 6.
Ciekawa analiza i w logiczny sposób wywiedziony ostateczny wniosek.

Dane:

Asia - 2 duże doniczki i 9 małych

Kasia - 4 duże doniczki i 6 małych

Wojtek - 5 dużych doniczek i 4 małe doniczki

Różnica między Asią, a Kasią:

$4-2=2$ $9-6=3$

Czyli Kasi doszły 2 duże doniczki, a ubyło jej 3 małe

Czyli na 2 duże doniczki przypadają 3 małe (jeżeli chodzi o pojemność ich)

$3:2=1,5$

Czyli na napełnienie 1 dużej doniczki potrzeba ziemi z 1,5 małej doniczki.

Różnica między Kasią, a Wojtkiem:

$5-4=1$ $6-4=2$

Czyli Wojtkowi doszła 1 duża doniczka, a ubyły mu 2 małe

a $2 > 1,5$

Odp. Wojtkowi wystarczy ziemi na napełnienie swoich doniczek.

Przykład 7.
Rozwiązanie eleganckie, zaawansowane matematycznie. Uzasadnienie oparto o zauważenie proporcjonalności odwrotnej.

Asia - 2 duże i 9 małych (cała, cała ziemia)
Kasia - 4 duże i 6 małych
Wojtek - 5 dużych i 4 małe.

2 duże = 3 małe
1 duża = 1,5 małych

Jeśli rośnie o 2 duże to maleje o 3 małe.
Jeśli rośnie o 1 dużą to maleje o 1,5 małej

+1 (4 duże — 6 małych) -1,5
5 dużych — 4,5 małych

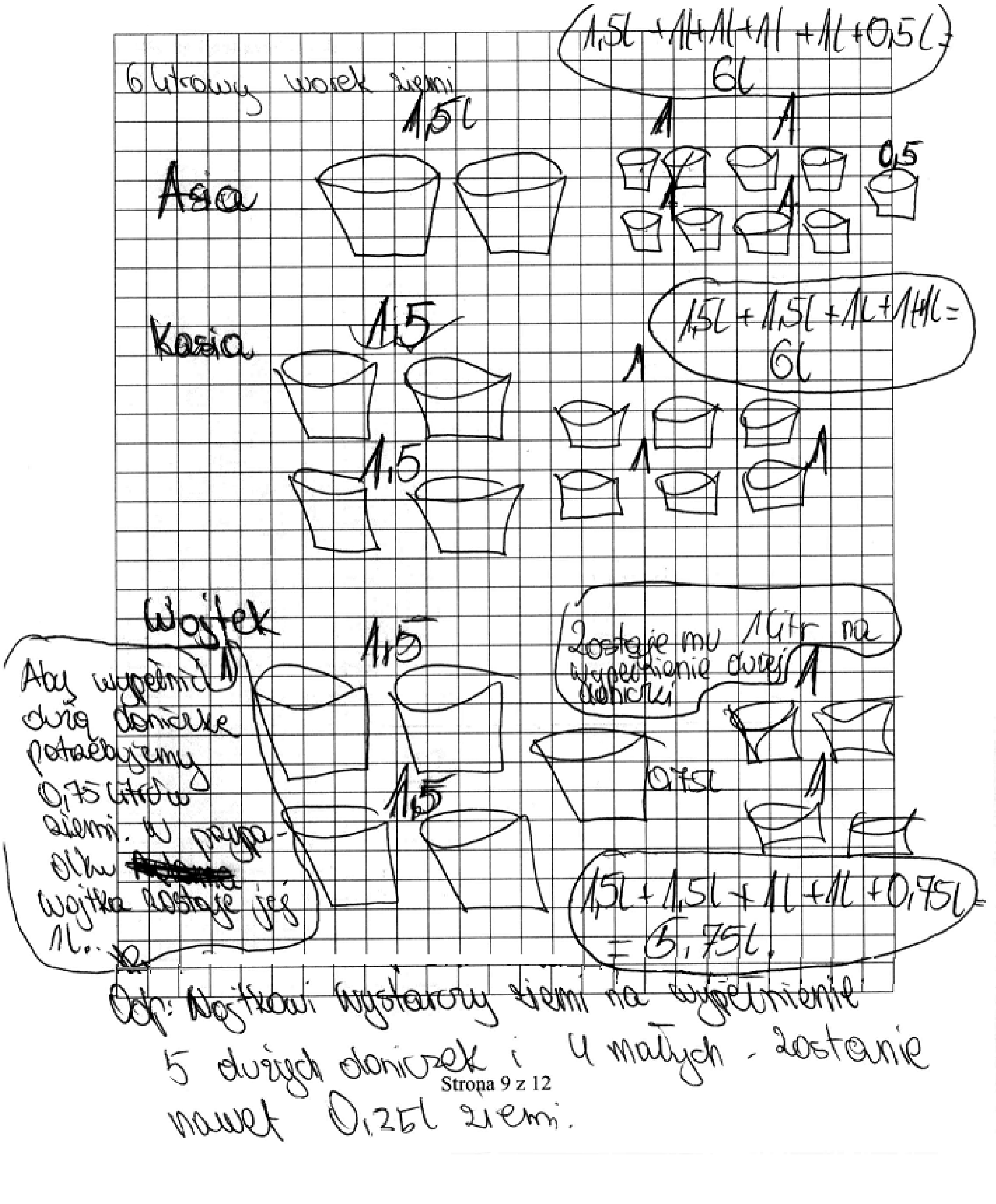
Wystarczy mu ziemi bo jeden 6-o litrowy worek starczy na 5 dużych i 4,5 małych doniczek.

W wielu rozwiązaniach autorzy wyjaśniali swoje rozumowanie na schemacie i wysnuwali poprawny wniosek.
Przykład 8.

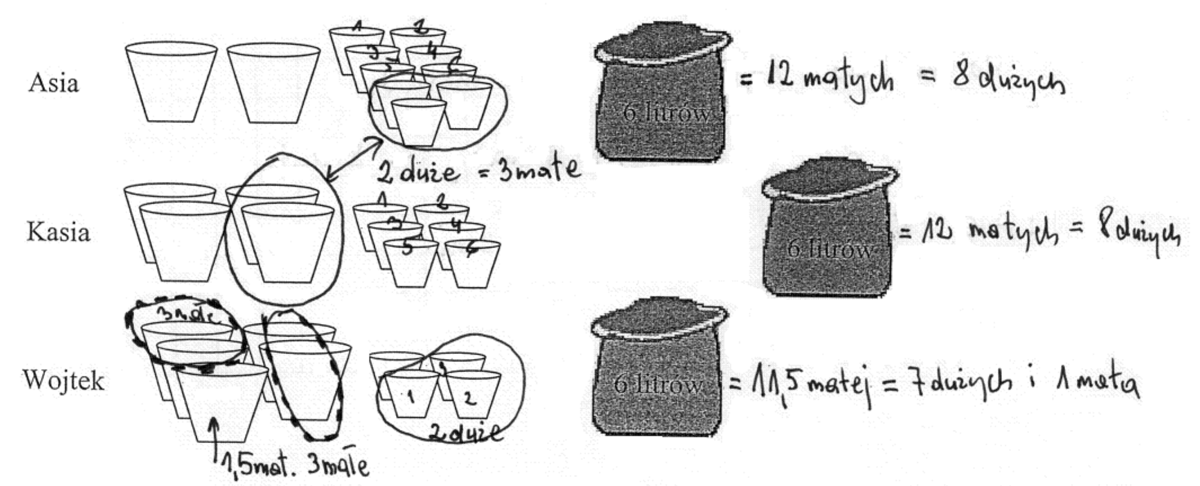
ASIA - 6 l = 2 ▽ i 9 ▿ | 2 ▽ = 3 ▿
KASIA - 6 l = 4 ▽ i 6 ▿ | 1 ▽ = 1,5 ▿
WOJTEK - 6 l = 5 ▽ i 4,5 ▿ | 4 ▽ = 6 ▿
5 ▽ = 4,5 ▿
6 ▽ = 3 ▿

Odp. Tak, wystarczy mu ziemii, ponieważ 2 duże doniczki odpowiadają 3 małym doniczkom, w takim wypadku 1 dużej doniczce odpowiada 1,5 małej doniczki. Jeżeli Kasia miała 4 duże i 6 małych, a Wojtek 5 dużych i 4 małe to znaczy, że Wojtek ~~ma~~ starczy ziemii na 5 dużych doniczek i 4,5 małych.

Przykład 9.

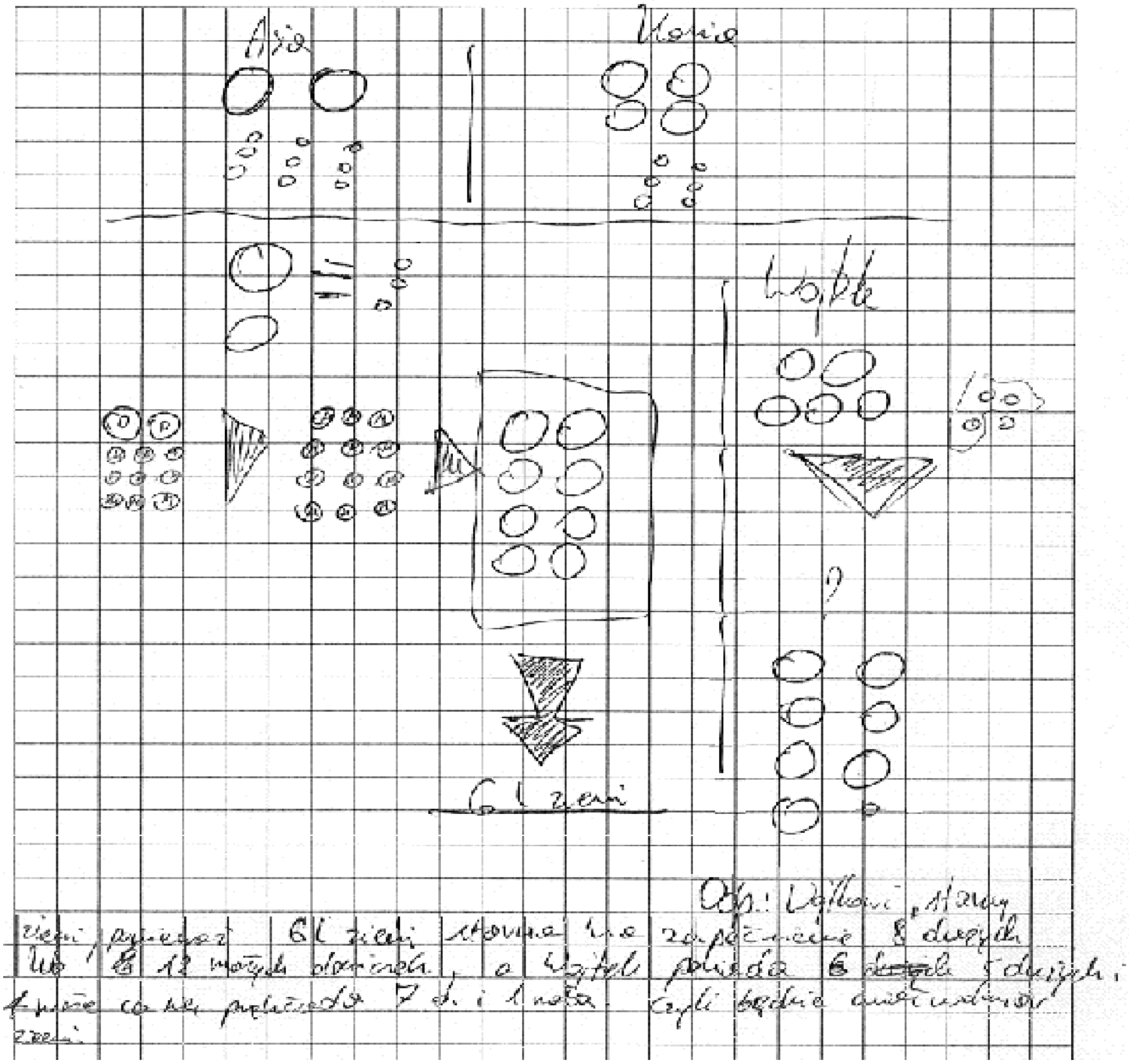


Przykład 10.
Oto przykład rozwiązania, w którym wykorzystano rysunek do przedstawienia toku rozumowania. Wszystkie zaznaczenia i opisy są przejrzyste i oddają w pełni rozumowanie autora.



Wojtek ma 11,5 małej < 12 małych
lub
Wojtek ma 7 dużych i 1 małą < 8 dużych
TAK, Wojtkowi wystarczy ziemi.

Przykład 11.
Rozwiązanie ciekawe, nietypowe, a jednocześnie prosto oddające tok rozumowania rozwiązującego.



<u>Odpowiedzi częściowo poprawne</u> (przykłady: 12. – 18.)

Przykład 12.

W poniższym przykładzie uczeń poprawnie ustalił pojemność małej i dużej doniczki (zastosował właściwą strategię), lecz błędnie odczytał z rysunku liczbę małych doniczek Wojtka.

x – objętość ziemi potrzebna do napełnienia dużej doniczki
y – objętość ziemi potrzebna do napełnienia małej doniczki

$\left.\begin{matrix} 2x+9y \\ 4x+6y \end{matrix}\right\}$ 6 litrów ziemi

$2x+9y$ – sposób napełnienia doniczki przez Asię
$4x+6y$ – sposób napełnienia doniczki przez Kasię

$\begin{cases} 2x+9y=6 \\ 4x+6y=6 \quad |:(-2) \end{cases}$

$+\begin{cases} 2x+9y=6 \\ -2x-3y=-3 \end{cases}$

$6y=3 \quad |:6$

$y=0,5$

$\begin{cases} y=0,5 \\ 4x+6y=6 \end{cases}$

$\begin{cases} y=0,5 \\ 4x+6\cdot 0,5=6 \end{cases}$

$\begin{cases} y=0,5 \\ 4x=6-3 \end{cases}$

$\begin{cases} y=0,5 \\ 4x=3 \quad |:4 \end{cases}$

$\begin{cases} y=0,5 \\ x=0,75 \end{cases}$

0,5l – pojemność małej doniczki
0,75l – pojemność dużej doniczki

$5\cdot 0,75+6\cdot 0,5=3,75+3=6,75$ (l)

Odp: Wojtkowi nie wystarczy ziemi do napełnienia 5 dużych doniczek i 6 małych, ponieważ potrzebne by było do tego 6,75 l ziemi, a ma on do dyspozycji tylko 6 l ziemi.

Przykład 11.
W dwóch kolejnych przykładach uczniowie poprawnie rozwiązali zadanie, ale źle zinterpretowali otrzymany wynik (może źle zrozumieli pytanie?).

x – objętość doniczki dużej
y – objętość doniczki małej

Asia: $2x + 9y = 6$
Kasia: $4x + 6y = 6$
Wojtek: $5x + 4y = 6$

$$\begin{cases} 2x + 9y = 6 \quad / \cdot (-2) \\ 4x + 6y = 6 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -4x - 18y = -12 \\ 4x + 6y = 6 \end{cases}$$

$$-12y = -6 \quad / : (-12)$$

$$\underline{y = 0,5}$$

Obl. x:

$4x + 6y = 6$

$4x + 6 \cdot 0,5 = 6$

$4x = 6 - 3$

$4x = 3 \quad / : 4$

$x = \frac{3}{4}$

$\underline{x = 0,75}$

Sprawdzenie:

$4 \cdot 0,75 + 6 \cdot 0,5 = 6$

$0,75 \cdot 4 = 3,00$

$0,75 \cdot 5 = 3,75$

$3 + 3 = 6$
$6 = 6$ prawda

Przypadek Wojtka:

$5x + 4y = 6$

$5 \cdot 0,75 + 4 \cdot 0,5 = 6$

$3,75 + 2 = 6$

$5,75 \neq 6$ fałsz!

Odp. Wojtkowi nie wystarczy ziemi, którą ma w worku, gdyż zabraknie mu 0,25 litra na jedną z doniczek.

Przykład 12.

x – duża doniczka   y – mała doniczka

Asia:

$2x + 9y = 6$

2 duże doniczki
9 małych doniczek
to 6 litrów ziemi

Kasia:

$4x + 6y = 6$

4 duże doniczki
6 małych doniczek
to 6 litrów ziemi

Na podstawie tych danych tworzę układ równań

$$\begin{cases} 2x + 9y = 6 \\ 4x + 6y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 6 - 9y \\ 4x + 6y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 6 - 9y \\ 2(6 - 9y) + 6y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 6 - 9y \\ 12 - 18y + 6y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 6 - 9y \\ 6 = 12y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 6 - 9y \\ \boxed{y = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

$2x = 6 - 9 \cdot \frac{1}{2}$

$2x = 6 - 4\frac{1}{2}$

$2x = 1\frac{1}{2}$ $\boxed{x = \frac{3}{4}}$

Obliczyłem, że $x = \frac{3}{4}\,l$, $y = \frac{1}{2}\,l$

Spr. Asia $2x + 9y = 6$

$2 \cdot \frac{3}{4} + 9 \cdot \frac{1}{2} = 6$ ✓

Kasia $4x + 6y = 6$ ✓

$\cancel{4} \cdot \frac{3}{\cancel{4}_1} + \cancel{6}^{3} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} = 6$

Wojtek ma 5 dużych i 4 małe

czyli $5x + 4y$ i musi to być 6 l

$5 \cdot \frac{3}{4} + \cancel{4}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} = 3\frac{3}{4} + 2 = 5\frac{3}{4}$

czy wszystko nie mieści

jego doniczki pomieszczą $5\frac{3}{4}$ l,

a on chce zmieścić tam 6 l

odp. Wojtkowi nie uda się zmieścić 6 l ziemi, gdyż w jego doniczkach mieści się $5\frac{3}{4}$ l, czyli zostanie mu jeszcze $\frac{1}{4}$ l ziemi w worku.

Przykład 13.
Uczeń zastosował poprawną strategię i poprawne rozumowanie, ale popełnił błąd rachunkowy w rozwiązaniu układu równań.

x – pojemność dużej doniczki

y – pojemność małej doniczki

$$\begin{cases} 2x + 9y = 6 \\ 4x + 6y = 6 \quad / \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 9y = 6 \\ -2x - 3y = -3 \end{cases}$$

$$6y = 3 \quad /:6$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ 4x + 6 \cdot \frac{1}{2} = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ 4x + 3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ 4x = 3 \quad /:3 \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{2}$$

$$x = 1\frac{1}{3}$$

$$5 \cdot 1\frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 6\frac{2}{3} + 2 = 8\frac{2}{3}$$

Odp. Wojtek potrzebowałby $8\frac{2}{3}$ litra ziemi, aby wypełnić 5 dużych i 4 małe doniczki, tak więc nie wystarczy mu ziemi.

Przykład 14.
Właściwa strategia, rozwiązujący wykazał się umiejętnością interpretacji wyników, lecz niestety, nie potrafi zamieniać jednostek.

Asia - 6 litrów = 2d + 9m

Kasia - 6 litrów = 4d + 6m

Wojtek - 6 litrów = 5d + 4m

x = duża doniczka - 7,5 dm³

y = mała doniczka - 5 dm³

$$\begin{array}{r} 2 \\ 7,5 \\ \cdot\ 5 \\ \hline 37,5 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x + 9y = 60 \quad |\cdot(-2) \\ 4x + 6y = 60 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -4x - 18y = -120 \\ 4x + 6y = 60 \end{cases}$$

$$\cancel{-4x} + \cancel{4x} - 18y + 6y = -120 + 60$$

$$-12y = -60 \quad |:(-12)$$

$$y = 5$$

$$\begin{cases} 2x + 9y = 60 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 60 - 45 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 15 \quad |:2 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7,5 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 7,5 \\ \cdot\ 4 \\ \hline 30,0 \end{array}$$

$5 \cdot 7,5 + 4 \cdot 5 = 60$

$37,5 + 20 = 60$

$57,5 \neq 60$

$L \neq P$

Odp.: Wojtkowi wystarczy tyle ziemi ile było w worku i zostanie mu jeszcze 2,5 dm³.

Przykład 15.
Uczeń prawidłowo obliczył pojemność małej i dużej doniczki, jednak nie poradził sobie z dalszą częścią rozwiązania zadania.

D M
Asia 2 9 = 6 l 1 l = 100 cm³
Kasia 4 6 = 6 l 6 l = 600 cm³
Wojtek 5 4 = 6 l

100 cm³ Duża Doniczka
Mała doniczka

= 54
200 cm
600 : 11
− 55
= 50
− 44

x - pojemnik dużej doniczki
y - pojemnik małej doniczki

= 66
600 : 9
− 54
= 60
600 : 10 60
60
54

$2x + 9y = 6 \quad / \cdot (-2) \qquad -4x + 18y = -12$
$4x + 6y = 6 \qquad\qquad\qquad 4x + 6y = 6$
$-12y = -6 \quad / : (-12)$
$y = 0{,}5\,l$

$2x + 9y = 6$
$2x + 9 \cdot 0{,}5 = 6$
$2x = 6 - 4{,}5$
$2x = 1{,}5 \quad / : 2$
$x = 0{,}75$

Przykład 16.
Poprawny tok rozumowania, niestety, brak uzasadnienia, chociaż odpowiedź poprawna.

Asia - 2 duże doniczki, 9 małe
Kasia - 4 duże doniczki, 6 małych
Asia 9 - 6 = 3
3 doniczki małe to 2 duże doniczki
1,5 doniczki małej to 1 cała duża doniczka
Odp. Wojtkowi zabraknie ziemi na wypełnienie doniczek, ponieważ 1,5 doniczki małej równa się 1 całej.

Przykład 17.
Tylko ustalono zależność - rozwiązujący nie poradził sobie z rozwiązaniem i wnioskowaniem.

Asia
6 l — 2 duże i 9 małych
Kasia
6 l — 4 duże i 6 małych

V_D - objętość dużej doniczki
V_M - objętość małej doniczki

$2V_D = 3V_m$
$V_D = 1,5\,V_m$

Wojtek
5 dużych doniczek
4 małe doniczki

$5V_D = 5 \cdot 1,5\,V_m$
$5V_D = 7,5\,V_m$
$4V_M =$
5

Przykład 18.
Ustalono zależność, jednak popełniono błąd w przeliczaniu ilości ziemi na pojemność dużych doniczek, co wpłynęło na wnioskowanie.

3 małe doniczki = 2 duże doniczki | : 2
1 duża doniczka = 1,5 małej doniczki

12 = 6 l ziemi = 4

5 = 7,5 l ziemi
4 = 1,5 l ziemi
$\boxed{7,5 + 1,5 = 9}$

Aby wypełnić 5 dużych doniczek i 4 małe doniczki potrzebne jest 9 l ziemi, a Wojtek ma tylko 6 l

<u>Odpowiedzi błędne</u> (przykłady: 19. – 20.)

Przykład 19.
Najczęściej spotykanym błędem było założenie, że jedna duża doniczka ma pojemność równą pojemności dwóch małych doniczek.

Tak, Wojtkowi wystarczy ziemi, by wypełnić doniczki,
ponieważ z rysunku można wywnioskować, że 2
małe doniczki to jedna duża (objętość dużej = obję-
tość 2 małych. Dodatkowo ziemi wystarcza na
7 dużych doniczek, a w takim razie skoro
Wojtek ma 5 dużych doniczek i 4 małe,
a 2 małe doniczki dają 1 dużą, to tak
jakby Wojtek miał 7 dużych, czyli ziemi mu
wystarczy.

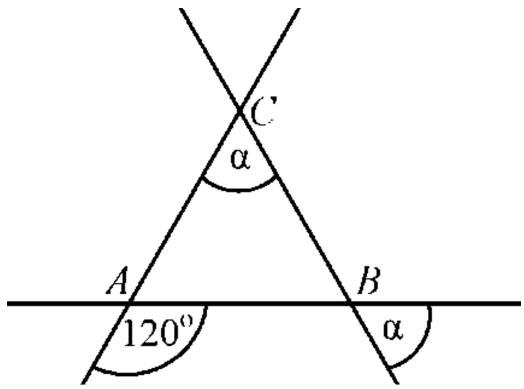
Skąd wywnioskowałam to, że 2 małe doniczki
(ich objętość) równają się 1 dużej? Otóż weźmy
przykładowo Kasię, Kasia ma 4 duże doniczki
i 6 małych, skoro 2 małe doniczki dają
jedną dużą, to z tych małych można „zrobić"
3 duże, czyli Kasia jakby miała 7 dużych
doniczek (3+4=7) Z kolei na przykładzie
Asi możemy zobaczyć, że ziemi wystarczyłoby
jej jeszcze na wypełnienie 1 małej doniczki,
bo ma ona 9 małych doniczek co daje
4 duże i zostaje jeszcze jedna mała, a
dodając jeszcze pozostałe 2 duże wychodzi,
że Asia ma jakby 6 dużych i 1 małą.
Przykład Asi potwierdza to, że ziemi wysta-
rcza na 7 donic dużych.
Reasumując: z obrazku możemy wywnioskować,
że 2 małe doniczki mają taką objętość jak
1 duża, a 6 litrów ziemi wystarcza na wy-
pełnienie 7 dużych donic.

Przykład 20.
W wielu rozwiązaniach gimnazjaliści podawali wniosek w oparciu niepoprawną analizę liczby posiadanych przez dzieci doniczek. Nie uwzględniali wielkości doniczek.

Asia napełniła 11 doniczek całą ziemią. Kasia wypełniła 10 doniczek również całą ziemią. Wojtek chce wypełnić 8 doniczek. Różnica polega jednak na tym, że doniczki wszystkich mają różną wielkość. Myślę, że skoro różnica w ilości doniczek Kasi i Asi wynosi 1, a między doniczkami Wojtka i Kasi również, to ~~Wojtek~~ Wojtkowi uda się napełnić wszystkie doniczki 6 litrowym workiem ziemi.

Zadanie 22. (0-2)

Trzy proste przecinające się w sposób przedstawiony na rysunku tworzą trójkąt *ABC*. Uzasadnij, że trójkąt *ABC* jest równoboczny.



Wymagania ogólne (z podstawy programowej)

V. Rozumowanie i argumentacja.

Wymagania szczegółowe (z podstawy programowej)

Uczeń:
– rozpoznaje kąty wierzchołkowe i kąty przyległe oraz korzysta z ich własności
– rozpoznaje i nazywa trójkąty […] równoboczne […]
– stosuje twierdzenie o sumie kątów trójkąta. (SP)

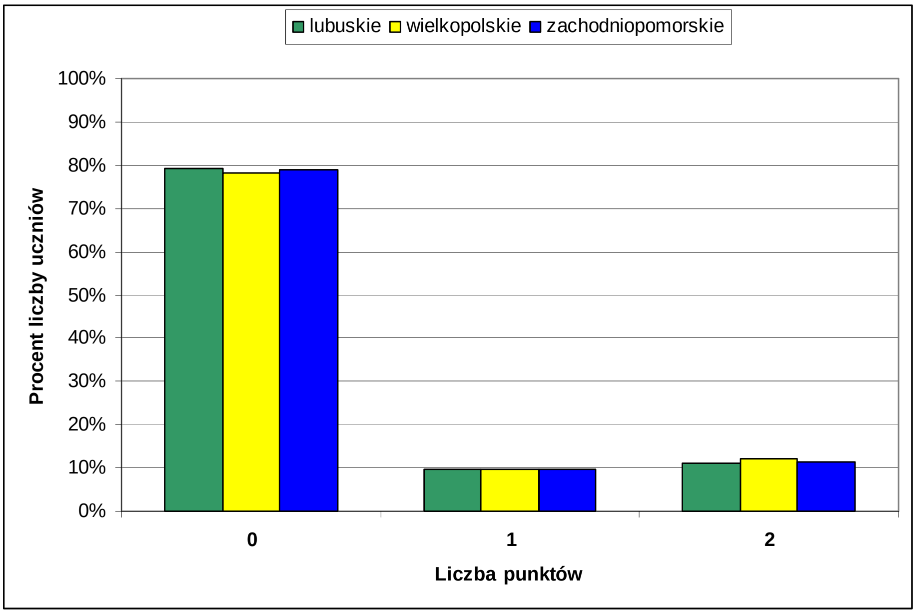
Poziom wykonania zadania 22.

Maksymalną liczbę punktów (2 pkt) uzyskało ok. 11,6% populacji w Okręgu.
Zero punktów otrzymało 78,6% trzecioklasistów, z czego aż 12,7% nawet nie podjęło próby rozwiązania zadania.

Zadanie 22.	L	W	Z
Średnia liczba punktów (max – 2 pkt)	0,31	0,34	0,32
Średni wynik procentowy	15,74	16,81	16,17
Współczynnik łatwości	0,16	0,17	0,16
Interpretacja współczynnika łatwości	**Zadanie okazało się dla gimnazjalistów bardzo trudne.**		

Zestawienie liczby uczniów , którzy otrzymali 2 lub 1 lub zero punktów.

Liczba punktów	**Procent liczby uczniów**, którzy uzyskali określoną liczbę punktów w woj.:		
	lubuskim	wielkopolskim	zachodniopomorskim
2	10,95	11,95	11,34
1	9,68	9,84	9,85
0	79,37	78,21	78,82
w tym FO	12,90	11,80	14,20



Wykres 10. *Rozkład liczby punktów uzyskanych przez uczniów za rozwiązanie zadania 22.*

Komentarz

Zadanie sprawdzało, czy uczeń potrafi utworzyć łańcuch argumentów i uzasadnić jego poprawność twierdzeniami, które nie występowały w zadaniu, a były kształcone w szkole podstawowej. Do rozwiązania zadania niezbędne były umiejętności:

- *rozpoznawanie kątów przyległych i wierzchołkowych oraz korzystanie z ich własności,*
- *stosowanie twierdzenia o sumie kątów trójkąta,*
- *stosowanie definicji trójkąta równobocznego.*

Okazało się, że dla zdających było to najtrudniejsze zadanie w całym zestawie. Uczniowie nie wykazali się umiejętnością samodzielnego przeprowadzenia prostego rozumowania, składającego się z niewielkiej liczby kroków. Gimnazjaliści nie potrafili rozpoznać, nazwać i skorzystać z własności kątów przedstawionych na rysunku trójkąta. Rozwiązania uczniowskie ujawniły, że gimnazjaliści mieli znaczne kłopoty z formułowaniem argumentów i wyciąganiem wniosków oraz trudności w zapisywaniu toku rozumowania. Analiza rozwiązań wykazała, że gimnazjaliści mieli wielkie problemy w stosowaniu właściwego języka matematycznego, nie poradzili sobie z budowaniem zdań uzasadniających, a przede wszystkim nagminnie wykorzystywali tezę jako założenie. W większości rozwiązań uczniowie korzystali z własności kątów przyległych, a nie zauważali kątów wierzchołkowych, więc tym samym nie korzystali z ich własności.

Przedstawione rozwiązania uczniowskie pokazują słabe i mocne strony rozumowania gimnazjalistów.

Rozwiązania uczniowskie

Odpowiedzi poprawne

Przykład 1.

Uzasadnienie opracowane ze zrozumieniem; autor swobodnie posługuje się językiem matematycznym, poprawnie używa symboli i oznaczeń oraz zapisuje niezbędne obliczenia.

Mamy udowodnić, że trójkąt ABC jest równoboczny.

Kąt CAB jest przyległy do kąta o mierze 120°. ~~Kąt~~

Suma miar kątów przyległych wynosi 180°, zatem:

$|\sphericalangle CAB| = 180° - 120° = 60°$

Kąt CBA jest wierzchołkowy do kąta α, więc jego miara jest równa mierze kąta α. Miarę kąta α ma też również kąt ACB. Stąd $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle ACB|$. Suma miar kątów w trójkącie wynosi 180°.

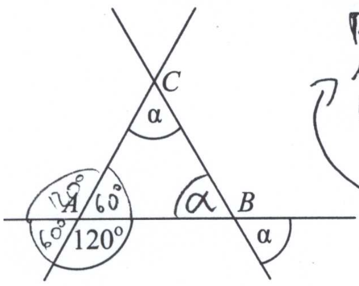
Zatem: $|\alpha| = \frac{180° - 60°}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$

Stąd: $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle ACB| = 60°$.

Wszystkie kąty tego trójkąta mają jednakowe miary, zatem trójkąt ABC jest równoboczny.

cnd.

Przykład 2.
Rozwiązanie bezbłędne, opisane bardzo dokładnie – najpierw wyprowadzono wniosek, że trójkąt jest równoramienny, a następnie uzasadniono jego równoboczność.



Tak więc, skoro każdy z kątów jest identyczny względem drugiego (mowa tylko o WEWNĘTRZNYCH kątach trójkąta ABC), to trójkąt ABC jest równoboczny.

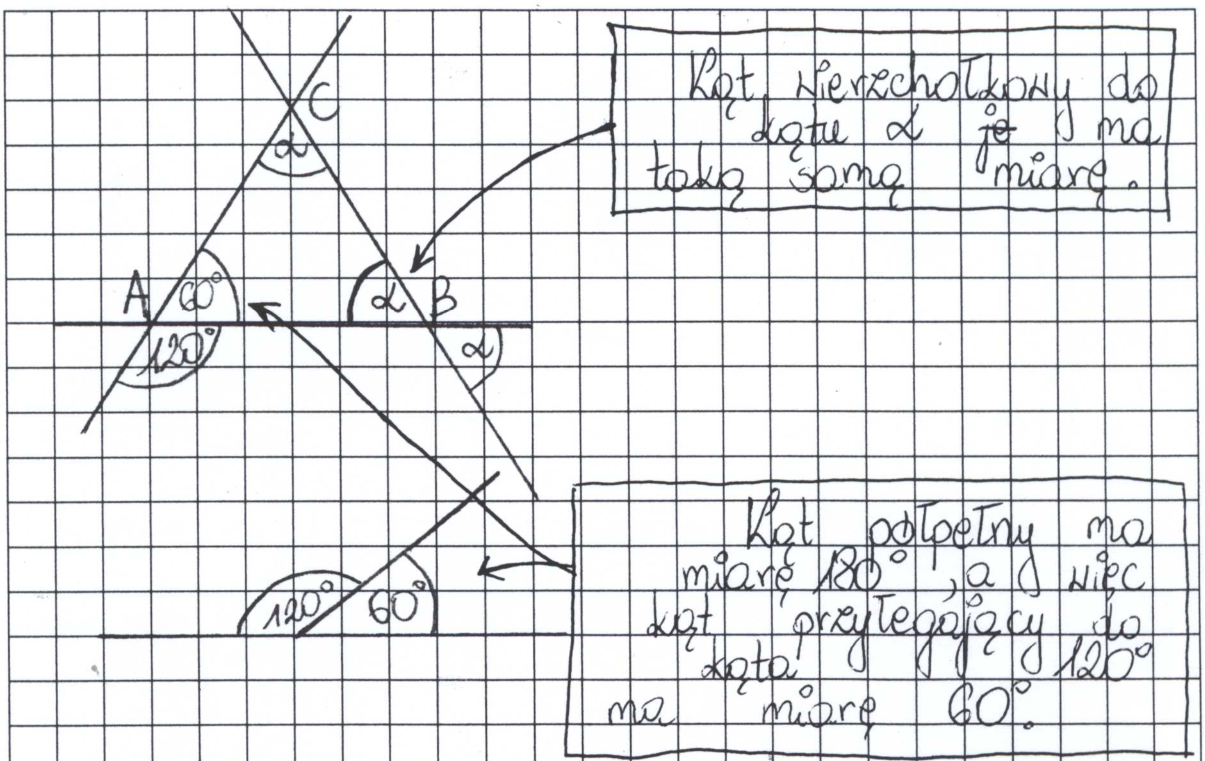
$180 - 60 = 120°$
$120° : 2 = 60°$

W każdym trójkącie ~~miara~~ suma miar kątów wewnętrznych wynosi 180°. Przy wierzchołku A, tam gdzie jest podany kąt 120°, do „dopełnienia” miary kąta na prostej (który zawsze wynosi 180°) potrzeba jeszcze 60°. Tak więc w jednym z kątów wewnętrznych ~~trójkąta~~ danego trójkąta mamy 60°. ~~Jeżeli w każdym z trójkącie ma być 180°, to od tych 180° należy odjąć 60°, gdyż ten kąt już mamy.~~ Istnieje pewna własność ~~kąta~~, mówiąca o tym, że kąty leżące na przeciw siebie, stykające się wierzchołkami są przystające. Tak więc jeżeli przy wierzchołku B, kąt α ~~tego~~ styka się z ~~poszukiwanym~~ kątem wewnętrznym trójkąta, oznacza to, że poszukiwany kąt wewnętrzny również jest α. Kąt trójkąta przy wierzchołku C ~~jest~~, tak samo jak kąt przy wierzchołku B, jest α, czyli ~~oba~~ obie miary kątów są przystające, czyli identyczne. Wiemy już, że trójkąt jest równoramienny. Jeżeli kąt przy wierzchołku A ma miarę 60°, to po odjęciu od 180°, zostaje 120°.

Skoro okazało się, że trójkąt jest równoramienny, to kąty α obliczymy dzięki dzieleniu 120° na 2 (~~bo~~ bo są 2 kąty). ~~kąt~~ 120° : 2 = 60°, więc kąty α, czyli kąty przy wierzchołkach C i B mają miarę 60°. Kąt przy wierzchołku A również ma miarę 60°.

Strona 10 z 12

Przykład 3.
Rozwiązanie bezbłędne, opisane wyczerpująco z wykorzystaniem rysunku.



Odp.: Trójkąt ABC jest równoboczny, ponieważ ma wszystkie kąty równe, a to wynika z tego działania:

Bo miara kątów w trójkącie wynosi 180°.

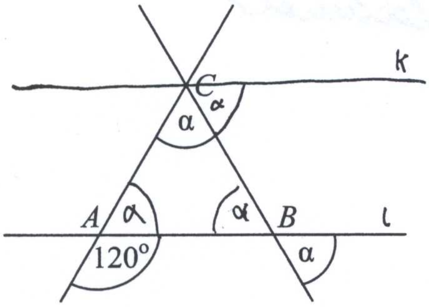
$\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\alpha + 60^\circ = 180^\circ$

$2 \cdot \sphericalangle\alpha = 180^\circ - 60^\circ$

$2 \cdot \sphericalangle\alpha = 120^\circ \quad /:2$

$\sphericalangle\alpha = 60^\circ$

Przykład 4.
Inny sposób uzasadnienia. Uczeń posłużył się własnościami katów utworzonych przez proste równoległe przecięte trzecią prostą (kąty naprzemianległe i odpowiadające).



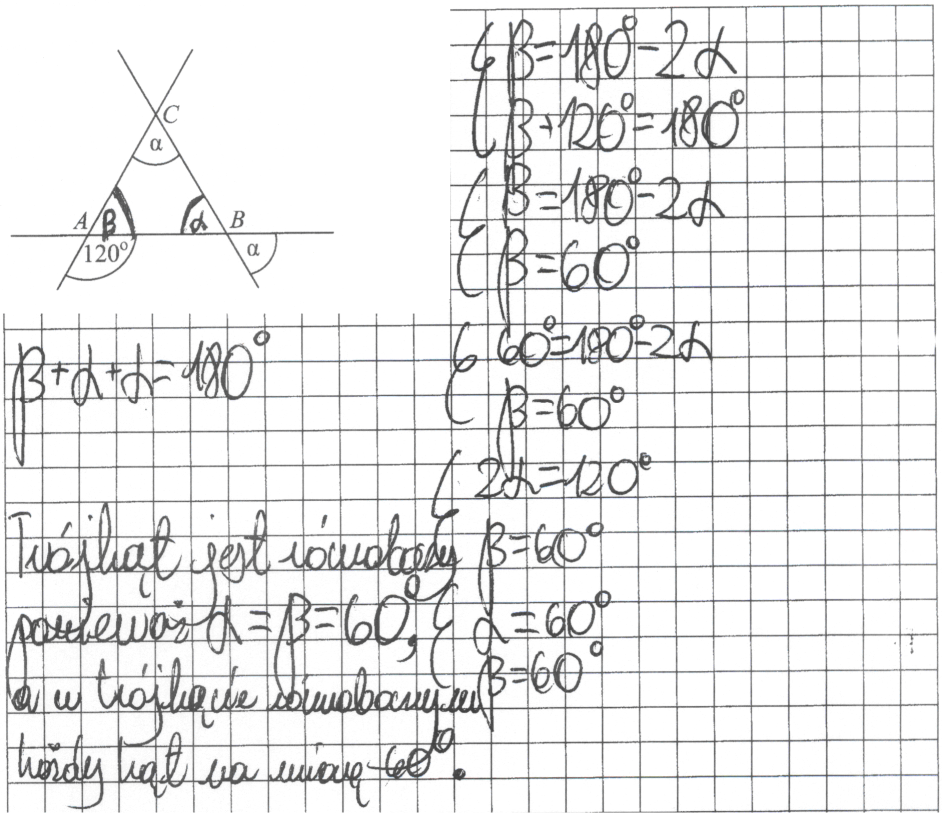
$\alpha = 60^\circ$

TWORZYMY PROSTĄ K PRZECHODZĄCĄ PRZEZ PUNKT
C, RÓWNOLEGŁĄ DO PROSTEJ, KTÓRĄ OZNACZAMY
L. TWORZY SIĘ KĄT PRZYSTAJĄCY DO α NA
ZASADZIE KĄTÓW ODPOWIADAJĄCYCH. DWA KĄTY
PRZY PUNKCIE C MAJĄ ŁĄCZNĄ MIARĘ
ODPOWIADAJĄCĄ DO KĄTA O MIERZE 120°
PRZY PUNKCIE A, WIĘC $\alpha = 120^\circ : 2 = 60^\circ$

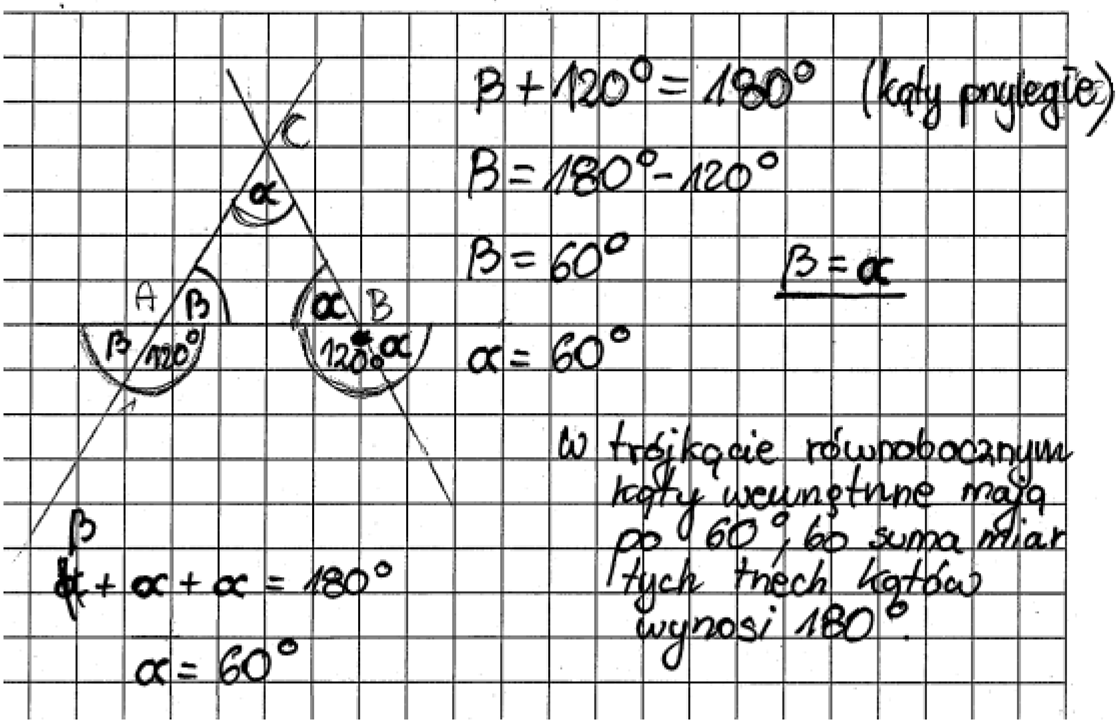
PRZY PUNKCIE B POWSTAJĄ DWIE PARY KĄTÓW
WIERZCHOŁKOWYCH (JEDNA PARA O MIARACH α)

PRZY PUNKCIE A POWSTAJE KĄT PRZYLEGŁY
DO KĄTA O MIERZE 120°, WIĘC ~~120~~
$180^\circ - 120^\circ = 60^\circ = \alpha$
POWSTAŁ TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY O KĄTACH
WEWNĘTRZNYCH α.

Przykład 5.
Gimnazjalista w oparciu o własności występujących w trójkącie kątów ułożył i rozwiązał poprawnie układ równań, wykazując w ten sposób równoboczność trójkąta.



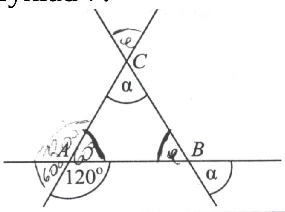
Przykład 6.
Poprawne rozumowanie można było przedstawić na rysunku i zapisać niezbędne obliczenia.



Odpowiedzi częściowo poprawne

Często spotykane rozwiązania to takie, w których zdający zasadnicze trudności pokonali bezbłędnie, ponieważ wykorzystali własności katów wierzchołkowych i obliczali miarę kąta CAB. Następnie popełniali błąd merytoryczny, przyjmując tezę jako założenie ($\alpha = 60^o$).

Przykład 7.



$(360° - 120° - 120°):2 = (360° - 240°):2 = 60°$

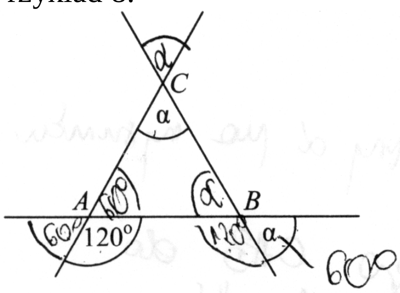
$\alpha = 60°$

Kąty przy podstawie są równe: 120°

Wszystkie kąty trójkąta to: 60°, 60°, 60°

Odp: Trójkąt przedstawiony na rysunku jest równoboczny.

Przykład 8.



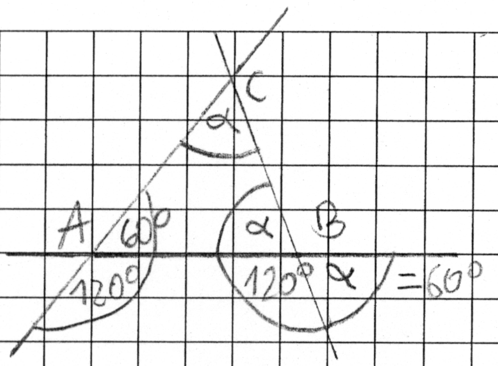
$180° - 120° = 60°$

W trójkącie równobocznym wszystkie

∢ mają miarę 60°.

$3 \cdot 60° = 180°$

Przykład 9.
Również w tym rozwiązaniu zasadnicze trudności zostały pokonane bezbłędnie, ale dalsza część zawiera błędy merytoryczne – przyjęto tezę jako założenie oraz wykazano się nieznajomością nazw kątów (użyto określenie „kąt przystający” zamiast „kąt przyległy”).



$\alpha + 120^0 = 180^0$

$\alpha = 180^0 - 120^0$

$\alpha = 60^0$

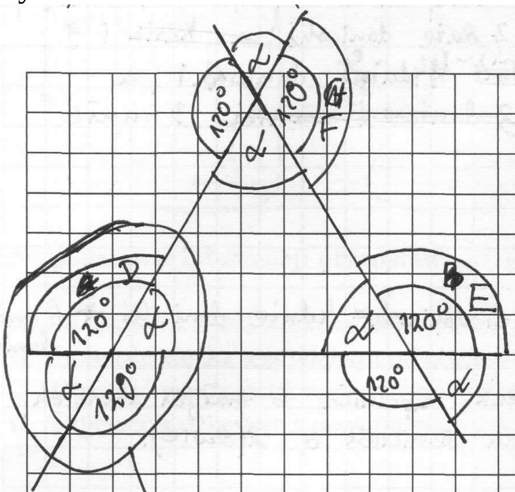
∢ α jest przystający do ∢ o mierze 120°.

Kazdy ~~kąty~~ kąt w trójkącie równobocznym ma 60° cnd.

Odpowiedzi błędne

Znaczna część zdających oparła swój wywód na stwierdzeniu, że suma miar kątów utworzonych przez proste przecinające się, o wierzchołku w punkcie ich przecięcia, jest równa 360^0. Ponadto przyjmowali, że wszystkie kąty wewnętrzne trójkąta mają równe miary, a przecież właśnie równość miar tych kątów należało wykazać. Powszechnym błędem było udzielanie odpowiedzi „*trójkąt jest równoboczny, bo ma równe boki*”, podczas gdy w całym uczniowskim wywodzie nie ma nawet wspomnienia o bokach. Często występowało dużo opisów, z których nic nie wynikało.

Przykład 10.



Kąt ~~A~~ D odpowiada kątowi ~~B~~ E i kątowi F

* oznaczenia kątów są na moim rysunku.

Kąt ~~A~~ D jest równy 120°, wynika to z własności kątów.

Narysowałem taki sam trójkąt obok, przyjmując, że ~~prosta~~ kąt ~~A~~ ~~A i B~~ D, E i F są równe 120°.

$120° \cdot 2 = 240°$

$360° - 240° = 120°$

Każdy z kątów α jest równy kątowi po przeciwnej stronie.

$120° : 2 = 60°$

~~Kąt α~~

Kąt α jest równy 60°

Suma tych kątów musi wynosić 360°.

Podliczając wszystkie kąty.

$120° + 120° + 60° + 60° = 360°$

Kąty są równe.

Z ~~moich obliczeń~~ mojego rozwiązania wynika, że trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym.

Odp. Trójkąt ABC jest równoboczny, ponieważ wszystkie jego boki są równe.

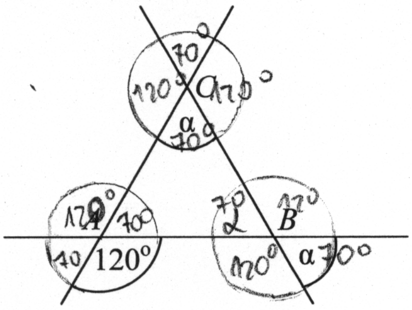
Przykład 11.

$120° \cdot 3 = 360°$ ~~trójkąt jest równoboczny gdyż kąty~~

~~Kąty mają miarę 360°~~

miara kątów w tym trójkącie wynosi 360°, jest to trójkąt równoboczny

Przykład 12.



Trójkąt ABC jest równoboczny ponieważ przy punkcie A jest kąt 120° i to jest $\frac{1}{4}$ koła, a koło ma 360° ~~kąt 120°~~ i na przeciwko kąta 120° jest taki sam kąt, a reszta wynosi 70°. Obok kąta α jest kąt 120° tak jak w poprzednim kąt ostry jest równy 70° więc kąt α jest równy 70°.
Proszę popatrzeć na Rysunek ☺

Przykład 13.

120° + 60° tworzy kąt pół pełny
~~Każde~~ wszystkie proste przecinają się pod tym samym kątem.

W grupie odpowiedzi niepoprawnych często pojawiały się nieuprawnione nazwy kątów, a nawet boków.

Przykład 14.

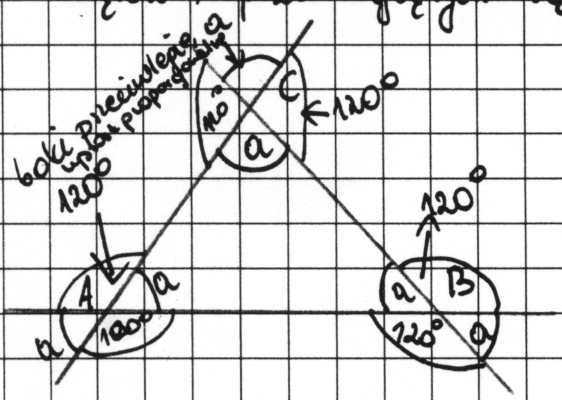
$180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$\sphericalangle \alpha = 60^\circ$

~~że~~ jest to trójkąt równoboczny ponieważ kąty przeciwległe są tej samej wielkości

Przykład 15.

Uzasadnienie:
Trójkąt ABC jest równoboczny, ponieważ jego przyprostokątne mają tą samą rozwartość kątów, przecinających się prostych ABC.



Wszystkie kąty wprost proporcjonalne do siebie mają takie same rozwartości. Są kątami przeciwległymi.

Dlatego trójkąt jest równoboczny.

Zadanie 23. (0-4)
Obwód trapezu równoramiennego jest równy 72 cm, ramię ma długość 20 cm, a różnica długości podstaw wynosi 24 cm. Oblicz pole tego trapezu. Zapisz obliczenia.

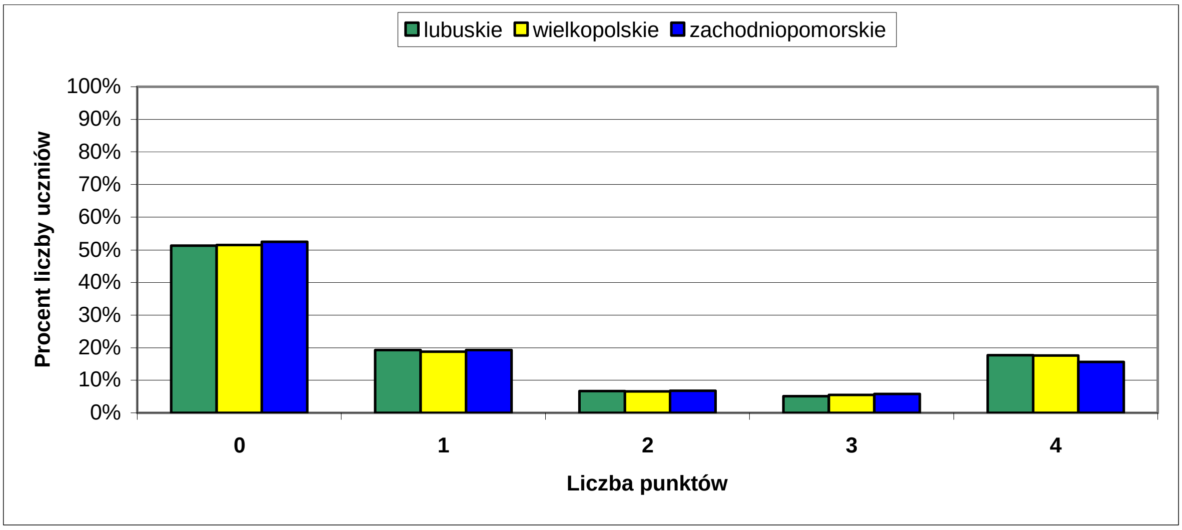
Wymagania ogólne (z podstawy programowej)
IV. Użycie i tworzenie strategii.
Wymagania szczegółowe (z podstawy programowej)
10. Figury płaskie. Uczeń:
9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów.

Poziom wykonania zadania 23.
Maksymalną liczbę punktów (4 pkt) uzyskało ok. 17% gimnazjalistów w Okręgu.
Zero punktów otrzymało prawie 52% trzecioklasistów w Okręgu, z czego aż 12,3% nawet nie podjęło próby rozwiązania zadania.

Zadanie 23.	**L**	**W**	**Z**
Średnia liczba punktów (max – 4 pkt)	1,19	1,19	1,13
Średni wynik procentowy	29,69	29,78	28,28
Współczynnik łatwości	0,30	0,30	0,28
Interpretacja współczynnika łatwości	**Zadanie okazało się dla gimnazjalistów trudne.**		

Zestawienie liczby uczniów, którzy otrzymali 4 lub 3 lub 2 lub 1 lub 0.

Liczba punktów	**Procent liczby uczniów**, którzy uzyskali określoną liczbę punktów w woj.:		
	lubuskim	**wielkopolskim**	**zachodniopomorskim**
4	17,67	17,62	15,68
3	5,16	5,51	5,84
2	6,67	6,63	6,79
1	19,32	18,81	19,25
0	51,19	51,44	52,44
w tym BO	12,00	11,60	13,70



Wykres 11. *Rozkład liczby punktów uzyskanych przez uczniów za rozwiązanie zadania 23.*

Komentarz

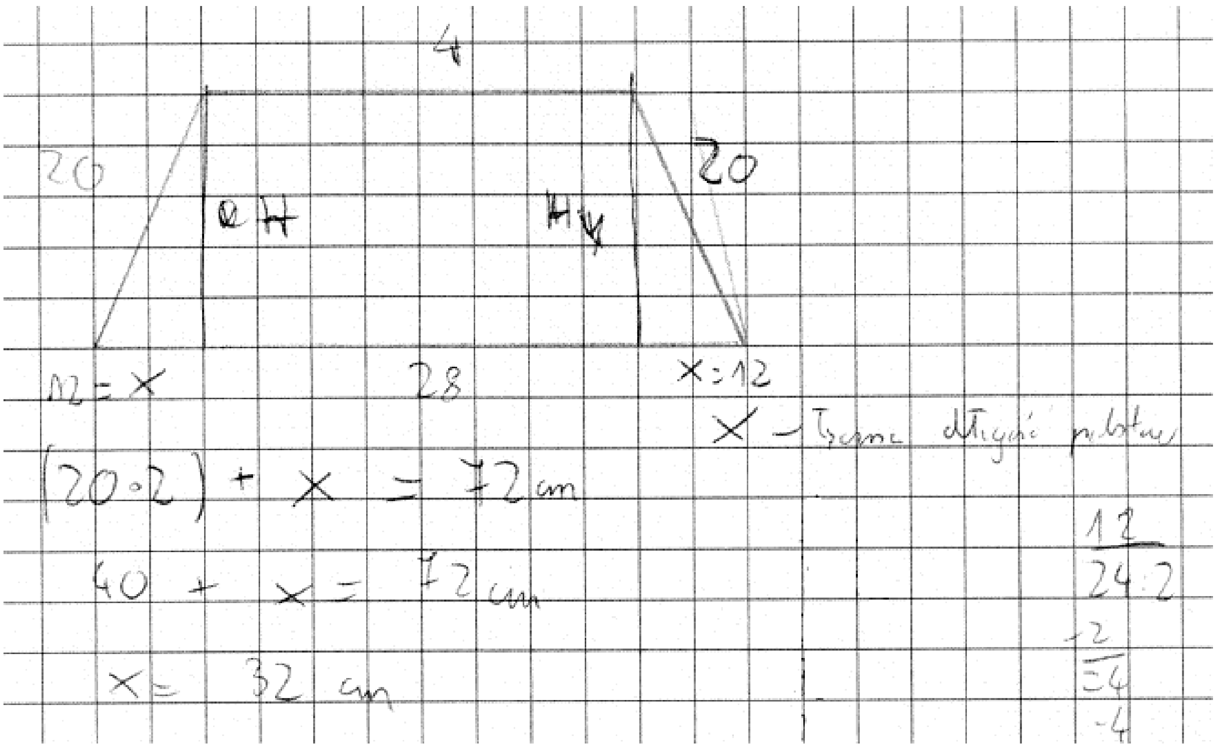
Zaplanowanie i zrealizowanie strategii rozwiązania problemu, wykorzystując przy tym zintegrowaną wiedzę, to ważna umiejętność w życiu każdego człowieka.
Zadanie sprawdzało, czy uczeń potrafi zaplanować kolejność czynności, wynikających wprost z treści zadania, ale nie mieszczących się w ramach rutynowego algorytmu, a następnie zrealizować ten swój plan. Rozwiązanie zadania polegało na obliczeniu pola trapezu zgodnie z warunkami podanymi w tekście.
Aby poprawnie rozwiązać zadanie, należało najpierw zinterpretować sformułowanie „różnica długości podstaw wynosi 24 cm”, następnie obliczyć wysokość i pole figury. Do rozwiązania zadania niezbędne były następujące wiadomości i umiejętności:

- *rozumienie pojęcia obwód,*
- *znajomość własności boków występujących w trapezie równoramiennym i wykorzystanie ich,*
- *stosowanie twierdzenia Pitagorasa,*
- *rozumienie pojęcia pola,*
- *stosowanie sposobu obliczenia pola trapezu.*

Zadanie, jakich wiele rozwiązuje się na lekcjach matematyki; tymczasem okazało się, że ponad połowa zdających za rozwiązanie zadania otrzymała zero punktów, przy czym co ósmy uczeń po prostu opuścił to zadanie.

Rozwiązania uczniowskie

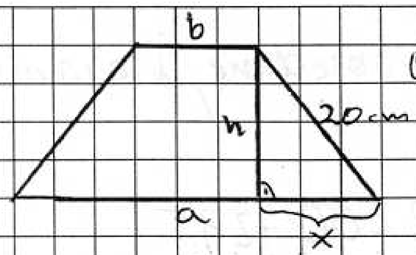
We wszystkich rozwiązaniach uczniowie wykonywali rysunki pomocnicze trapezu. W wielu pojawił się chaos w oznaczeniach na rysunku, np. tą samą literą oznaczano różne odcinki.



Odpowiedzi poprawne

Przykład 1.

Większość uczniów stosowała gotowy wzór na obliczanie pola trapezu, a wśród nich znaczna część najpierw obliczała długości obu podstaw, następnie znajdowała ich różnicę (zapominając, że różnica podstaw jest podana w tekście) i jej połowę, w celu obliczenia długości przyprostokątnej, niebędącej wysokością.



Obw = 72 cm

$a - b = 24$ cm

$72\text{ cm} - 2\cdot 20\text{ cm} = 32\text{ cm}$

$\begin{cases} a+b = 32\text{ cm} \\ a-b = 24\text{ cm} \end{cases}$ $\qquad P = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$

$\begin{array}{r} 16 \\ \cdot 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$

$\begin{cases} b = 32 - a \\ a - 32 + a = 24 \end{cases}$ $\qquad x = \frac{28-4}{2}$

$x = 12$ cm

$\begin{cases} b = 32 - a \\ 2a = 24 + 32 \quad /:2 \end{cases}$ $\qquad h^2 + 12^2 = 20^2$

$h^2 + 144 = 400$

$\begin{cases} b = 32 - a \\ a = 56:2 \end{cases}$ $\qquad h^2 = 400 - 144$

$h^2 = 256 \quad /\sqrt{\ }$

$\begin{cases} b = 32 - a \\ a = 28\text{ cm} \end{cases}$ $\qquad h = 16$

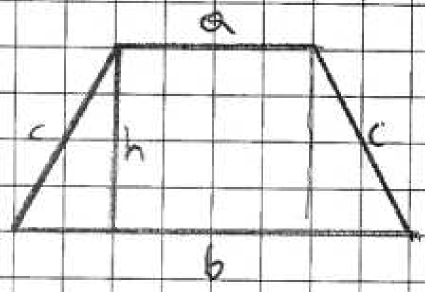
$P = \frac{(28+4)\cdot 16}{2}$

$b = 32 - 28$ cm $\qquad P = \frac{\overset{16}{\cancel{32}}\cdot 16}{\underset{1}{\cancel{2}}}$

$b = 4$ cm $\qquad P = 256\text{ cm}^2$

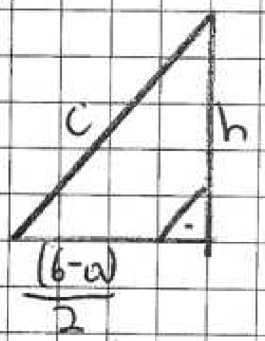
Odp. Pole tego trapezu wynosi 256 cm^2.

Przykład 2.
Rozwiązanie bezbłędne. Charakteryzuje się doskonałym rozumieniem pojęć obwodu i pola.



$L=72cm$
$L=a+b+2c$
$c=20cm$
$b-a=24cm$

$P=?$
$P=\frac{1}{2}(a+b)\cdot h$



$h^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=c^2$
$h^2+144=400$
$h^2=400-144$
$h^2=256$
$h=\sqrt{256}$
$h=16cm$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

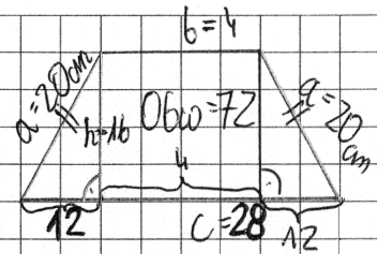
$a+b=72-2\cdot c$
$a+b=72-40$
$a+b=32$

$P=\frac{1}{2}\,32\cdot h$
$P=\frac{1}{2}\,32\cdot 16$
$P=16\cdot 16$
$P=256cm^2$

Odp: Pole tego trapezu wynosi $256cm^2$.

Przykład 3.
Rozwiązanie bezbłędne. Zaprezentowano w nim biegłość obliczeń, a w szczególności umiejętność stosowania twierdzenia Pitagorasa.

Dane:
$Obw = 72$ cm
$Obw = 2a + b + c$
$a = 20$ cm

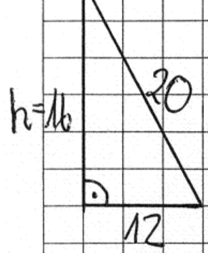


Szuk: „P", „b", „c", „h"

Rozw:
$b = x$
$c = x + 24$

$Obw = 2\cdot 20 + x + x + 24$
$Obw = 72$
$72 = 2\cdot 20 + x + x + 24$
$72 = 40 + 2x + 24$
$72 = 64 + 2x$
$2x = 72 - 64$
$2x = 8$
$x = 4$

$b = 4$
$c = 28$



Komentarz: otrzymany trójkąt składa się z wielokrotności boków trójkąta pitagorejskiego (3, 4, 5)

$\Rightarrow$
$20 = 5x$
$12 = 3x$
$h = 4x$
$x = 4$
$h = 4\cdot 4$
$h = 16$

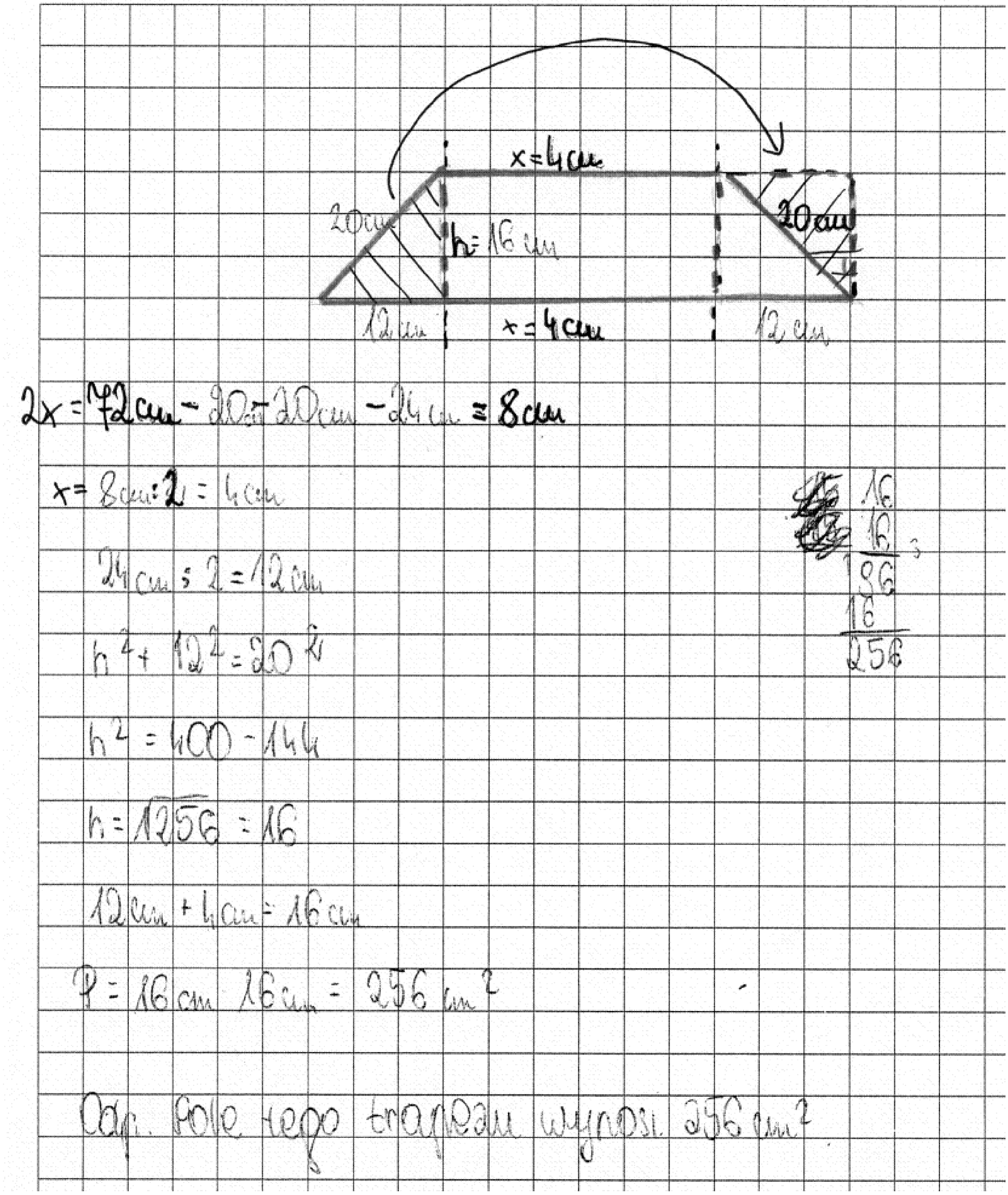
$P = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$
$P = \frac{(4+28)\cdot 16}{2}$

$P = 32\cdot 8$
$P = 256\ [cm^2]$

Odp. Pole tego trapezu wynosi $256 cm^2$.

W wielu rozwiązaniach uczniowie wykazali się pomysłowością w sposobie obliczania pola trapezu.

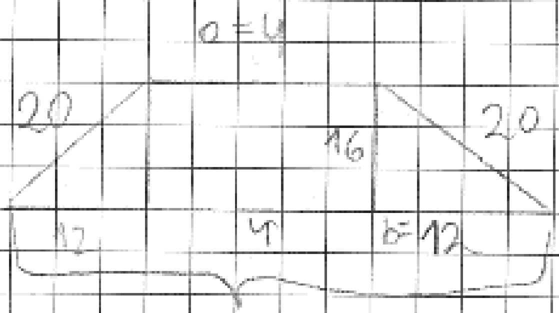
Przykład 4.
Uczeń swój sposób obliczania pola trapezu przedstawił na rysunku. Pokazał, że pole trapezu równoramiennego można obliczyć jako pole prostokąta o bokach 16 cm x 16 cm.



Przykład 5.
W tym przykładzie pole trapezu obliczono jako sumę pola prostokąta i dwóch trójkątów prostokątnych. Gimnazjalista wykazał się doskonałą interpretacją sformułowania „różnica podstaw”.

$72-2\cdot 20=72-40=32$

$2a=32-24=8$



$(28-4):2=12$

$h=20^2-12^2$

$h^2=400-144$

$h^2=256 \quad /\sqrt{}$

$h=\sqrt{256}$

$h=16$ (cm)

$P=(a\cdot h)+2\left(\frac{b\cdot h}{2}\right)$

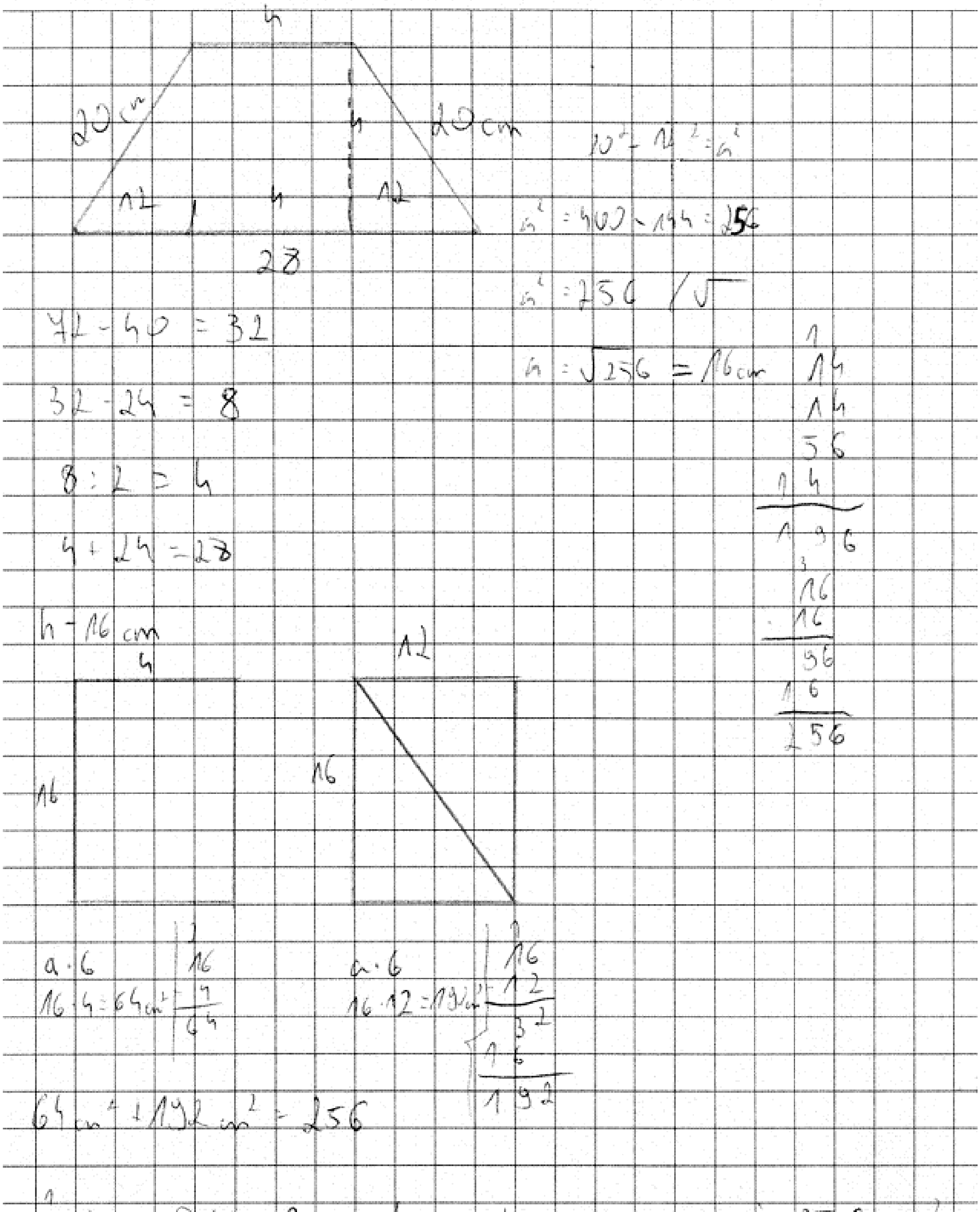
$P=(4\cdot 16)+2\left(\frac{12\cdot 16}{2}\right)$

$P=64+12\cdot 16$

$P=64+192=256$ (cm²)

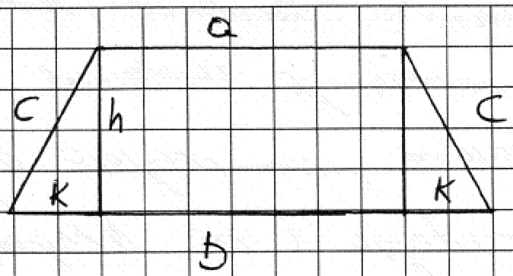
odp: Pole trapezu wynosi 256 cm².

Przykład 6.
Jeszcze jeden pomysł. Uczeń obliczył pole trapezu równoramiennego jako sumę pól dwóch prostokątów.



Oto dwa poprawne rozwiązania zadania wprawnych matematyków, którzy pokazali, jak obliczyć wartość pierwiastka z liczby 256.

Przykład 7.



$P = ?$

$P = \frac{(a+b)\cdot h}{2}$

$c = 20cm$

$Obw = 72cm$

$Obw = 2c + a + b$

$a + b = 72cm - 2\cdot 20cm$

$a + b = 32cm$

$b = 32cm - 4cm$

$b = 28cm$

$a = 4cm$

$P = \frac{32cm \cdot 16cm}{2}$

$P = 256 cm^2$

Odp.: Pole ~~tep~~ trapezu wynosi $256 cm^2$.

* Różnica długości podstaw wynosi 24cm.

$2K = 24cm \quad K = 12cm$

$b = a + 2K$

$a + b = 32cm$

$a + a + 2K = 32cm$

$2a + 24cm = 32cm$

$2a = 32cm - 24cm$

$2a = 8cm$

$a = 4cm$

$h^2 = c^2 - K^2$

$h^2 = 400cm^2 - 144cm^2$

$h^2 = 256cm^2$

$h = 16 cm$

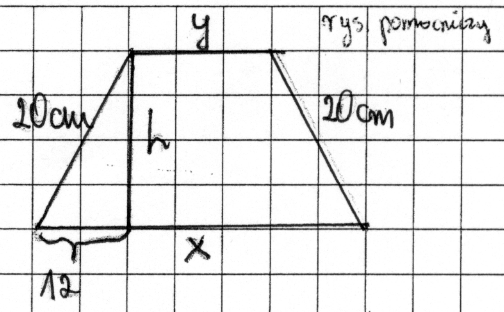
$$\begin{array}{r} 12 \\ \cdot 12 \\ \hline 24 \\ +12 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \cdot 8 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 256 & 2 \\ 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{array}$$

Przykład 8.

Obw = 72 cm



x - dłuższy bok
y - krótszy bok

$$\begin{cases} x - y = 24 \\ x + y = 32 \end{cases}$$

$2x = 56$
$x = 28$

$x + y = 32$
$28 + y = 32$
$y = 32 - 28$
$y = 4$

$$\begin{cases} x = 28 \\ y = 4 \end{cases}$$

$12^2 + h^2 = 20^2$
$144 + h^2 = 400$
$h^2 = 400 - 144$
$h^2 = 256$
$h = \sqrt{256}$
$h = 8\sqrt{4}$

$P = \frac{28cm + 4cm}{2} \cdot 8\sqrt{4}\,cm$

$P = 16cm \cdot 8\sqrt{4}\,cm$

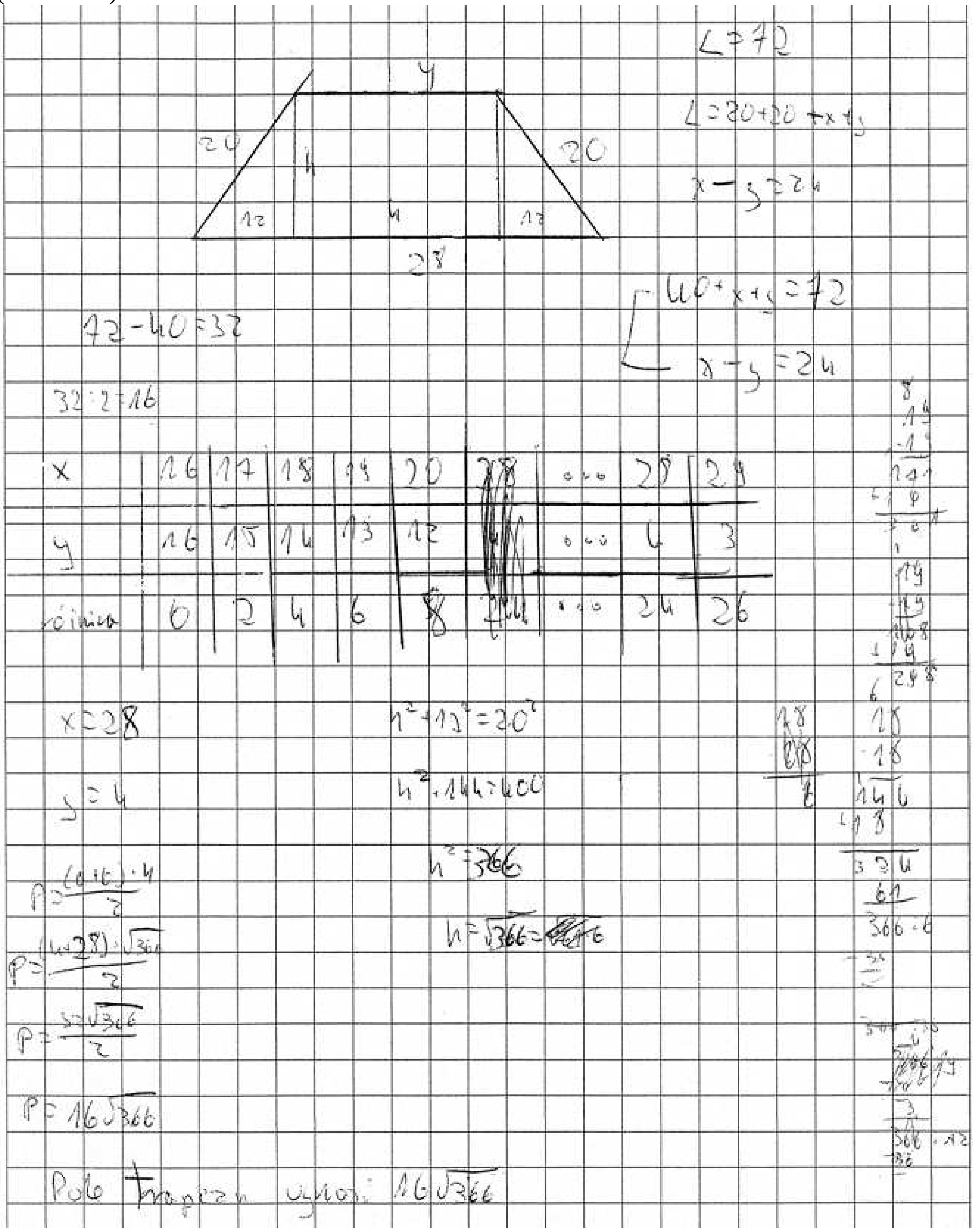
$P = 128\sqrt{4}\,cm^2$

Odp. Pole tego trapezu wynosi $128\sqrt{4}\,cm^2$.

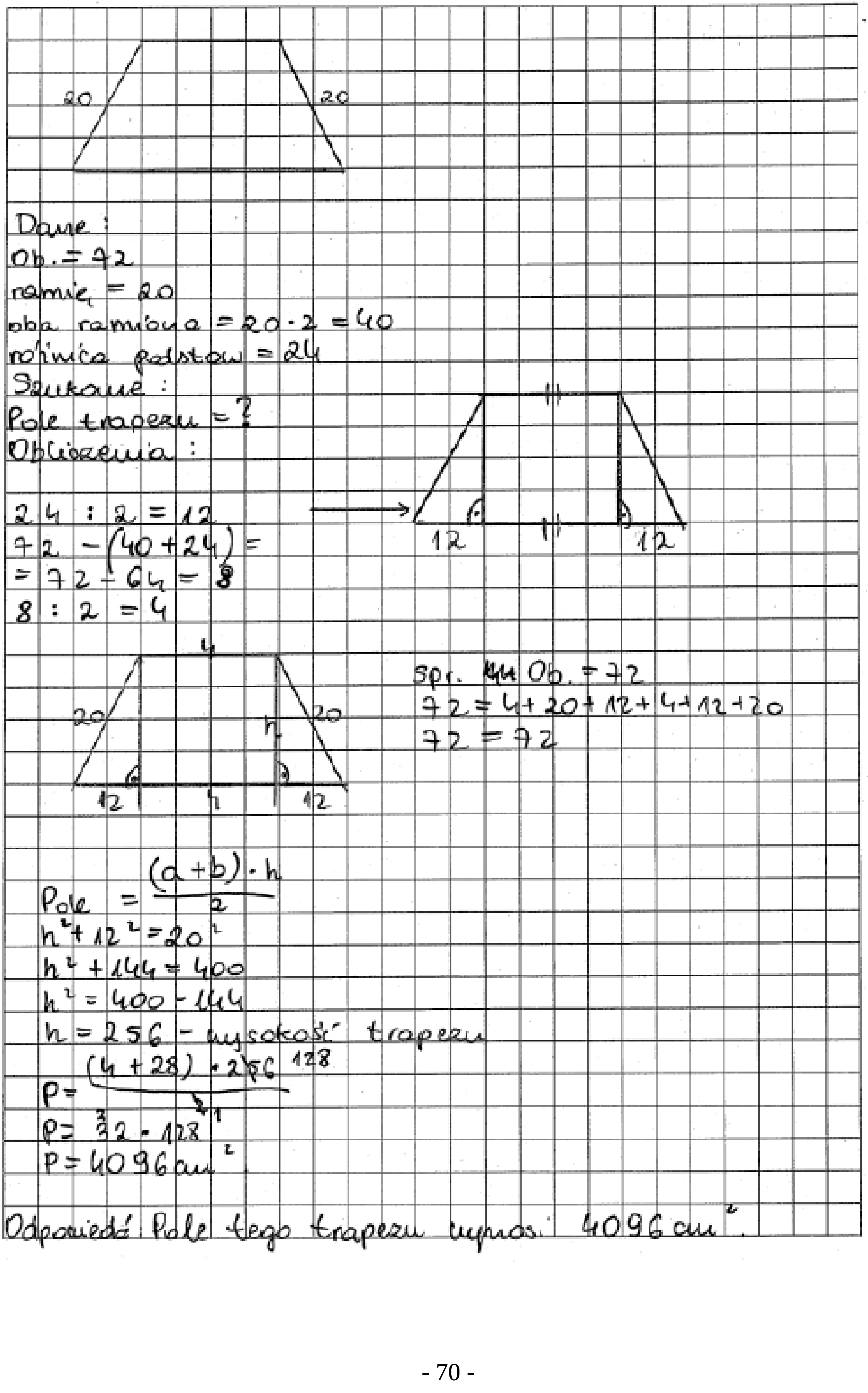
<u>Odpowiedzi częściowo poprawne</u>

Uczniowie stosowali poprawny sposób rozwiązania, ale popełniali błędy rachunkowe.

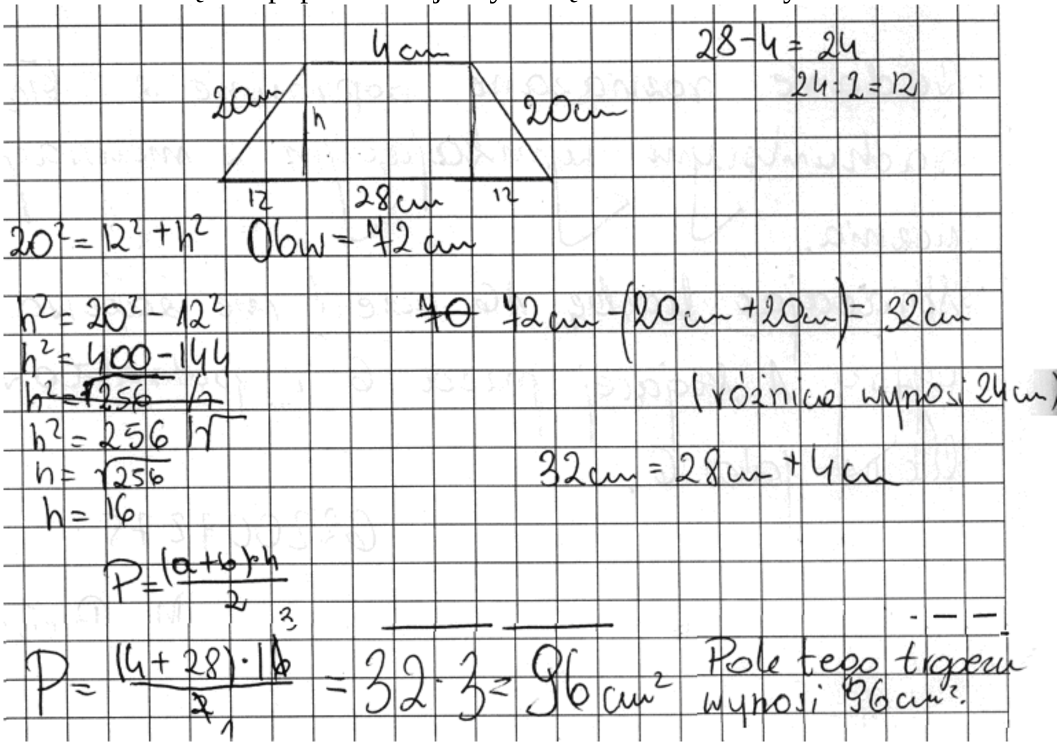
Przykład 9.
Oto przykład ciekawego rozwiązania, niestety uczeń popełnił błąd obliczając różnicę (400 – 144).



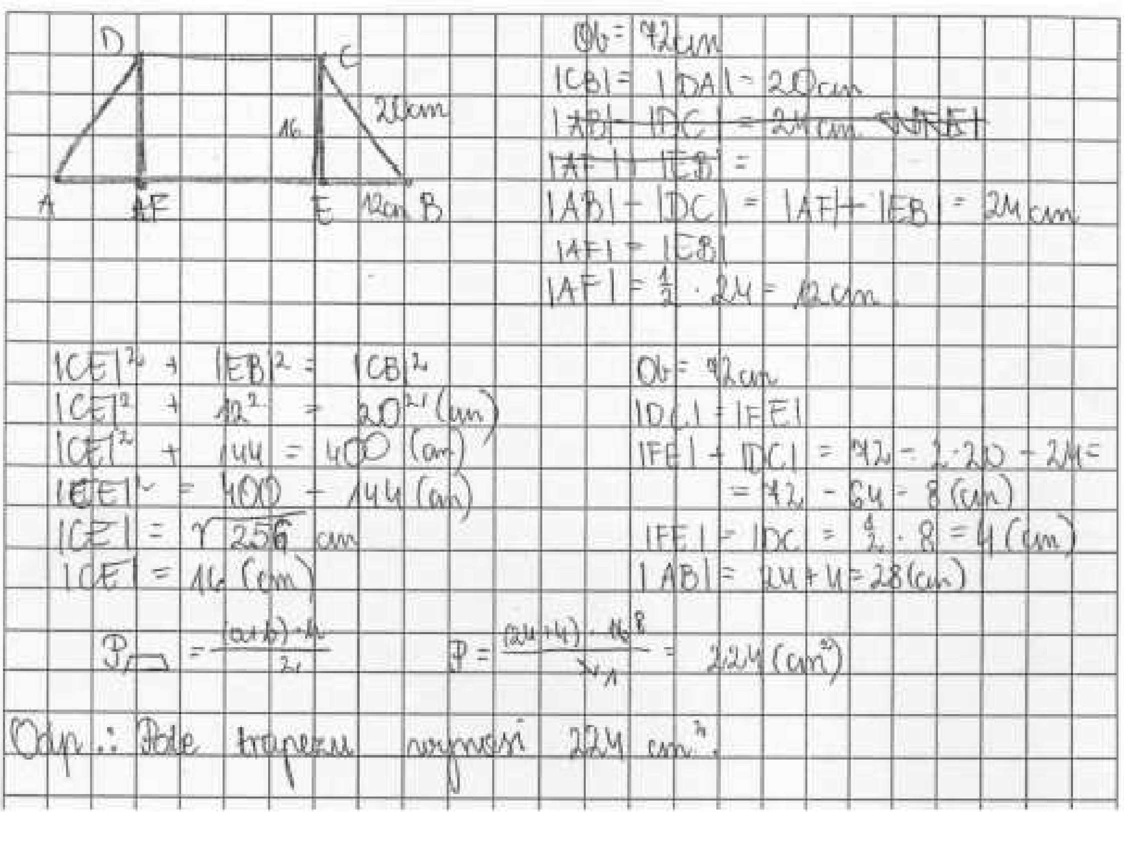
Przykład 10.
W tym przykładzie uczeń „zapomniał” obliczyć wartość pierwiastka.



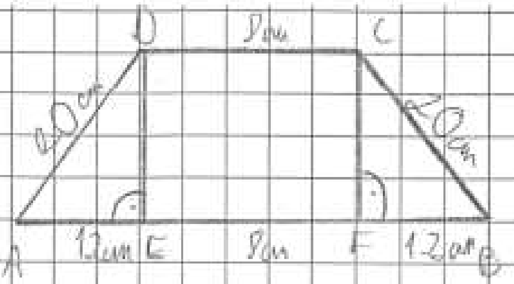
Przykład 10.
Zadanie rozwiązane poprawnie z jednym błędem rachunkowym – w skracaniu liczby 16.



Przykład 11.
Często uczniowie prawidłowo przeprowadzali tok rozumowania i poprawnie wykonywali obliczenia długości odcinków, ale do wzoru pozwalającego obliczyć pole trapezu podstawiali niewłaściwe liczy.



Przykład 12.
Znaczna grupa zdających nie poradziła sobie z wyznaczeniem długości odcinka AB.



Ob = 72 cm

24 cm : 2 = 12 cm

$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$

$|DC| = 72 - 2 \cdot 20 - 2 \cdot 12$

$|DC| = 72 - 40 - 24$

$|DC| = 72 - 64$

$|DC| = 8 \text{ (cm)}$

$|AB| = 8 + 24$

$|AB| = 32 \text{ (cm)}$

$\cancel{20^2 + 12^2 = h^2}$

$12^2 + h^2 = 20^2$

$144 + h^2 = \cancel{20}\ 400$

$h^2 = 400 - 144$

$h^2 = 256$

$h = \sqrt{256}$

$h = 16 \text{ (cm)}$

$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$

$P = \frac{(32+8) \cdot 16}{2}$

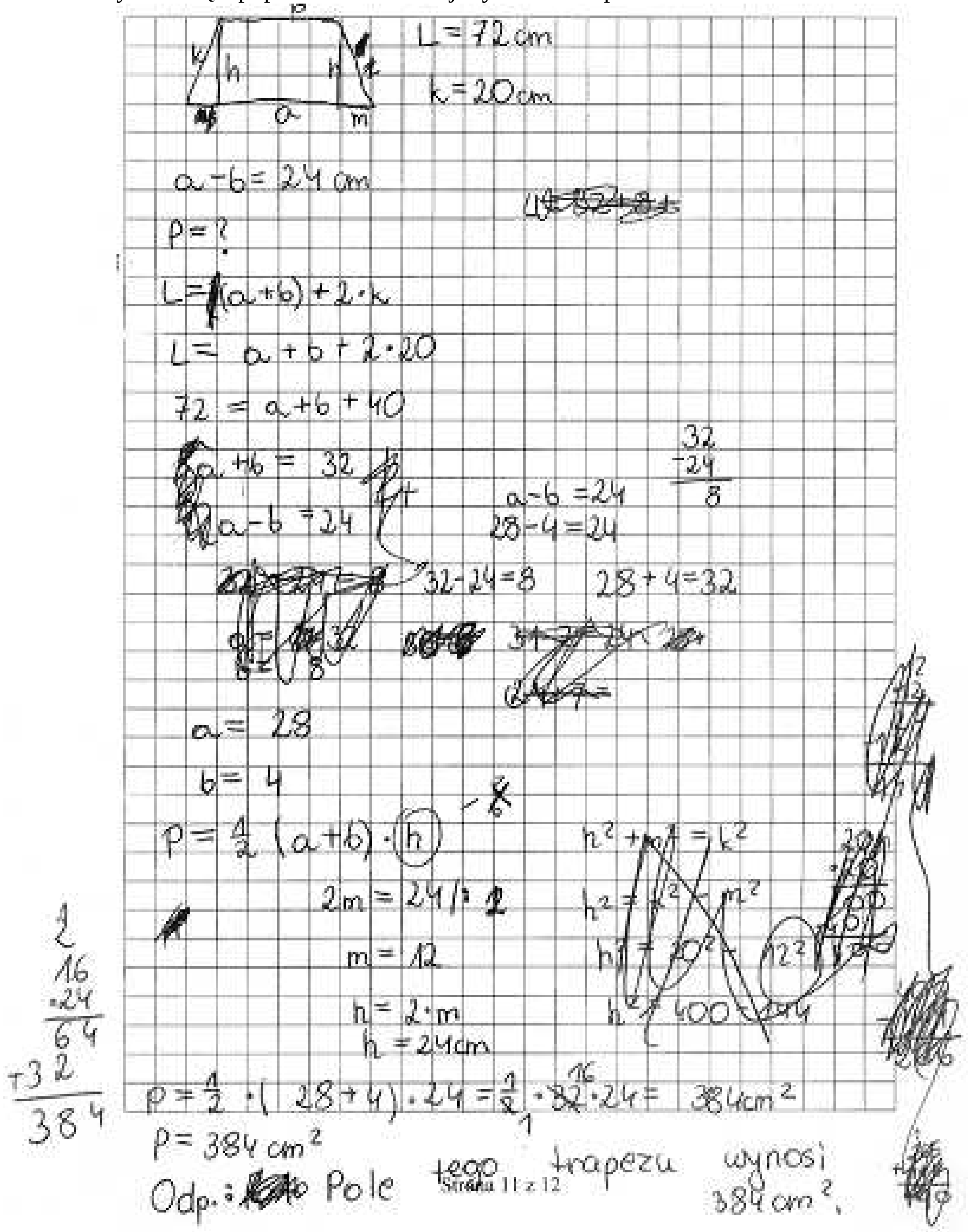
$P = \frac{40 \cdot \cancel{16}^{8}}{\cancel{2}_{1}}$

$P = 320 \text{ (cm}^2\text{)}$

Odp: Pole tego trapezu jest równe 320 cm².

Przykład 13.

Rozwiązujący prawidłowo zapisał zależności zachodzące między bokami trapezu, niestety nie poradził sobie z rozwiązaniem układu równań. Z zapisanego rozwiązania wynika, że uczeń znał strategię rozwiązania zadania. Niestety, niestaranność i chaos w zapisie spowodowały, że uczeń wycofał się z poprawnie obliczanej wysokości trapezu.



$L = 72$ cm

$k = 20$ cm

$a - b = 24$ cm

$P = ?$

$L = (a+b) + 2\cdot k$

$L = a + b + 2\cdot 20$

$72 = a + b + 40$

$a + b = 32$

$a - b = 24$

$a - b = 24$

$28 - 4 = 24$

$32 - 24 = 8$

$28 + 4 = 32$

$a = 28$

$b = 4$

$P = \frac{1}{2}(a+b)\cdot h$

$2m = 24 / : 2$

$m = 12$

$h = 2\cdot m$

$h = 24$ cm

$h^2 + m^2 = k^2$

$P = \frac{1}{2}\cdot(28+4)\cdot 24 = \frac{1}{2}\cdot 32 \cdot 24 = 384\text{ cm}^2$

$P = 384\text{ cm}^2$

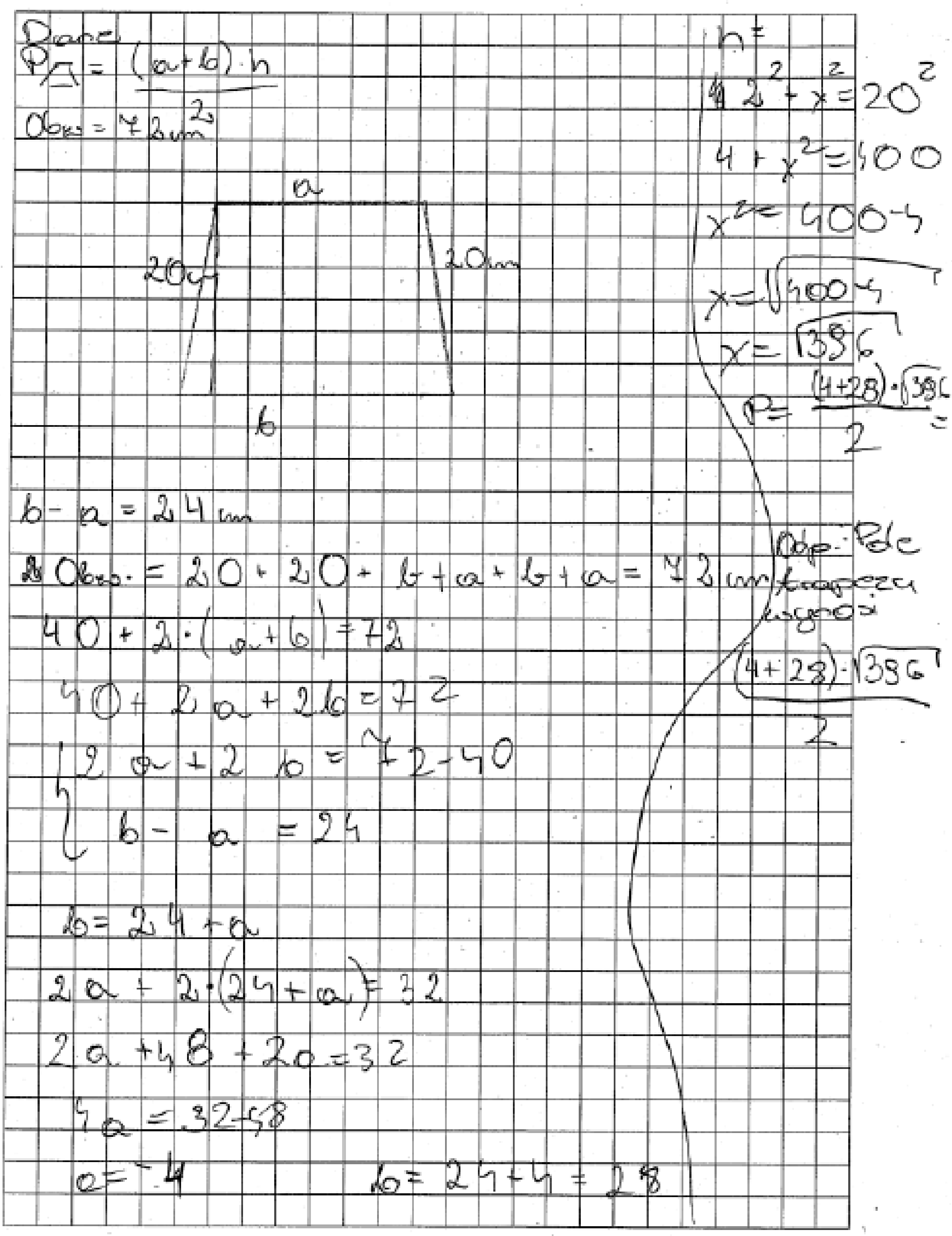
Odp.: Pole tego trapezu wynosi 384 cm^2.

Strona 11 z 12

<u>Odpowiedź błędna</u>

Przykład 14.

Autor rozwiązania pokazał, że zna wzór pozwalający obliczyć pole trapezu. Nie zna pojęcia obwodu, nie poradził sobie z wyznaczaniem długości potrzebnych odcinków.



Przypominamy, że szczegółowe dane statystyczne dotyczące wszystkich wyników egzaminu gimnazjalnego 2012 zostały podane w raporcie oraz w wynikach i analizach zamieszczonych na stronie internetowej www.oke.poznan.pl.